

المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها



أ. د. عبد الشافي فهمي عبادة

أ. د. حسن مصطفي العويضي

أ. د. عفاف أبو الفتوح صالح

دار الفكر العربي

سلسلة الفكر العربي لمراجع العلوم الأساسية
-٣٦-

المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها

أ.د. عبد الشافي فهمي عبادة
أستاذ الرياضيات - كلية العلوم
جامعة الأزهر

أ.د. حسن مصطفى العويضي
أستاذ الرياضيات - كلية العلوم
جامعة الأزهر

أ.د. عفاف أبو الفتوح صالح
أستاذ الرياضيات ومدير مركز
الحاسب الآلي - جامعة الأزهر

الطبعة الأولى
١٤٣١هـ/ ٢٠١٠م

ملتزم الطبع والنشر
دار الفكر العربي
٩٤ شارع عباس العقاد- مدينة نصر- القاهرة
ت: ٢٢٧٥٢٩٨٤ - فاكس: ٢٢٧٥٢٧٣٥
٦ أ شارع جواد حسني - ت: ٢٣٩٣٠١٦٧
www.darelfikrelarabi.com
INFO@darelfikrelarabi.com

٥١٥,٣٥
ش ا م ع

عبد الشافي فهمي عبادة.
المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها/ عبد الشافي فهمي عبادة، حسن مصطفى العويضي، عفاف أبو الفتوح صالح.- القاهرة: دار الفكر العربي، ١٤٣١هـ = ٢٠١٠م.
٨٥٢ص ؛ ٢٤ سم.- (سلسلة الفكر العربي لمراجع العلوم الأساسية؛ ٦٣).
ببليوجرافية: ص٨٤٧ - ٨٤٨.
تدمك: ٣-٢٦٠٠-١٠-٩٧٧.
١- المعادلات التفاضلية. ٢- المعادلات التفاضلية الخطية.
٣- المعادلات التفاضلية - تطبيقات حيوية واقتصادية وهندسية.
أ- حسن مصطفى العويضي، مؤلف مشارك. ب- عفاف أبو الفتوح صالح، مؤلف مشارك. جـ- العنوان. د- السلسلة.

جمع إلكتروني وطباعة



بسم الله الرحمن الرحيم

تقديم السلسلة

الحمد لله رب العالمين.. خلق الإنسان، علّمه البيان،

والصلاة والسلام على أشرف المرسلين، سيدنا محمد النبى الأمى العربى الصادق الأمين، وعلى آله وصحبه والتابعين بإحسان إلى يوم الدين.

أما بعد،

فإن اللغة - أىّ لغة - هى وسيلة التواصل الفكرى بين أبناء الأمة الواحدة، وهى فى الوقت نفسه تمثل حاجة ملحّة، وضرورة لا غنى عنها لكل أمة تشرع فى النهوض من كبوتها وتسعى إلى اللحاق بركب الحضارة، مؤمنة بالدور الأساسى للعلوم الأساسية والتطبيقية والتقنية فى صنع التقدم والرقى.

هذه الحقيقة التاريخية استوعبها علماء الحضارة العربية الإسلامية عندما ترجموا معارف السابقين إلى اللغة العربية، واستوعبها أيضا الغربيون عندما ترجموا علوم الحضارة العربية الإسلامية فى أوائل عصر النهضة الأوربية الحديثة، وتعيها اليوم كل الأمم التى تدرس العلوم بلغاتها الوطنية، فى سعى حثيث نحو المشاركة الفعالة فى إنتاج المعرفة وتشييد صرح الحضارة المعاصرة.

ولقد أضحى أمر تعريب العلم والتعليم ضرورة من ضرورات النهضة العلمية والتقنية التى تنشدها أمتنا العربية الإسلامية لكى تستأنف مسيرتها الحضارية بلغة القرآن الكريم الذى حفظها قوية حية فى النفوس على الرغم من الوهن الذى أصاب أهلها، وما ذلك إلا لأن الله - سبحانه وتعالى - قد خصّها بصفات تميزها على غيرها، وكفلها بحفظه حين تكفّل بحفظ قرآنه العظيم.

والحديث عن هذه الضرورة الحضارية لتعريب العلم والتعليم قد تجاوز الآن مرحلة الإقناع بالأدلة والبراهين المستقاة من حقائق التاريخ ومعطيات الواقع المعاش، وعليه أن ينتقل إلى مرحلة التخطيط والتنفيذ، وفق أسس وضمانات منهجية مدروسة، وعن طريق آليات ومؤسسات قادرة على إنجاز المشروع الحضارى الكبير؛ ذلك أن اجتياز حالة التخلف العلمى والتقنى التى تعيشها الأمة العربية والإسلامية يجب أن يصبح هدفا عزيزا تُستحث لأجله الهمم، وتستثار العزائم.

ودار الفكر العربي ـ من جانبها ـ قد استشعرت خطورة تأخير هذا المشروع الحضارى الكبير، فسعت جاهدة إلى تحقيق الهدف النبيل، وشرعت فى إعداد **«سلسلة مراجع العلوم الأساسية»** فى مجالات الكيمياء والفيزياء والرياضيات والفلك والجيولوجيا وعلوم الحياة، بحيث تخاطب قارئ العلوم فى مراحل العمر المختلفة بصورة عامة، وطلاب المرحلتين الثانوية والجامعية على وجه الخصوص، فى ضوء الأهداف الآتية:

* ربط المادة العلمية بما يدرسه الطلاب فى مناهجهم الدراسية، وعرضها على نحو يوافق التصور الإسلامى للمعرفة، ويحقق أهداف وغايات التربية الإسلامية الرشيدة.
* إثراء الثقافة العلمية لدى الطلاب والارتقاء بذوقهم العلمى مع تنمية الجانب التجريبى والتطبيقى لتعويدهم حسن الاستفادة من كل ملكات الفكر والعمل التى وهبها الله ـ سبحانه وتعالى ـ للإنسان.
* إبراز الدور الرائد الذى قام به علماء الحضارة العربية الإسلامية ـ قديما وحديثا ـ فى دفع مسيرة التقدم العلمى.
* تتبع نمو المفاهيم العلمية وصولا إلى أحدث الكشوف والمخترعات، وذلك بهدف غرس منهجية التفكير العلمى لدى الطلاب، وتوسيع مداركهم إلى أبعد من حدود الموضوعات الدراسية المقررة عليهم.
* الالتزام بما أقرته مجامع اللغة العربية من مصطلحات علمية، ويفضل أكثرها شيوعا مع ذكر المقابل الأجنبى.

وعهدت **دار الفكر العربي** بالمسئولية العلمية إلى هيئة استشارية تتولى التخطيط لإصدارات هذه السلسلة، واستكتاب أهل الخبرة والاختصاص من علماء الأمة ومفكريها، ومناقشة الأعمال المقدمة قبل صدورها.

﴿رَبَّنَا لا تُزِغْ قُلُوبَنَا بَعْدَ إِذْ هَدَيْتَنَا وَهَبْ لَنَا مِن لَّدُنكَ رَحْمَةً إِنَّكَ أَنتَ الْوَهَّابُ ﴿٨﴾﴾ [آل عمران].

وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين

أحمد فؤاد باشا

جميع المراسلات والاتصالات على العنوان التالى:

دار الفكر العربى

سلسلة الفكر العربي لمراجع العلوم الأساسية

٩٤ شارع عباس العقاد - مدينة نصر - القاهرة

ت: ٢٧٥٢٩٨٤ - فاكس: ٢٧٥٢٧٣٥

www.darelfikrelarabi.com
INFO@darelfikrelarabi.com

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على من أرسله الله رحمة للعالمين وعلى من سار على نهجه إلى يوم الدين.

أعد هذا الكتاب لدراسة المعادلات التفاضلية العادية وطرق الحل المختلفة وبعض النظريات والدوال الخاصة المرتبطة بها.

للمعادلات التفاضلية دور بارز فى العديد من التخصصات فدورها فى مجال الفيزياء لايخفى على أحد وكذا دورها فى العلوم الهندسية كما أن كثيراً من اصناف المعادلات التفاضلية تظهر فى دراسة الكيمياء وكذلك بعض فروع البيولوجيا والاقتصاد. فمن الاهمية بمكان ان يتم عرض المعادلات التفاضلية وكيفية تطبيقاتها فى بعض من هذه المجالات المتعددة.

ولاشك أن المعادلات التفاضلية العادية ذات الشروط الابتدائية المعطاة تعتبر من أهم وأبرز عناوين التمثيل الرياضى والذى يتم بناؤه لمعرفة أو تحديد الظواهر العلمية بما فى ذلك مصادر المعلومات المتعلقة بها. إن بناء أو تشكيل النموذج الرياضى ، والذى يتكون من الأفكار الرياضية مثل الثوابت والمتغيرات والدوال، والمعادلات الرياضية الجبرية أو التفاضلية ، يتم بتحديد قيم هذه المتغيرات الداخلية التى تحكم اداء العملية ووضع الأفتراحات التى تحكم تعريف هذه المتغيرات. ثم وضع العلاقات الرياضية التى تربط بينها. هذه العلاقات الرياضية قد تأخذ عدة أشكال مثل معادلات تفاضلية، معادلات تكاملية، معادلات فروق، معادلات مبنية على قرارات عملية، أو قوانين تجريبية أو علاقة احتمالات وبحل هذا النوع من المعادلات الرياضية يمكن الحصول على تصور واضح لخواص وطبيعة العملية بل مستقبل سيرها أيضاً.

ويحتوى الكتاب على طرق حل بعض المعادلات التفاضلية من أى رتبة وأى درجة ذات المعاملات الثابتة والمتغيرة. كذلك تعرضنا لطرق حل المعادلات باستخدام المتسلسلات وبعض التطبيقات كما تعرضنا للمعادلات الكلية والمعاملات التفاضلية التامة من أى رتبة. وأحتوى الكتاب أيضا على بعض النظريات ذات الصلة مثل نظريات الوجود والوحدوية والنظم الخطية وغير الخطية واستقرارها وتذبذب الحلول ومحدوديتها والشروط المكافئة لوجود حلول دورية وأيضاً تعرضنا لتوضيح ظاهرة تفرع الحلول.

وأحتوى الكتاب على تطبيقات بيولوجية وفيزيائية وكيميائية وكهربيه وإقتصادية بالاضافة إلى بعض الدوال الخاصة مثل بيتا وجاما وبسل وليجندروهيرمت ولاجيروالدوال فوق الهندسية التى نتجت من حل بعض المعادلات التفاضلية.

ويتقدم المؤلفون بالشكر لمن قد يساهم بالرأى أو بالنقد لهذا الكتاب. وما هذا الا جهد انسانى ومهما حاولنا فلن يبلغ مرتبة الكمال.

والله الموفق وهو الهادى إلى سواء السبيل

القاهرة | المؤلفون

ربيع الأول ١٤٣١

فبراير ٢٠١٠

المحتويات

الباب الأول: مفاهيم عامه

الباب الثانى: المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى

الباب الثالث: تطبيقات على المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى

الباب الرابع: معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأعلى

الباب الخامس: استقلال حلول المعادلات التفاضلية الخطية

الباب السادس: معادلات تفاضلية خطية من الرتبة النونية ذات معاملات ثابتة

الباب السابع: تطبيقات على معادلات خطية من الرتبة الثانية

الباب الثامن: معادلات تفاضلية خطية ذات معاملات متغيرة من الرتبة الثانية

الباب التاسع: المعادلات التفاضلية الآنيه

الباب العاشر: تطبيقات على المعادلات التفاضلية الآنيه من الرتبه الأولى (تطبيقات حيوية)

الباب الحادى عشر: استخدام المتسلسلات فى حل المعادلات التفاضلية

الباب الثانى عشر: نظرية وجود ووحدوية الحل

الباب الثالث عشر: النظم الخطية

الباب الرابع عشر: النظرية الكيفية

الباب الخامس عشر: الحلول الدورية للمعادلات التفاضلية

الباب السادس عشر: نظرية الاستقرار

الباب السابع عشر: طريقة ليبانوف

الباب الثامن عشر: التفرع

الباب التاسع عشر: المعادلات التامة

الباب العشرون: المعادلات التفاضلية الكلية

الباب الحادى والعشرون: التذبذب

الباب الثانى والعشرون: مسائل القيم الحديه

الباب الثالث والعشرون: مسائل شتورم وليوفيل

الباب الرابع والعشرون: كثيرات حدود ليجندر

الباب الخامس والعشرون: دوال بسل

الباب السادس والعشرون: كثيرات حدود هيرمت

الباب السابع والعشرون: كثيرات حدود لاجير

الباب الثامن والعشرون: الدوال فوق الهندسية

الباب الأول

مفاهيم عامة

General Concepts

مقدمة:

١-١ المعادلات التفاضلية:

تسمى المعادلة التى تحتوى على مشتقات لمتغير تابع أو أكثر بالنسبة لمتغير مستقل أو أكثر بالمعادلة التفاضلية ومثال ذلك المعادلات

$$dy = (x + \sin x)dx \tag{1}$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^5 = e^t \tag{2}$$

$$y = \sqrt{x}\,\frac{dy}{dx} + \frac{k}{(dy/dx)} \tag{3}$$

$$k\,\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = k\left(\frac{\partial^3 v}{\partial t^3}\right)^2 \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{6}$$

وقد تستخدم المصطلحات y_n أو $y^{(n)}$, y_2 أو y'' , y_1 أو y' لتدل على $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^ny}{dx^n}$ على الترتيب. فمثلا المعادلة (3) يمكن اعادة كتابتها على الصورة $y = \sqrt{x}\,y' + k/y'$ أو $y = \sqrt{x}\,y_1 + ky_2$.

١-٢ المعادلة التفاضلية العادية: Ordinary differential equation

هى معادلة تفاضلية تحتوى على مشتقات متغير تابع واحد بالنسبة إلى متغير مستقل واحد ومثال ذلك المعادلات (1)، (2)، (3)، (4).

١-٣ المعادلات التفاضلية الجزئية:

هى معادلات تحتوى على مشتقات تابع واحد بالنسبة إلى أكثر من متغير واحد مستقل ومثال ذلك المعادلات (5)، (6).

١-٤ رتبة المعادلة: Order

تكون رتبة المعادلة هى أعلى مشتقة موجودة بالمعادلة . ومثال ذلك المعادلة (2) من الرتبة الرابعة والمعادلتان (1)، (3) من الرتبة الأولى بينما المعادلتين (4)، (6) من الرتبة الثانية والمعادلة (5) من الرتبة الثالثة.

١-٥ درجة المعادلة: Degree

هى درجة (أس) أعلى مشتقة فى المعادلة شريطة ان تكون المشتقة الأعلى فى المعادلة خالية من الأسس الكسرية ومثال ذلك المعادلات (1)، (2)، (6) من الدرجة الأولى. أما المعادلة (3) بعد التخلص من الكسور نحصل على

$$y\,(dy\,/\,dx\,) = \sqrt{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + k$$

وهى معادلة من الدرجة الثانية. وأيضا بتربيع طرفى المعادلة (4) للتخلص من الجذور ، نجد أن ، من التعريف ، المعادلتين (4)، (6) من الدرجة الثانية.

١-٦ المعادلة التفاضلية الخطية وغير الخطية:

تسمى المعادلة التفاضلية خطية إذا كان:

(i) كل متغير تابع وكل مشتقاته من الدرجة الأولى.

(ii) لاتحتوى المعادلة التفاضلية على حاصل ضرب للمتغير التابع مع مشتقاته أو حاصل ضرب مشتقات مع بعضها.

وإذا لم تكن المعادلة التفاضلية خطية فانها تسمى غير خطية.

ومثال ذلك المعادلات (1)، (6) خطية بينما (2)، (3)، (4)، (5) غير خطية.

١-٧ حل المعادلة: Solution

تسمى أى علاقة من المتغير التابع والمتغير المستقل والتى عند التعويض بها فى المعادلة التفاضلية نحصل على متطابقة بحل المعادلة.

ويجب ملاحظة أن حل المعادلة لايحتوى مشتقات للمتغير التابع بالنسبة للمتغير المستقل (أو للمتغيرات المستقلة).

ومثال ذلك: $y = ce^{2x}$ يكون حلاً للمعادلة $y' = 2y$ وذلك بوضع $y = ce^{2x}$ ، $y' = 2ce^{2x}$ فى المعادلة المعطاه نحصل على المتطابقة $2ce^{2x} = 2ce^{2x}$. نلاحظ أن $y = ce^{2x}$ هو حل للمعادلة المعطاه لأى ثابت c والذى نسميه بثابت اختيارى.

١-٨ عائلة المنحنيات:

تسمى فئة العلاقات التى على الصورة

$$\{(x, y) : f(x, y, c_1, c_2, ..c_n) = 0\}$$

حيث f دالة متغير حقيقى فى $x, y, c_1, c_2, ..c_n$ وأن كل c_i ، $(i = 1, 2, ..n)$ ، تأخذ قيما حقيقية، بعائلة منحنيات ذات عدد n من البارامترات ومثال ذلك الدوائر المتحدة المركز المعرفة بالعلاقة.

$$x^2 + y^2 = c$$

هى عائلة منحنيات ذات بارامتر واحد إذا أخذت c قيما حقيقية غير سالبة.

وأيضا عائلة الدوائر المعرفة بالعلاقة

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = c_3$$

هى عائلة ذات ٣ بارامترات إذا كان c_1 ، c_2 تأخذ قيمة حقيقية وكانت c_3 تأخذ قيماً حقيقية غير سالبة.

١-٩ تكوين المعادلة التفاضلية

لنفترض أننا أعطينا عائلة منحنيات ذات عدد n من البارامترات. فإنه يوجد n ثوابت اختيارية فى صورة العائلة. وعلى ذلك فإنه يمكن الحصول على معادلة تفاضلية من الرتبة النونية حيث يكون حلها هى عائلة المنحنيات المعطاه ولبيان ذلك نتبع مايلى:

نشتق معادلة عائلة المنحنيات n من المرات لنحصل على n من المعادلات التفاضلية تحتوى n من الثوابت الاختيارية و n من المشتقات. ويحذف n من الثوابت الاختيارية من $(n + 1)$ من المعادلات التى حصلنا

عليها نحصل على معادلة تحتوى على مشتقة من الرتبة النونية وبذلك نكون قد كونا معادلة تفاضلية من الرتبة النونية.

ملحوظة: نلاحظ أن رتبة المعادلة الناتجة تكون مساوية لعدد الثوابت الاختيارية فى عائلة المنحنيات.

الامثلة التالية توضح هذه الفكرة.

مثال (١): اوجد معادلة تفاضلية من الرتبة الثالثة التى حلها هو عائلة المنحنيات ثلاثية البارامترات المعرفة بالعلاقة

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0$$

حيث a ، b ، c بارامترات.

الحل: لدينـــا

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0 \qquad (1)$$

بإشتقاق المعادلة (1) ٣- مرات بالنسبة إلى x نحصل على

$$x+yy'+a+by'=0 \qquad (2)$$

$$1+(y')^2+yy''+by''=0 \qquad (3)$$

$$3y'y''+yy'''+by'''=0 \qquad (4)$$

ونحذف الآن البارامترات a، b، c من المعادلات 1، 2، 3، 4. ولعمل ذلك تحذف b من (3)، (4) وبذلك بضرب (3) فى y'''، (4) فى y'' والطرح نحصل على

$$y'''+y'''(y')^2+yy''y'''-3y'(y'')^2-yy''y'''=0$$

أى

$$[1+(y')^2]y'''-3y'(y'')^2=0 \qquad (A)$$

ويمكن أجراء عملية الحذف باستخدام المحددات كما يلى:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & 2x & 2y & 1 \\ x+yy' & 1 & y' & 0 \\ 1+(y')^2+yy'' & 0 & y'' & 0 \\ 3y'y''+yy''' & 0 & y''' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

وبفك هذا المحدد نحصل على النتيجة (A)

مثال (٢): اوجد المعادلة التفاضلية لعائلة المنحنيات $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$ حيث A، B بارامتران.

الحل: لدينا

$$y = Ae^{2x} + Be^{-2x} \qquad (1)$$

وبالاشتقاق مرتين بالنسبة إلى x نحصل على

$$y' = 2Ae^{2x} - 2Be^{-2x}$$

$$y'' = 4Ae^{2x} + 4Be^{-2x} = 4(Ae^{2x} + Be^{-2x}) = 4y$$

أى أن $y'' = 4y$ وهى المعادلة المطلوبة.

أو باستخدام المحددات نجد أن

معامل A	معامل B	حد مطلق

$$\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} & -y \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} & -y' \\ 4e^{2x} & +4e^{-2x} & -y'' \end{vmatrix} = 0$$

وبفك المحدد نجد أن $y'' = 4y'$

وهو الحل السابق الحصول عليه.

مثال (٣): اوجد المعادلة التفاضلية لعائلة المنحنيات $y = e^{x}(A\cos x + B\sin x)$ حيث A، B ثابتان إختياريان

الحل: لدينا

$$y = e^{x}(A\cos x + B\sin x) \qquad (1)$$

بالاشتقاق بالنسبة إلى x نحصل على

$$y' = e^{x}(-A\sin x + B\cos x) + e^{x}(A\cos x + B\sin x)$$

$$= e^{x}(-A\sin x + B\cos x) + y \qquad (2)$$

مستخدما (1). وباشتقاق (2) بالنسبة إلى x نجد أن

$$y'' = -e^{x}(A\cos x + B\sin x) + e^{x}(-A\sin x + B\cos x) + y' \qquad (3)$$

ولكن من (2) نجد أن

$$y' - y = e^{x}(-A\sin x + B\cos x) \qquad (4)$$

وبحذف A و B من (1)، (3) و (4) نحصل على

$$y'' = -y + y' - y + y' \quad \Rightarrow \quad y'' - 2y' + 2y = 0$$

مثال (٤): احذف الثابتين a , b للحصول على المعادلة التفاضلية التى حلها هو

$$xy = ae^{x} + be^{-x} + x^{2}$$

الحل: لدينا

$$xy = ae^{x} + be^{-x} + x^{2} \qquad (1)$$

بالاشتقاق بالنسبة إلى x نحصل على

$$xy' + y = ae^{x} - be^{-x} + 2x \qquad (2)$$

وباشتقاق (2) بالنسبة إلى x نحصل على

$$xy'' + 2y' = (xy - x^{2}) + 2$$

مستخدما (1).

أى أن

$$xy'' + 2y' - xy + x^{2} - 2 = 0$$

هى المعادلة المطلوبة.

مثال (٥): اثبت أن $Ax^2+By^2=1$ هو حل المعادلة التفاضلية

$$x[xy''+(y')^2]=yy'$$

الحل: لدينا

$$Ax^2+By^2=1 \qquad (1)$$

بالاشتقاق بالنسبة إلى x نحصل على

$$2Ax+2Byy'=0 \quad \Rightarrow \quad Ax+Byy'=0 \qquad (2)$$

وباشتقاق (2) مرة أخرى نحصل على

$$A+B(yy''+y'.y')=0 \qquad (3)$$

بضرب (3) فى x أى أن

$$Ax+Bx(yy''+y'(y')^2=0 \qquad (4)$$

وبطرح (2) من (4) نحصل على

$$Bx(yy''+(y')^2)-Byy'=0$$

أى أن $\quad x(yy''+(y')^2)=yy'$

وبهذا يكون $Ax^2+By^2=1$ هو حلا للمعادلة المعطاه.

١-١٠ انواع الحلول:

لتكن

$$F(x,y,y',...y^{(n)})=0 \qquad (1)$$

معادلة تفاضلية عادية من الرتبة النونية

(i) يسمى حل المعادلة (1) الذى يحتوى n ثوابت اختيارية مستقلة بالحل العام (general solution)

(ii) يسمى حل المعادلة (1) التى نحصل عليه من الحل العام باعطاء قيما خاصة لواحد أو أكثر من الثوابت الاختيارية بالحل الخاص

(particular solution)

(iii) حل المعادلة (1) الذى لايمكن الحصول عليه من أى حل عام للمعادلة (1) بأى اختبار للثوابت الاختيارية المستقلة يسمى بالحل المنفرد (signular solution) للمعادلة (1).

فمثلاً $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$ هو حل عام للمعادلة التفاضلية $y'' - 3y' + 2y = 0$ حيث c_1، c_2 ثابتان اختياريان وأن رتبة المعادلة هى 2 فيكون هو الحل العام للمعادلة التفاضلية . ويمكن الحصول على الحل الخاص باعطاء قيما للثابتين c_1، c_2 فمثلاً $y = e^x + e^{2x}$، $y = e^x - e^{2x}$ هما حلان خاصان للمعادلة التفاضلية.

وأيضاً $y = (x + c)^2$ هو حل عام للمعادلة التفاضلية $(y')^2 - 4y = 0$.

نلاحظ أن $y = 0$ هو حل للمعادلة التفاضلية ولكن لايمكن الحصول عليه من $y = (x + c)^2$ بأى اختبار للثابت c. وبالمثالى يكون $y = 0$ حلاً منفرداً للمعادلة التفاضلية.

١-١١ الرونسكى Wronskion

يعرف الرونسكي للعدد n من الدوال $y_1(x), y_2(x), ... y_n(x)$ بأنه المحدد

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ..... & y_n \\ y_1' & y_2' & ..... & y_n' \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & ..... & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

١-١٢ فئة الدوال المستقلة وغير المستقلة خطياً

Lineary dependent and independent set of functions

تكون فئة الدوال $y_1(x), y_2(x), ... y_n(x)$ غير مستقلة (مرتبطة) خطياً إذا وجدت ثوابت $c_1, c_2, ... c_n$ (ليس كلها اصفاراً) بحيث ان

$$c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n = 0 \qquad (1)$$

إذا كانت المتطابقة الخطية (1) تؤدى إلى

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

فإنه يقال أن $y_1, y_2, \dots y_n$ مستقلة (غير مرتبطه) خطياً.

١-١٣- المعادلات التفاضلية الخطية وحلها العام.

تحتوى المعادلة التفاضلية الخطية على متغير تابع ومشتقاته من الدرجة الاولى. وتكون الصورة العامة لها هى

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = Q \qquad (1)$$

حيث $p_1, p_2, \dots p_n, Q$ دوال فى x ويفترض أنها متصلة على فترة ولتكن I.

وتسمى المعادلة التفاضلية

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0 \qquad (2)$$

بالمعادلة المتجانسة المصاحبة (associated) للمعادلة (1)

سوف نسرد الآن بعض النظريات بدون برهان (البرهان يلى من نظرية الوجود والوحدوية للمعادلات التفاضلية التى سندرسها فيما بعد).

نظرية (١): أى حل للمعادلة (2) يحقق الشروط الابتدائية

$$y(x_0) = y'(x_0) = \dots y^{(n-1)} x_0 = 0$$

يكون صفرا تطابقياً.

كحالة خاصة عند $n = 1$ يكون لدينا

نظرية (٢): إذا كان حل معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى

$$y' + Py = 0 \qquad (3)$$

يتلاشى عند $x = x_0$ فإن هذا الحل يكون صفراً تطابقياً.

نظرية (٣): يكون الرونسكى لحلين للمعادلة التفاضلية

$$y'' + Py' + Qy = 0 \qquad (4)$$

حيث P، Q ثابتان أو دالتان فى x. فقط إما أن يكون صفراً تطابقياً أو لا يساوى صفراً أبداً.

البرهان: ليكن $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ حلين للمعادلة (4). فيكون لدينا

$$y_1''+Py_1'+Qy_1=0 \quad , \quad y_2''+Py_2'+Qy_2=0$$

$$\Rightarrow y_1''=-(Py_1'+Qy_1) \quad , \quad y_2''=-(Py_2'+Qy_2) \tag{5}$$

والآن الرونسكى W للحلين y_1 ، y_2 يعطى بالتالى

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1' \tag{6}$$

من (6) نجد أن

$$\begin{aligned} W' &= y_1y_2''+y_1'y_2'-(y_2'y_1'+y_2y_1'') \\ &= y_1y_2''-y_1''y_2 \end{aligned}$$

أى أن

$$\begin{aligned} W' &= -y_1(Py_2'+Qy_2)+y_2(Py_1'+Qy_1) \\ &= -P(y_1y_2'-y_2y_1')=-PW \end{aligned}$$

وبالتالى فإن

$$W'+PW=0$$

وهذا يبين إنه إما أن تكون W صفراً بالتطابق أو لاتساوى صفراً أبداً.

نظرية (٤): اعتبر المعادلة التفاضلية الخطية

$$y''+Py'+Qy=0 \tag{7}$$

حيث P، Q ثابتان أو دوال فى x فإن حلى المعادلة (7) يكونان مرتبطين خطياً إذا وفقط إذا تلاشى الرونسكى تطابقياً.

البرهان: ليكن y_1 ، y_2 حلين للمعادلة (7) ويكون الرونسكى لهما

$$W=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

نفترض أن $W(x) \equiv 0$. إذا كانت x_0 أى نقطة فيكون لدينا

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{أى} \qquad W(x_0) \equiv 0$$

وهذا يؤدى لوجود ثابتين c_1، c_2 ليس كلاهما صفراً معاً بحيث أن

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \quad , \quad c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0$$

ليكن

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{8}$$

فان (8) تبين لنا أن $y(x)$ هو حل للمعادلة (7) ويحقق الشرطين $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0$. وعلى ذلك $y(x) = 0$ لجميع قيم x (نظرية (١)). وهذا يؤدى إلى وجود ثابتين c_1، c_2 ليس كلاهما صفراً معاً بحيث أن

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$$

لجميع قيم x. وهذا يؤدى إلى أن y_1، y_2 مرتبطان خطياً (من التعريف).

وعلى العكس ليكن y_1، y_2 مرتبطين خطيا فإنه يوجد ثابتان c_1، c_2 ليس كلاهما صفراً، بحيث أن

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \tag{A-9}$$

وباشتقاق $(A-9)$ نجد أن

$$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0 \tag{B-9}$$

ونحذف c_1، c_2 من $(9-A)$ ، $(9-B)$ فيكون لدينا

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{لجميع قيم } x$$

وهذا يؤدى إلى $W(x) = 0$ لجميع قيم x وبدوره يؤدى إلى أن الرونسكى للحلين y_1، y_2 يتلاشى تطابقياً.

نتيجة: يكون الحلان للمعادلة (7) مستقلين خطياً إذا لم يتلاش الرونسكى.

البرهان: (مباشر ومتروك للقارىء)

نظرية (٥): يمكن كتابة الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' + Py' + Qy = 0 \qquad (10)$$

حيث P، Q إما أن يكونا ثابتين أو دوال فى x فقط على الصورة

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (11)$$

حيث c_1، c_2 ثابتان، y_1، y_2 حلان مستقلان خطياً للمعادلة (10).

البرهان: من الواضح أن $c_1 y_1 + c_2 y_2$ يكون حلاً للمعادلة (10) ويكفى لبرهان المطلوب أن نثبت أن كل حل للمعادلة (10) يمكن كتابته على الصورة (11). لذلك نفترض

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \qquad (12)$$

حيث y حل للمعادلة (10)، c_1، c_2 ثابتان. وبالتالى

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' \qquad (13)$$

وبحل (12)، (13) للثابتين c_1، c_2 نحصل على

$$c_1 = \frac{1}{W}[yy_2' - y'y_2], \quad c_2 = \frac{1}{W}[y'y_1 - yy_2'] \qquad (14)$$

حيث

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$$

لجميع قيم x وبالتالى فإن y_1، y_2 مستقلان خطياً للثابتين c_1، c_2 معطاه فى (14) فإن y و $c_1 y_1 + c_2 y_2$ لهما نفس القيمة عند النقطة x ونفس الشىء بالنسبة إلى المشتقة.

والنتيجة تنتج من نظرية وجود الحلول للمعادلة التفاضلية.

نظرية (٦): إذا كان $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ أى حلين مستقلين خطياً للمعادلة المتجانسة.

$$y'' = Py' + Qy = 0 \qquad (15)$$

وأن y_p أى حل خاص للمعادلة غير المتجانسه.

$$y'' + Py' + Qy = R \qquad (16)$$

ويكون الحل العام للمعادلة (16) هو

$$y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2 \qquad (17)$$

حيث c_1 ، c_2 ثابتان اختياريان.

البرهان: حيث أن y_p حلا للمعادلة (16) فإن

$$y_p'' + Py_p' + Qy_p = R \qquad (18)$$

ليكن y حل اختيارى للمعادلة (16) فإن

$$y'' + Py' + Qy = R \qquad (19)$$

ليكن

$$u = y - y_p \qquad (20)$$

فإن

$$u' = y' - y_p' \quad , \quad u'' = y'' - y_p'' \qquad (21)$$

وبطرح (18) من (19) نحصل على

$$y'' - y_p'' + P(y' - y_p') + Q(y - y_p) = 0$$

أى أن

(باستخدام (20)، (21)) $\qquad u'' + Pu' + Qu = 0$

وهذا يبين أن u حل للمعادلة (15) ويكون لدينا

$$u = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

أى أن (من (20))
$$y - y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

وبالتالى
$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

وهذا يبين أن (17) هو الحل العام للمعادلة (16)

ملحوظة: يمكن تعميم النظريات السابقة لرتب أعلى. ولذلك سوف نورد تعميما للنظرية (٦) فيما يلى .

نظرية (٧): إذا كان $y_1, y_2, ... y_n$ ، n من الحلول المستقلة خطياً للمعادلة المتجانسة من الرتبة النونية.

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + ... P_n y = 0 \quad (22)$$

y_0 أى حل خاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + ... P_n y = Q \quad (23)$$

ويكون الحل العام للمعادلة (23) هو

$$y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2 + .. c_n y_n$$

حيث c_i ثوابت اختيارية $(i = 1, 2, ..., n)$.

ملحوظة: يسمى الحل العام $c_1 y_1 + c_2 y_2 + .. c_n y_n$ للمعادلة (22) بالدالة المتممة complementary function (C . F) ويسمى الحل الخاص y_p للمعادلة (23) بالتكامل (الحل) الخاص Particular integral (P. I).

تمارين

١- كون المعادلات التفاضلية لما يلى

(a) $y = a\cos(nx + b),$ بارامتران B, A

(b) $y = k\sin^{-1}x,$ بارامتر k

(c) $y = \alpha x + \beta x^2,$ بارامتران (α, β)

(d) $y = A\cos nt + B\sin nt$ بارامتر B, A

٢- اوجد المعادلة التفاضلية لعائلة المنحنيات $y = Ae^{3x} + Be^{5x}$ لقيم A، B المختلفة .

٣- اوجد المعادلة التفاضلية لجميع الدوائر المارة بنقطة الأصل ومحورها على المحور x .

٤- اثبت أن $v = B + A/r$ هى حل المعادلة التفاضلية $\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dv}{dr} = 0$.

٥- صف كل من المعادلات التالية من حيث كونها خطية وحدد رتبتها

a) $\frac{d^2y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} + y = x,$

b) $4\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^2y}{dx^2} = e^x,$

c) $\frac{dy}{dx} + y^2 = e^x$

d) $y\frac{dy}{dx} + xy = x$

٦- عين رتبة ودرجة المعادلة $x^2\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^3 + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y^4 = 0$.

وكم عدد الثوابت التى يحتويها الحل.

٧- اثبت أن $y_1 = \sin x$ و $y_2 = \sin x - \cos x$ حلان مستقلان خطيا للمعادلة $y'' + y = 0$.

٨- اثبت انه إذا كان $m_1 \neq m_2$ فإن e^{m_1x} و e^{m_2x} مستقلين خطياً.

٩- اثبت ان $1, x, x^2$ مستقلة خطياً ثم كون المعادلة التفاضلية التى حلولها $1, x, x^2$

١٠- ليكن كل من $f(x)$ ، $g(x)$ دالة متصلة على (0, 1)، اثبت ان $y''+f(x)y'+g(x)y=0$ لها حلين مستقلين خطياً على (0, 1).

١١- افحص الاستقلال الخطى لكل من

(i) $\sin ax, \cos bx$

(ii) $\cos 3x, \cos x, \cos^2 x$

(iii) $1, e^x$

(iv) e^x, e^{x^2}

(v) $\sin x, e^x$

(vi) x, e^x

الباب الثانى

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

First order linear differential equations and first degree

٢-١ مقدمة :

يوجد صيغتان قياسيتان من المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى وهما

(i) $dy/dx = f(x,y)$, (ii) $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

وفيما يلى سوف نرى أنه يمكن كتابة أى من الصيغتين بدلالة الصيغة الأخرى ونفترض تحقق شروط وجود الحلول . والأن سنتعرض لطرق حل هذا النوع من المعادلات .

٢-٢- فصل المتغيرات : Separation of variables

إذا أمكن كتابة المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى على الصورة

$$f_1(x)dx = f_2(y)dy \qquad (1)$$

حيث $f_1(x)$ دالة فى x فقط ، $f_2(y)$ دالة فى y فقط ، فاننا نقول فى هذه الحالة أن المتغيرات منفصلة .

وتحل مثل هذه المعادلات بتكامل الطرفين مع اضافة ثابت التكامل الاختيارى لأى من الطرفين وبذلك يكون حل المعادلة (1) هو

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + c \qquad (2)$$

ملحوظة : يمكن اختبار ثابت التكامل بأى صورة مناسبة مثل $c/3$ ، $\ln c$ ، $\tan^{-1}c$ ، e^c .

مثال (١) : حل المعادلة

$$dy/dx = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$$

الحل : بفصل المتغيرات فيمكن أعادة كتابة المعادلة على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y}(e^x + x^2)$$

أو

$$e^y dy = (x^2 + e^x)dx$$

وبالتكامل نحصل على

$$e^y = (x^3/3) + e^x + c$$

مثال (٢) : حل المعادلة

$$y - x\frac{dy}{dx} = a(y^2 + \frac{dy}{dx})$$

الحل : يمكن كتابة المعادلة على الصورة

$$(a+x)\frac{dy}{dx} = y - ay^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x+a} = \frac{dy}{y(1-ay)}$$

أى (باستخدام الكسور الجزئية)

$$\frac{dx}{x+a} = \left[\frac{a}{1-ay} + \frac{1}{y}\right]dy$$

وبالتكامل نحصل على

$$\ln(x+a) = -\ln(1-ay) + \ln y + \ln c$$

أو

$$\ln(x+a) = \ln\left[\frac{cy}{(1-ay)}\right]$$

أو

$$x + a = cy/1 - ay$$

مثال (٣) : حل المعادلة

$$(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)^{1/2} + xy\ (dy/dx) = 0$$

الحل : يمكن كتابة المعادلة على الصورة

$$(1+x^2)^{1/2}(1+y^2)^{1/2}+xy\ (dy/dx)=0$$

أو

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx+\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(1+x^2)dx}{x\sqrt{1+x^2}}+\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}}=0$$

بالتكامل

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}+\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}+\int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}}=c \qquad (1)$$

والآن ننظر إلى التكامل الأول

وبوضع $x=1/t$ يكون $dx=\frac{-1}{t^2}dt$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=\int \frac{(-1/t^2)dt}{(1/t)\sqrt{1+(1/t)^2}} \ ,$$

$$=-\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=-\ln(t+\sqrt{t^2+1}\ )$$

$$=-\ln\left\{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right\}=-\ln\left\{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right\}$$

$$=\ln x-\ln(1+\sqrt{1+x^2}) \qquad (2)$$

وأيضاً بالنسبة للتكامل الثانى بوضع $1+x^2=t$ يكون $2xdx=dt$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=\int \frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int t^{-1/2}dt=t^{1/2}=(1+x^2)^{1/2} \qquad (3)$$

وبالمثل

$$\int \frac{y\,dy}{\sqrt{1+y^2}} = (1+y^2)^{1/2} \qquad (4)$$

وباستخدام (2) ، (3) ، (4) فى (1) نحصل على

$$\ln x - \ln(1+\sqrt{1+x^2}\,) + (1+x^2)^{1/2} + (1+y^2)^{1/2} = c$$

حالة خاصة : إذا كانت المعادلة التفاضلية على الصورة

$dy/dx = f(ax+by+c),$ أو $(dy/dx = f(ax+by))$

فإنه يمكن اختزالها إلى معادلة تفاضلية مفصولة المتغيرات . ولهذا نفترض أن $ax+by+c=v$ أو $ax+by=v$ والطريقة تتضح من المثال التالى .

مثال (٤) : حل المعادلة

$$dy/dx = (4x+y+1)^2$$

الحل : نضع

$$4x+y+1=v \qquad (1)$$

باشتقاق (1) بالنسبة إلى x نحصل على

$$4+\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx} \qquad (2)$$

ومن (1) ، (2) نجد أن

$$\frac{dv}{dx}-4=v^2 \qquad \text{أو} \qquad \frac{dv}{dx}=4+v^2$$

وبفصل المتغيرات نجد أن $dx = \dfrac{dv}{4+v^2}$

وبالتكامل نحصل على

$$x+c=\frac{1}{2}\tan^{-1}(v/2)$$

حيث C ثابت اختيارى ، أى أن

$$v = 2\tan(2x + 2c)$$ أو $$2x + 2c = \tan^{-1}(v/2) ,$$

أى

$$4x + y + 1 = 2\tan(2x + 2c)$$

مثال (٥) : حل المعادلة التفاضلية

$$dy/dx = \sec(x + y)$$

الحل . لدينا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(x + y)}$$

أى أن

$$\cos(x + y)dy = dx$$

وبوضع $v = x + y$ نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$$

وعلى ذلك تؤول المعادلة إلى

$$\frac{dv}{dx} - 1 = \sec v ,$$

أى

$$\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{1}{\cos v}$$

$$dx = \frac{\cos v}{1 + \cos v}dv = \frac{2\cos^2\frac{1}{2}v - 1}{1 + 2\cos^2\frac{1}{2}v - 1}dv$$

أو

$$dx = (1 - \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}v)dv$$

وبالتكامل نحصل على

$$x + c = v - \tan\frac{1}{2}v \quad \Rightarrow \quad y - \tan\frac{1}{2}(x + y) = c$$

٢-٣ المعادلة المتجانسة : Homogeneous equation

تعريف (١) : يقال للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى متجانسه إذا أمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

وعلى ذلك يوضع $y/x=v$ أى $y=vx$

وبالاشتقاق بالنسبة إلى x نجد أن $dy/dx=v+x\dfrac{dv}{dx}$ وعلى ذلك تؤول المعادلة إلى الصورة

$$v+x\frac{dv}{dx}=f(v) \quad\Rightarrow\quad x\frac{dv}{dx}=f(v)-v$$

وبفصل المتغيرات نجد أن

$$\frac{dx}{x}=\frac{dv}{f(v)-v}$$

وبالتكامل نحصل على

$$\ln x+c=\int\frac{dv}{f(v)-v}$$

ثم بعد اجراء التكامل نضع $v=y/x$

مثال (١) : حل المعادلة التفاضلية

$$(x^3+3xy^2)dx+(y^3+3x^2y)dy=0$$

الحل : لدينا

$$-\frac{dy}{dx}=\frac{x^3+3xy^2}{y^3+3x^2y}=\frac{1+3(y/x)^2}{(y/x)^3+3(y/x)}$$

وبوضع $y/x=v$ أو $y=xv$ أى $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

وبالتعويض فى المعادلة نحصل على

$$-\left(v+x\frac{dv}{dx}\right)=\frac{1+3v^2}{v^3+3v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=-v-\frac{1+3v^2}{v^3+3v}=\frac{-v^4-6v^2-1}{v^3+3v}$$

وبالتالى

$$4\frac{dx}{x}=(-)\left(\frac{4v^3+12v}{v^4+6v^2+1}\right)dv$$

وبالتكامل

$$4\ln x=-\ln(v^4+6v^2+1)+\ln c$$

$$\ln x^4=\ln[c/(v^4+6v^2+1)]$$

$$x^4(v^4+6v^2+1)=c$$

وبوضع $v=(y/x)$ نحصل على

$$y^4+6x^2y^2+x^4=c$$

مثال (٢) : حل المعادلة

$$xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx$$

الحل : لدينا

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}$$

وبوضع $y/x=v$, $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

فإن

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + \sqrt{1+v^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}$$

وبالتكامل

$$\ln x + \ln c = \ln(v + \sqrt{v^2+1})$$

$$xc = v + \sqrt{v^2+1} \quad \Rightarrow \quad x^2 c = y + \sqrt{y^2+x^2}$$

مثال (٣) : حل المعادلات التفاضلية

$$(4y + 3x)dy + (y - 2x)dx = 0$$

الحل : نعيد كتابة المعادلة على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-2x}{4y+3x} = \frac{2-(y/x)}{3+4(y/x)} \qquad (1)$$

بوضع $y = xv$ وعلى ذلك تؤول المعادلة (1) إلى

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2-v}{3+4v} \quad \Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{2-v}{3+4v} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{2-4v-4v^2}{3+4v} \quad \Rightarrow \quad \frac{2dx}{x} = \frac{3+4v}{1+2v-2v^2}dv$$

وبالتكامل

$$2\ln x = \int \frac{3+4v}{1-2v-2v^2}dv = \int \frac{-(-2-4v)+1}{1-2v-2v^2}dv$$

$$\ln x^2 + \ln c = -\ln(1-2v-2v^2) + \frac{1}{2}\int \frac{dv}{(1/2)-v-v^2}$$

أى أن

$$\ln[cx^2(1-2v-2v^2)]=\frac{1}{2}\int \frac{dv}{\frac{3}{4}-(v^2+v+1/4)}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dv}{(\sqrt{3}/2)^2-(v+1/2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1}{2(\sqrt{3}/2)}\ln\frac{(\sqrt{3}/2)+(v+1/2)}{(\sqrt{3}/2)-(v+1/2)}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2v+1}{\sqrt{3}-2v-1}\right)$$

وبالتالى يكون الحل هو

$$\ln\left[cx^2\left(1-\frac{2y}{x}-\frac{2y^2}{x^2}\right)\right]=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{(\sqrt{3}+1)+2(y/x)}{(\sqrt{3}-1)-2(y/x)}$$

أى

$$c(x^2-2xy-2y^2)=\left\{\frac{(\sqrt{3}+1)x+2y}{(\sqrt{3}-1)x-2y}\right\}^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$$

مثال (٤) : حل المعادلة

$$x\frac{dy}{dx}=y(\ln y-(\ln x)+1)$$

الحل : نعيد كتابة المعادلة على الصورة

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x}+1\right)$$

بوضع $\frac{y}{x}=v$ نحصل على

$$v + x\frac{dv}{dx} = v(\ln v + 1) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dv}{v\ln v}$$

وبالتكامل

$$\ln x + \ln c = \ln(\ln v) \quad \Rightarrow \quad xc = \ln v$$

وبالتالى فإن الحل هو

$$(y/x) = e^{cx}, \qquad \text{أى} \qquad y = xe^{cx}$$

٢-٤ معادلات تؤول إلى المعادلات المتجانسه

يمكن اختزال المعادلة التفاضلية التى على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}, \quad \frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1} \qquad (1)$$

إلى المعادلة المتجانسة كما هو مبين فيما يلى

بوضع

$$x = X + h \quad , \quad y = Y + k \qquad (2)$$

حيث Y, X متغيران جديدان ، k, h ثابتان يمكن اختيارهما بحيث تكون المعادلة الناتجة متجانسه . من (2) نجد أن

$$dy/dx = dY/dX \quad \text{أى أن} \quad dy = dY \quad ، \quad dx = dX$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a(X+h) + b(Y+k) + c}{a_1(X+h) + b_1(Y+k) + c_1} = \frac{aX + bY + (ah + bk + c)}{a_1X + b_1Y + (a_1h + b_1k + c)} \qquad (3)$$

ولكى تكون المعادلة الأخيرة متجانسة يجب أن نختار k, h بحيث يحققان المعادلتين

$$ah + bk + c = 0, \quad a_1h + b_1k + c_1 = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن

$$h = \frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b}, \quad k = \frac{ca_1 - c_1a}{ab_1 - a_1b}$$

وحيث أن $a/a_1 \neq b/b_1$ فإن k, h يكون لهما معنى أوموجودتين . وبالتالى عرفنا الآن قيمتى k, h (لاحظ انهما احداثيات نقطة تقاطع الخطين المستقيمين) ومنهما نحصل على

$$Y = y - k \quad , \quad X = x - h$$

وتؤول المعادلة (3) إلى

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX - bY}{a_1X + b_1Y} = \frac{a + b(Y/X)}{a_1 + b_1(Y/X)}$$

وهى معادلة متجانسة وتحل كما سبق بوضع $Y/X = v$.

وبعد أن نوجد حل المعادلة الأخيرة نعوض عن X ، Y بالمقارين $(x - h)$ ، $(y - k)$ على الترتيب ونحصل على الحل بدلالة x و y .

مثال (١) : حل المعادلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 3}{2x + y - 3}$$

الحل : بوضع $x = X + h$ ، $y = Y + k$ وبالتالى فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$ وتؤول المعادلة المعطاه إلى

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y + (h + 2k - 3)}{2X + Y + (2h + k - 3)}$$

نختار k, h بحيث $h + 2k - 3 = 0, \quad 2h + k - 3 = 0$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على $h = 1 , k = 1$ وبالتالى فإن

$$X = x - 1 \quad , \quad Y = y - 1$$

وتأخذ المعادلة التفاضلية الصورة

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+2Y}{2X+Y}=\frac{1+2(Y/X)}{(Y/X)}$$

نضع $Y/X=v$ وبالتالى $\frac{dY}{dX}=v+X\frac{dv}{dX}$

وعلى ذلك تأخذ المعادلة الصورة

$$v+X\frac{dv}{dX}=\frac{1+2v}{2+v}\Rightarrow X\frac{dv}{dX}=\frac{1+2v}{2+v}-v=\frac{1-v^2}{2+v}$$

وعلى ذلك

$$\frac{dX}{X}=\frac{(2+v)dv}{(1-v)(1+v)}=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+v}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-v}\right)\right]dv$$

وذلك بالتحليل إلى كسور جزئية

وبالتكامل نحصل على

$$\ln X+\ln c=\frac{1}{2}[\ln(1+v)-3\ln(1-v)]$$

أى أن

$$2\ln(cX)=\ln\frac{1+v}{(1-v)^3}\Rightarrow Xc^2=\frac{1+v}{(1-v)^3}$$

وبالتالى

$$X^2c^2\left(1-\frac{Y}{X}\right)^3=1+\frac{Y}{X}$$

وذلك بعد التعويض $v=Y/X$ ، أى أن

$$c^2(X-Y)^2=X+Y\ .$$

أى أن

$$c^2[(x-1)-(y-1)]^2 = x-1+y-1$$

أى

$$c_1(x-y)^2 = x+y-2,\ \ c_1 = c^2$$

مثال (٢) : حل المعادلة

$$(dy/dx)+(x-y-2)/(x-2y-3)=0$$

الحل : نضع $x = X+h, y = Y+k$ وبذلك تؤول المعادلة التفاضلية إلى

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y+h-k-2}{X-2Y+h-2k-3}$$

نختار h, k بحيث $h-k-2=0\ ,\ \ h-2k-3=0$

وبحل المعادلتين نحصل أن $h=1\ ,\ k=-1$

وعلى ذلك فإن $X = x - 1\ ,\ \ Y = y+1$

وتأخذ المعادلة التفاضلية الصورة

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X-2Y}=\frac{1-Y/X}{1-2Y/X}$$

وبوضع $Y/X = v$ فيكون $\frac{dY}{dX}=v+X\frac{dv}{dX}$

أى أن

$$X\frac{dv}{dX}+v=-\frac{1-v}{1-2v}$$

وبالتالى فإن

$$\frac{dX}{X}=\frac{2v-1}{1-2v^2}\Rightarrow\frac{dX}{X}=\left[-\frac{1}{2}\frac{(-4v)}{1-2v^2}-\frac{1}{1-(v\sqrt{2})^2}\right]dv$$

وبالتكامل نحصل على

$$\ln X=-\frac{1}{2}\ln(1-2v^2)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1+v\sqrt{2}}{1-v\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{2}\ln c$$

$$2\ln X+\ln(1-2v^2)+\ln c=\frac{-1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1+v\sqrt{2}}{1-v\sqrt{2}}\right)$$

$$\ln[cX^2(1-2v^2)]=\ln\left(\frac{1-v\sqrt{2}}{1+v\sqrt{2}}\right)^{1/\sqrt{2}}$$

وعلى ذلك

$$cX^2\left(1-\frac{2Y^2}{X^2}\right)=\left(\frac{1-(Y/X)\sqrt{2}}{1+(Y/X)\sqrt{2}}\right)^{1/\sqrt{2}}\Rightarrow$$

$$c\left(X^2-2Y^2\right)=\left(\frac{X-Y\sqrt{2}}{X+Y\sqrt{2}}\right)^{1/\sqrt{2}}$$

ومن ذلك نرى أن

$$c[(x-1)^2-2(y+1)^2]=\left[\frac{x-1-(y+1)\sqrt{2}}{x-1+(y+1)\sqrt{2}}\right]^{1/\sqrt{2}}$$

$$c[(x^2-2y^2-2x-4y-1)=\left(\frac{x-y\sqrt{2}-\sqrt{2}-2}{x+y-1+\sqrt{2}}\right)^{1/\sqrt{2}}$$

ملحوظة : يسمى التعبير الذى على الصورة

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1,x_2,...x_n)dx_i$$

حيث f_i دوال فى بعض أو كل المتغيرات $x_1,x_2,...x_n$ صيغة بافاين (Pfaffian) التفاضلية . كما تسمى المعادلة

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1,x_2,...x_n)dx_i = 0$$

بمعادلة بافان التفاضلية ، ومثال ذلك المعادلة

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

أو

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0$$

هى امثلة على معادلات بافان فى متغيرين أو ثلاثة متغيرات وسنتعرض لدراستها فى ابواب تالية .

٢-٥ المعادلات التفاضلية التامة Exact differential equation

تعريف (١) : إذا كان كل من M ، N دالة فى x و y فإن المعادلة

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

تسمى بمعادلة تامة إذا وجدت دالة $f(x,y)$ (دالة فى x و y) بحيث إن

$$d[f(x,y)] = Mdx + Ndy \qquad (2)$$

أى أن

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = Mdx + Ndy$$

مثال (١) : المعادلة التفاضلية $y^2dx + 2xydy = 0$ معادلة تفاضلية تامة لأنه توجد دالة xy^2 بحيث أن

$$d(xy^2)=\frac{\partial}{\partial x}(xy^2)dx+\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)dy$$

أى أن

$$d(xy^2)=y^2dx+2xydy \qquad (3)$$

وعلى ذلك يمكن كتابة $y^2dx+2xydy=0$ على الصورة $d(xy^2)=0$ وبالتكامل نحصل على $xy^2=c$ حيث C ثابت اختيارى . وعلى ذلك يكون حل المعادلة التفاضلية المعطاه هو $xy^2=c$

وعمليا ليس من السهولة أن نكون قادرين على تحديد $f(x,y)$ ولكن الطريقة التى سنبينها هنا تكون مفيدة غالباً .

نظرية (١) : الشرط الضرورى والكافى لكى تكون المعادلة التفاضلية

$$Mdx+Ndy=0 \qquad (1)$$

تامة هو

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

البرهان : (أ) الشرط ضرورى

لتكن المعادلة (1) تامة وبالتالى من التعريف يوجد دالة $f(x,y)$ بحيث إن

$$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=Mdx+Ndy \qquad (3)$$

وبمقارنة معاملات dx ، dy نحصل على

$$M=\frac{\partial f}{\partial x}\ , \qquad (4)$$

$$N=\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (5)$$

ولحذف الدالة المجهولة f فإننا نشتق جزئيا المعادلتين (4) ، (5) بالنسبة إلى x , y على الترتيب فنحصل على

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\partial^2 f\ /\partial y\,\partial x \tag{6}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\partial^2 f\ /\partial x\,\partial y \tag{7}$$

وحيث إن $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ فنحصل على $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

وبالتالى إذا كانت المعادلة (1) تامة فإن **M** و **N** تحققان الشرط (2) .

(ب) **الشرط كافى :** نفترض تحقق الشرط (2) وسنثبت أن المعادلة (1) هى معادلة تفاضلية تامة . لذلك يجب إيجاد دالة $f(x,y)$ بحيث أن

$$d[f(x,y)]=Mdx+Ndy$$

لتكن

$$g(x,y)=\int Mdx \tag{8}$$

نكامل جزئيا الدالة M ، أى اننا نحصل على التكامل بجعل y ثابتة . فاننا نثبت أولا أن $(N-\partial g/\partial y)$ دالة فى y فقط . وهذا واضح لأن

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N-\frac{\partial g}{\partial y}\right)=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}$$

(حيث $\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 g}{\partial y\,\partial x}$)

$$=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=0$$ (باستخدام (8))

وبأخذ

$$f(x,y)=g(x,y)+\int\left(N-\frac{\partial g}{\partial y}\right)dy \qquad (9)$$

وحيث أن

$$df=dg+\left(N-\frac{\partial g}{\partial y}\right)dy=\left(\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial y}dy\right)+Ndy-\frac{\partial g}{\partial y}dy$$

(باستخدام (8))

$$=\frac{\partial g}{\partial x}dx+Ndy=Mdx+Ndy$$

وبالتالى إذا تحقق الشرط (2) فإنه بالتأكيد تكون المعادلة التفاضلية تامة .

وتكون طريقة حل هذا النوع من المادلات

(i) نقارن المعادلة المعطاه مع $Mdx+Ndy=0$ ونوجد M و N ثم تحسب $\partial M/\partial y$ ، $\partial N/\partial x$ فإذا تساويا فان المعادلة تكون تامة .

(ii) تكامل M بالنسبة إلى x مع اعتبار y ثابت

(iii) تكامل N بالنسبة إلى y مع اعتبار x ثابت وتحذف تلك الحدود التى ظهرت فى (ii)

(iv) نجمع الحدود فى (ii) ، (iii) ونساوى حاصل الجمع بثابت اختيارى وبذلك نكون قد حصلنا على حل المعادلة وسنوضح ذلك بالامثلة التالية

مثال (٢) : حل المعادلة

$$y\sin 2x\,dx-(y^2+\cos^2 x)dy=0$$

الحل : نقارن المعادلة المعطاه مع $Mdx+Ndy=0$ فنجد أن

$$M=y\sin 2x\,,N=-(y^2+\cos^2 x)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\sin 2x,\frac{\partial N}{\partial y}=2\cos x\sin x=\sin 2x$$

وبالتالى $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ وبالتالى تكون المعادلة المعطاه تامة . والآن

$$(i)\ \int Mdx=\int y\sin 2xdx=-\frac{1}{2}y\cos 2x$$

$$(ii)\ \int Ndy=-\int(y^2+\cos^2 x)dy=-\frac{y^3}{3}-y\cos^2 x$$

$$=-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y(1+\cos 2x)=-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}y\cos 2x$$

وبالتالى سيكون الحل من (i) ، (ii)

أى $-\frac{1}{2}y\cos 2x-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y=c_1$

$$y\cos 2x+\frac{2}{3}y^3+y=c,\quad (c=-2c_1)$$

(حيث حذفنا $-\frac{1}{2}y\cos 2x$ لأنها ظهرت فى $\int Mdx$)

مثال (٣) : حل المعادلة

$$[y(1+\frac{1}{x})+\cos y]dx+[x+\ln x-x\sin y)dy=0$$

الحل : لدينا

$$M=y(1+\frac{1}{x})+\cos y,N=x+\ln x-x\sin y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1+\frac{1}{x}-\sin y=\frac{\partial N}{\partial x}$$

∴ المعادلة تامة وعلى ذلك يكون

$$\int Mdx = \int (y + \frac{y}{x} + \cos y)dx = yx + y\ln x + x\cos y$$

$$\int Ndy = \int (x + \ln x - x\sin y)dy = xy + y\ln x + x\cos y$$

تلاحظ أن هذه الحدود كلها موجودة فى $\int Mdx$ ولذلك نحذفها ويكون حل المعادلة هو

$$xy + y\ln x + x\cos y = c$$

حيث C ثابت اختيارى

مثال (٤) : حل المعادلة

$$(ax + hy + g)dx + (hx + by + f)dy = 0$$

حيث a, b, h, g, f ثوابت

الحل : لدينا

$$M = ax + hy + g \quad , \quad N = hx + by + f$$

وعلى ذلك

$$\frac{\partial M}{\partial y} = h = \frac{\partial N}{\partial x}$$

فتكون المعادلة تامة . وبالتالى

$$\int Mdx = \int (ax + hy + g)dx = \frac{1}{2}ax^2 + hxy + gx$$

$$\int Ndy = \int (hx + by + f)dy = hxy + \frac{1}{2}by^2 + fy$$

ويكون حل المعادلة هو

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy = c$$

حيث C ثابت اختيارى وحذفنا الحد hxy لانه تكرر فى $\int Mdx$.

٢-٦ عامل التكامل المكاملة : **Integrating factor**

تعريف : إذا كانت المعادلة التى على الصورة $Mdx + Ndy = 0$ ليست تامة فإنه دائماً يمكن جعلها تامة بضرب المعادلة فى دالة فى x و y . ومثل هذه الدالة تسمى بعامل التكامل أو المكاملة (integrating factor) .

وبالرغم من أن المعادلة $Mdx + Ndy = 0$ لها دائماً عوامل متكاملة فانه لاتوجد طريقة عامة لايجاده . وعلينا أن نتذكر أنه يوجد عدد لانهائى من عوامل المكاملة للمعادلة التى على الصورة $Mdx + Ndy = 0$ كما هو مبين فى النظرية التالية

نظرية (١) : للمعادلة التفاضلية $Mdx + Ndy = 0$ عدد لانهائى من عوامل المكاملة .

البرهان : ليكن

$$Mdx + Ndy = 0 \qquad (1)$$

وكذلك $\mu(x, y)$ عامل المكاملة للمعادلة (1) وعليه فإن المعادلة $\mu(Mdx + Ndy) = 0$ تكون معادلة تفاضلية تامة وعليه توجد دالة $V(x, y)$ بحيث أن

$$dV = \mu(Mdx + Ndy) \qquad (2)$$

نفترض أن $f(V)$ أى دالة إختيارية فى V . وبالتالى من (2) يكون لدينا

$$f(V)dV = \mu f(V)(Mdx + Ndy) \qquad (3)$$

وحيث أن التعبير فى الطرف الأيسر من (3) تفاضل تام يلى أن التعبير فى الطرف الأيمن من (3) يجب أن يكون تفاضل تام . ويلى من التعريف أن $\mu f(V)$ عامل مكاملة للمعادلة (1) . وحيث أن $f(V)$ *دالة اختيارية* فى V فيلى ذلك أن للمعادلة (1) عدد لا نهائى من عوامل المكاملة .

٢-٧ بعض القواعد للحصول على عامل التكامل

ملحوظة (١) : بالرغم من أنه يوجد دائماً لانهائى من عوامل المكاملة للمعادلة $Mdx + Ndy = 0$ فانه لاتوجد طريقة عامة لايجاده . ومع ذلك سنسرد بعض القواعد للحصول على عامل المكاملة .

قاعدة (١) : بمجرد النظر (Inspection) يمكن ايجاد عامل المكاملة عادة بفحص المعادلة $Mdx + Ndy = 0$ وباعادة ترتيب حدود المعادلة المعطاه أو بقسمتها بدالة مناسبة فى x و y وبالتالى فإن المعادلة التى نحصل عليها سوف تحتوى على أجزاء عديدة يمكن تكاملها بسهولة . وعلى هذا سنستعرض فى جدول قائمة بالتفاضلات التامة exact differentiable

(i) $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$	(ii) $d\left(\frac{y^2}{x}\right) = \frac{2xydy - y^2dx}{x^2}$
(iii) $d\left(\frac{y^2}{x^2}\right) = \frac{2x^2ydy - 2xy^2dx}{x^4}$	(iv) $d[\ln(xy)] = \frac{xdy + ydx}{xy}$
(v) $d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$	(vi) $d\left[\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right] = \frac{xdy - ydx}{xy}$
(vii) $d\left(\frac{-1}{xy}\right) = \frac{xdy + ydx}{x^2y^2}$	(viii) $d\left(\frac{e^x}{y}\right) = \frac{ye^xdx - e^xdy}{y^2}$

والآن سنستعرض بعض الامثلة لتوضيح ذلك

مثال (١) : حل المعادلة

$$ydx - xdy + (1 + x^2)dx + x^2 \sin ydy = 0$$

الحل : بالقسمة على x^2 نحصل على

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} + \frac{1+x^2}{x^2}dx + \sin y dy = 0$$

أو

$$-\frac{xdy - ydx}{x^2} + \left(\frac{1}{x^2} + 1\right)dx + \sin y dy = 0$$

باستخدام الجدول السابق نحصل على

$$-d\left(\frac{y}{x}\right) + \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx + \sin y dy = 0$$

وبالتكامل نحصل على

$$-\frac{y}{x} + x - \frac{1}{x} - \cos y = c \quad \Rightarrow \quad -y + x^2 - 1 - x\cos y = cx$$

حيث C ثابت اختيارى .

مثال (٢) : حل المعادلة

$$y(2xy + e^x)dx = e^x dy$$

الحل : نعيد كتابة المعادلة على الصورة

$$2xdx + \frac{ye^x dx - e^x dy}{y^2} = 0$$

أو

$$2xdx + d\left(\frac{e^x}{y}\right) = 0$$

وبالتكامل نحصل على

$$x^2 + e^x / y = c \Rightarrow yx^2 + e^x = cy$$

مثال (٣) : حل المعادلة

$$y \sin 2x dx = (1 + y^2 + \cos^2 x) dy$$

الحل : نعيد كتابة المعادلة على الصورة

$$-2y \sin x \cos x dx + \cos^2 x dy + (1 + y^2) dy = 0$$

أى

$$d(y \cos^2 x) + (1 + y^2) dy = 0$$

وبالتكامل نحصل على

$$y \cos^2 x + y + y^3/3 = c$$

مثال (٤) : حل المعادلة

$$(x^3 + xy^2 + a^2 y) dx + (y^3 + yx^2 - a^2 x) dy = 0$$

الحل : باعادة ترتيب المعادلة

$$x(x^2 + y^2) dx + y(x^2 + y^2) dy + a^2 (y dx - x dy) = 0$$

أى أن

$$x dx + y dy + a^2 \left(\frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} \right) = 0$$

$$x dx + y dy + a^2 d\left(\tan^{-1} \frac{x}{y} \right) = 0$$

بالتكامل نحصل على

$$x^2 + y^2 + 2a^2 \tan^{-1} \left(\frac{x}{y} \right) = c$$

مثال (٥) : حل المعادلة

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right) + xy = \sqrt{1 - x^2 y^2}$$

الحل : بأعادة ترتيب المعادلة نحصل على

$$\frac{xdy+ydx}{\sqrt{1-x^2y^2}}-\frac{dx}{x}=0$$

وبالتكامل نحصل على

$$\sin^{-1}(xy)-\ln x=c$$

قاعدة (٢) : إذا كانت المعادلة التفاضلية $Mdx+Ndy=0$ متجانسة وأن $Mx+Ny\neq 0$ فإن $1/(Mx+Ny)$ يكون عامل المكاملة .

البرهان : نعيد كتابة $Mdx+Ndy$ فيكون لدينا

$$Mdx+Ndy=\frac{1}{2}\left\{(Mx+Ny)\left(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}\right)+(Mx-Ny)\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)\right\}$$

وبالتالى

$$\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}\right)+\frac{Mx-Ny}{Mx+Ny}\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)\right\} \qquad (1)$$

وحيث أن $Mdx+Ndy=0$ معادلة متجانسة فإن M و N يكونان من نفس الدرجة فى x و y وعلى ذلك يمكن أن نكتب $\frac{Mx-Ny}{Mx+Ny}$ تساوى دالة فى $\frac{x}{y}$ أى تساوى $f\left(\frac{x}{y}\right)$ مثلاً .

وباستخدام هذا مع المعادلة (1) فنحصل على

$$\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\{d(\ln(xy))+f(e^{\ln(x/y)})d\left(\ln\frac{x}{y}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{d(\ln xy)+g\left(\ln\frac{x}{y}\right)d\left(\ln\frac{x}{y}\right)\right\}$$

[وذلك بافتراض $f(e^{\ln(x/y)})=g\left(\ln\frac{x}{y}\right)$]

$$=d\{\frac{1}{2}\ln xy+\frac{1}{2}\int g\left(\ln\frac{x}{y}\right)d\left(\ln\frac{x}{y}\right)$$

مثبتا أن $1/(Mx+Ny)$ عامل مكاملة للمعادلة التفاضلية المتجانسة $Mdx+Ndy=0$.

مثال (١) : حل المعادلة

$$(x^2y-2xy^2)dx-(x^3-3x^2y)dy=0$$

الحل : من الواضح ان هذه المعادلة متجانسة وبمقارنتها مع $Mdx+Ndy=0$ نجد أن $M=x^2y-2xy^2, N=-(x^3-3x^2y)$ وعلى ذلك

$$Mx+Ny=x(x^2y-2xy^2)-y(x^3-3x^2y)=x^2y^2\neq 0$$

وعلى ذلك يكون $1/x^2y^2$ عامل مكاملة وعلى ذلك

$$\left(\frac{1}{y}-\frac{2}{x}\right)dx-\left(\frac{x}{y^2}-\frac{3}{y}\right)dy=0$$

وهى معادلة تامة ويكون حلها هو

$$\frac{x}{y}-2\ln x-3\ln y=c$$

حيث c ثابت اختيارى .

قاعدة (٣) : إذا كانت المعادلة $Mdx+Ndy=0$ على الصورة $f_1(xy)ydx+f_2(xy)xdy=0$ فإن $1/(Mx-Ny)$ يكون عامل المكاملة شريطة $Mx-Ny\neq 0$.

البرهان : نفترض أن المعادلة

$$Mdx + Ndy = 0 \qquad (1)$$

لها الصورة

$$f_1(xy)ydx + f_2(xy)xdy = 0 \qquad (2)$$

بمقارنة (1) ، (2) نجد أن

$$\frac{M}{yf_1(xy)} = \frac{N}{xf_2(xy)} = \mu \qquad \text{(مثلا)}$$

والذى يؤدى إلى

$$M = \mu y f_1(xy), N = \mu x f_2(xy) \qquad (3)$$

وباعادة كتابة $Mdx + Ndy$ على الصورة

$$Mdx + Ndy = \frac{1}{2}\left\{(Mx + Ny)\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{d}\right) + (Mx - Ny)\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{d}\right)\right\}$$

أى

$$\frac{Mdx + Ndy}{Mx - Ny} = \frac{1}{2}\left\{\frac{Mx + Ny}{Mx - Ny}\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right) + \left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{f_1(xy) + f_2(xy)}{f_1(xy) - f_2(xy)} d(\ln xy) + d\left(\ln\frac{x}{y}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{f(xy) d(\ln(xy) + d\left(\ln\frac{x}{y}\right)\right\}$$

[بافتراض $\frac{f_1(xy) + f_2(xy)}{f_1(xy) - f_2(xy)} = f(xy)$]

$$=\frac{1}{2}\left\{f\left(e^{\ln xy}\right)d(\ln xy)+d\left(\ln\frac{x}{y}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{g(xy)d(\ln xy)+d\left(\ln\frac{x}{y}\right)\right\}\ ,\ f\left(e^{\ln xy}\right)=g(\ln(xy))$$ حيث

$$=d\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{x}{y}+\frac{1}{2}\int g(\ln xy)d(\ln xy)\right\}$$

وهذا يثبت أن $Mx-Ny$ عامل مكاملة للمعادلة $Mdx+Ndy=0$.

مثال (١) : حل المعادلة

$$(xy\sin xy+\cos xy)ydx+(xy\sin xy-\cos xy)xdy=0$$

الحل : بمقارنة هذه المعادلة مع $Mdx+Ndy=0$ نجد أن

$$M=y(xy\sin xy+\cos xy),N=x(xy\sin xy-\cos xy)$$

وعلى ذلك فإن المعادلة المعطاه على الصورة

$$f_1(xy)ydx+f_2(xy)xdy=0$$

وأيضاً

$$\begin{aligned}Mx-Ny&=xy(xy\sin xy+\cos xy)-xy(xy\sin xy-\cos xy)\\&=2xy\cos xy\neq 0\end{aligned}$$

وبذلك يكون عامل المكاملة

$$\frac{1}{Mx-Ny}=\frac{1}{2xy\cos xy}$$

وعلى ذلك بضرب المعادلة (1) في $1/(2xy\cos xy)$ نحصل على

$$\frac{1}{2}(y\tan xy+\frac{1}{x})dx+\frac{1}{2}(x\tan xy-\frac{1}{y})dy$$

وهى معادلة تامة وتحل كما سبق ويكون حلها هو

$$\ln \sec xy + \ln(x / y) = \ln c$$

أى

$$x / y \sec xy = c$$

قاعدة (٤) : إذا كان $\frac{1}{N}\left\{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right\}$ دالة فى x فقط ولتكن $f(x)$ ،

فإن $e^{\int f(x)dx}$ يكون عامل المكاملة للمعادلة التفاضلية $Mdx + Ndy = 0$

البرهان : ليكن لدينا المعادلة

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{1}$$

وليكن

$$\frac{1}{N}\left\{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right\} = f(x)$$

وبالتالى

$$Nf(x) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \tag{2}$$

بضرب طرفى (1) فى $e^{\int f(x)dx}$ فنجد أن

$$M_1dx + N_1dy = 0 \tag{3}$$

حيث

$$M_1 = Me^{\int f(x)dx} \quad , \quad N_1 = Ne^{\int f(x)dx} \tag{4}$$

ومن (4) نحصل على

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}e^{\int f(x)dx} \tag{5}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}e^{\int f(x)dx} + Ne^{\int f(x)dx}f(x)$$

$$= e^{\int f(x)dx}\left\{\frac{\partial N}{\partial x} + Nf(x)\right\}$$

$$= e^{\int f(x)dx}\left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

(باستخدام (2)) . أى أن

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = e^{\int f(x)dx}\frac{\partial M}{\partial y} \qquad (6)$$

من (5) ، (6) نجد أن $\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x}$ مثبتاً أن $M_1 dx + N_1 dy = 0$ يجب أن تكون معادلة تامة وبالتالى فإن $e^{\int f(x)dx}$ هو معامل المكاملة للمعادلة (1) كما هو مطلوب .

مثال (١) : حل المعادلة

$$(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$$

الحل : لدينا

$$(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0 \qquad (1)$$

وبالمقارنة مع $Mdx + Ndy = 0$ نجد أن

$$M = x^2 + y^2 + x, N = xy \qquad (2)$$

وبالتالى

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \frac{\partial N}{\partial x} = y \qquad (3)$$

فتكون

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{xy}(2y - y) = \frac{1}{x}$$

وهذا التعبير دالة فى x فقط . ويكون عامل المكاملو للمعادنة (1) مساوياً

$$e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

وبضرب (1) فى x فنحصل على

$$(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2 y dy = 0$$

والتى يجب أن تكون معادلة تامة ويكون حلها هو

$$\frac{x^4}{4} + (x^2 y^2)/2 + (x^3/3) = c/12$$

أى

$$3x^4 + 6x^2 y^2 + 4x^3 = c$$

قاعدة (٥) : إذا كان $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ دالة فى y فقط ولتكن $f(y)$ ، فإن $e^{\int f(y)dy}$ يكون عامل المكاملة للمعادلة $Mdx + Ndy = 0$.

البرهان : مشابه لقاعدة (4)

مثال (١) : حل المعادلة

$$(2xy^4 e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2 y^4 e^y - x^2 y^2 - 3x)dy = 0 \qquad (1)$$

الحل : بمقارنة *(1)* مع $Mdx + Ndy = 0$ فنجد أن

$$M = 2xy^4 e^y + 2xy^3 + y \,, N = x^2 y^4 e^y - x^2 y^2 - 3x$$

وعلى ذلك

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 8xy^3 e^y + 2xy^4 e^y + 6xy^4 + 1$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2xy^4 e^y - 2xy^2 - 3$$

وبالتالى

$$\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=(2xy^4e^y-2xy^2-3)-(8xy^4e^y+2xy^4e^y+6xy^4+1)$$

وعلى ذلك

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=-\frac{4}{y}$$

وهى دالة فى y فقط وعلى ذلك يكون عامل التكامل للمعادلة (1) هو $e^{\int -\frac{4}{y}dy}=\frac{1}{y^4}$. وبضرب المعادلة (1) فى $\frac{1}{y^4}$ فنجد أن

$$[2xe^y+\left(\frac{2x}{y}\right)+(1/y^3)]dx+\{x^2e^y-(x^2/y^2)-3(x/y^4)\}dy=0$$

ويكون حلها هو

$$x^2e^y+x^2/y+x/y^3=c$$

٢-٨ المعادلة التفاضلية الخطية Linear differential equation

تعريف : يقال أن المعادلة التفاضلية خطية من الرتبة الأولى إذا أمكن كتابتها على الصورة

$$(dy/dx)+Py=Q \qquad (1)$$

حيث P ، Q ثوابت أو دوال فى x فقط (وليس فى y)

طريقة حل المعادلة الخطية :

نفترض أن R (وهى دالة فى x فقط) هى عامل المكاملة للمعادلة (1) . وبضرب المعادلة (1) فى R نحصل على

$$R\frac{dy}{dx}+RPy=RQ \qquad (2)$$

التى يجب أن تكون معادلة تامة . نفترض أننا نرغب في جعل الطرف الأيسر هو معامل تفاضلى لحاصل ضرب . ولكن الحد $R\left(\frac{dy}{dx}\right)$ يمكن أن نحصل عليه فقط من تفاضل حاصل الضرب Ry . وعلى ذلك

$$R\frac{dy}{dx}+RPy=\frac{d}{dx}(Ry) \qquad (2)$$

أى

$$R\frac{dy}{dx}+RPy=R\frac{dy}{dx}+y\frac{dR}{dx} \qquad (3)$$

أى

$$\frac{dR}{R}=Pdx$$

وبالتكامل نحصل على $\ln R=\int Pdx$ (بأخذ ثابت التكامل يساوى صفراً للتسهيل). وعلى ذلك يكون $R=e^{\int Pdx}$ عامل المكاملة للمعادلة (1) ويمكن كتابة (2) على الصورة

$$\frac{d}{dx}(Ry)=RQ,\quad d(Ry)=RQdx$$

وبالتكامل

$$Ry=\int RQdx+c$$

أى

$$ye^{\int Pdx}=\int (Qe^{\int Pdx})dx+c$$

وهو حل المعادلة التفاضلية الخطية (1) .

ملحوظة (١) : نتذكر مايلى

$$e^{\ln A}=A \quad ، \quad e^{m\ln A}=A^m, e^{-m\ln A}=1/A^m$$

ملحوظة (٢) : فى بعض الاحيان قد لاتكون المعادلة (1) خطية فى y ولكن يمكن كتابتها بحيث تكون خطية فى x حيث x متغير تابع و y متغير مستقل وتكون المعادلة على الصورة

$$\frac{dx}{dy}+P_1x=Q_1$$

حيث P_1 ، Q_1 دوال فى y فقط

ويكون عامل المكاملة هو $e^{\int P_1dy}$ ويكون الحل هو

$$xe^{\int P_1dy}=\int \left(Q_1e^{\int P_1dy}\right)dy+c$$

مثال (١): حل المعادلة

$$x\cos x\frac{dy}{dx}+y(x\sin x+\cos x)=1$$

الحل : نعيد كتابة المعادلة على الصورة

$$\frac{dy}{dx}+(\tan x+\frac{1}{x})y=\frac{\sec x}{x}$$

ويكون عامل المكاملة $I.F.$ هو

$$I.F.=e^{\int(\tan x+\frac{1}{x})dx}=e^{\ln\sec x+\ln x}=x\sec x$$

ويكون الحل المطلوب هو

$$yx\sec x=\int\sec^2 xdx+c \quad\Rightarrow\quad yx\sec x=\tan x+c$$

مثال (٢) : حل المعادلة

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx}+2xy=x\sqrt{1-x^2}$$

الحل : نعيد كتابة المعادلة على الصورة

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2x}{1-x^2}y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

بالمقارنة مع $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ فيكون $P=\frac{2x}{1-x^2}$ وعلى ذلك

$$\int Pdx=\int \frac{2x}{1-x^2}dx=-\ln(1-x^2)$$

وعلى ذلك يكون عامل المكاملة $I.F.$

$$I.F=e^{\int Pdx}=\frac{1}{1-x^2}$$

ويكون حل المعادلة المطلوب هو

$$\frac{y}{1-x^2}=\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.\frac{1}{1-x^2}dx$$

بوضع $t=1-x^2$ ، $dt=-2xdx$ فتحصل على

$$\frac{y}{1-x^2}=-\frac{1}{2}\int t^{-3/2}dt+c=t^{-1/2}+c$$

$$\frac{y}{1-x^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+c$$

مثال (٣) : حل المعادلة

$$(x+2y^3)\frac{dy}{dx}=y$$

الحل : من الممكن كتابة المعادلة على الصورة $dx/dy+P_1x=Q_1$

فيكون لدينا $\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=2y^2$ ، $\frac{dx}{dy}=\frac{x+2y^3}{y}$

$\int P_1dy=-\int \frac{1}{y}dy=-\ln y$ ويكون عامل التكامل هو $e^{-\ln y}=1/y$

ويكون الحل المطلوب هو $\frac{x}{y}=\int 2y^2\left(\frac{1}{y}\right)dy+c$

أى $\frac{x}{y}=y^2+c$

مثال (٤) : حل المعادلة

$$(1+y^2)dx=(\tan^{-1}y-x)dy$$

الحل : يمكن كتابة المعادلة على الصورة

$$\frac{dx}{dy}+\frac{x}{1+y^2}=\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}$$

وعلى ذلك

$$\int P_1dy=\int \frac{1}{1+y^2}dy=\tan^{-1}y$$

ويكون عامل التكامل هو

$$I.F=e^{\int P_1dy}=e^{\tan^{-1}y}$$

ويكون الحل المطلوب

$$xe^{\tan^{-1}y}=\int e^{\tan^{-1}y}.\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}dy$$

بوضع $t=\tan^{-1}y$ أى $dt=\frac{dy}{1+y^2}$ وعلى ذلك بالتكامل بالتجزئ نحصل على

$$xe^{\tan^{-1}y}=te^t-e^t+c$$

$$=e^{\tan^{-1}y}(\tan^{-1}y-1)+c \quad \Rightarrow \quad x=\tan^{-1}y-1+ce^{-\tan^{-1}y}$$

مثال (٥) : حل المعادلة

$$x(1-x^2)dy+(2x^2y-y-ax^3)dx=0$$

الحل : نكتب المعادلة على الصورة

$$x(1-x^2)\frac{dy}{dx}+y(2x^2-1)=ax^3$$

أى

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2x^2-1}{x(1-x^2)}y=\frac{ax^2}{1-x^2} \qquad (1)$$

بالمقارنة مع $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ نجد أن

$$P=\frac{2x^2-1}{x(1-x^2)}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x-1)},Q=\frac{ax^2}{1-x^2} \qquad (2)$$

$$\int pdx=\int\left[\frac{-1}{x}-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x-1)}\right]dx$$

$$=-\left[\ln x+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)\right]$$

$$=-\left[\ln x+\frac{1}{2}\ln(x^2-1)\right]=\ln\left[x\sqrt{x^2-1}\right]^{-1}$$

وبالتالى فإن

$$I.F=e^{\int Pdx}=e^{\ln(x\sqrt{x^2-1})^{-1}}=[x\sqrt{x^2-1}\,]^{-1}$$

وعلى ذلك يكون حل المعادلة (١) هو

$$y(I.F)=\int Q.(I.F)dx+c$$

$$\frac{y}{x\sqrt{x^2+1}}=\int \frac{ax^2}{1-x^2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx+c$$

$$=c-a\int \frac{xdx}{(x^2-1)^{3/2}}$$

$$=c-\frac{a}{2}\int \frac{dt}{t^{3/2}}$$ [بوضع $t=x^2-1$]

$$=c-\frac{a}{2}\int \left[\frac{t^{-1/2}}{-1/2}\right]=c+\frac{a}{\sqrt{t}}=c+\frac{a}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$y=cx\sqrt{x^2-1}+ax$$

٢-٩ معادلات قابلة للاختزال للمعادلة الخطية :

(أ) يمكن اختزال المعادلة التفاضلية التى على الصورة

$$f'(y)\frac{dy}{dx}+Pf(y)=Q \qquad (1)$$

حيث P ، Q ثوابت أو دوال فى x فقط إلى الصورة الخطية كما يلى :

نضع $v=f(y)$ وعليه فإن

$$f(y)\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

وعلى ذلك تؤول المعادلة (1) إلى

$$\frac{dv}{dx}+Pv=Q \qquad (2)$$

حيث أنها معادلة خطية فى v ويمكن الحصول على حلها كما سبق فيكون عامل المكاملة $I.F.=e^{\int Pdx}$ ويكون حلها $ve^{\int Pdx}=\int Qe^{\int Pdx}dx+c$

ثم نضع $f(y)$ بدلا من v ونحصل على الحل بدلالة y ، x .

ملحوظة (١) : بالمثل يمكن حل المعادلة التى على الصورة

$$f'(x)\frac{dx}{dy}+P_1 f(x)=Q_1$$

حيث P_1 ، Q_1 ثوابت أو دوال فى y ، بنفس الطريقة السابقة وذلك بوضع $v=f(x)$.

مثال (١) : حل المعادلة

$$\frac{dx}{dy}+x\sin 2y=x^3\cos^2 y$$

الحل : بقسمة المعادلة على $\cos^2 y$ نحصل على

$$\sec^2 y\frac{dy}{dx}+2x(\tan y)=x^3$$

بوضع $v=\tan y$ فإن $\sec^2 y\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$ وعليه فإن المعادلة تؤول إلى

$$\frac{dv}{dx}+2xv=x^3$$

ويكون عامل المكاملة $I.F=e^{\int 2x dx}=e^{x^2}$ ويكون حلها

$$v\,e^{x^2}=\int x^3 e^{x^2}dx+c$$

بوضع $x^2=t$ ، $2xdx=dt$ فيؤول التكامل إلى

$$ve^{x^2}=\frac{1}{2}\int te^t dt+c$$

وبالتكامل بالتجزيء

$$c=\frac{1}{2}[te^t-\int e^t dt]+c=\frac{1}{2}(te^t-e^t)+c$$

$$\tan y e^{x^2} = \frac{1}{2}(e^{x^2})(x^2-1)+c \qquad \Rightarrow \qquad \tan y = (1/2)(x^2-1)+ce^{-x^2}$$

مثال (٢) : حل المعادلة

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y}(e^x - e^y)$$

الحل : تكتب المعادلة على الصورة

$$\frac{dy}{dx} + e^x = e^{2x} e^{-y} \quad \text{أو} \quad \frac{dy}{dx} = e^{2x} e^{-y} - e^x$$

بالقسمة على e^{-y} نحصل على

$$e^y \frac{dy}{dx} + e^x e^y = e^{2x}$$

بوضع $v = e^y$ ، $\frac{dv}{dx} = e^y \frac{dy}{dx}$ وتؤول المعادلة إلى

$$\frac{dv}{dx} + e^x v = e^{2x}$$

ويكون عامل المكاملة

$$I.F = e^{\int P dx} = e^{\int e^x dx} = e^{e^x}$$

ويكون الحل هو

$$v e^{e^x} = \int e^{2x} e^{e^x} dx + c = \int e^x e^{e^x} e^x dx + c$$

بوضع $t = e^x$ فإن $\frac{dt}{dx} = e^x dx$ وعلى ذلك يكون لدينا

$$v e^{e^x} = \int t e^t dt + c = t e^t - \int 1 e^t + c$$

$$= t e^t - e^{+t} + c = e^t (t-1) + c$$

وبالتالى يكون الحل هو

$$e^{y}e^{e^{x}} = e^{e^{x}}(e^{x}-1)+c \quad \Rightarrow \quad e^{y} = e^{x}-1+ce^{-e^{x}}$$

مثال (٣) : حل المعادلة

$$\frac{dz}{dx}+\frac{z}{x}\ln z = \frac{z}{x^{2}}(\ln z)^{2}$$

الحل : بالقسمة على $z(\ln z)^{2}$ نحصل على

$$\frac{1}{z(\ln z)^{2}}\frac{dz}{dx}+\frac{1}{x}\frac{1}{(\ln z)} = \frac{1}{x^{2}}$$

بوضع $v = \dfrac{1}{\ln z}$ نجد أن $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{-1}{(\ln z)^{2}z}\dfrac{dz}{dx}$

وبالتالى فإن المعادلة تؤول إلى

$$-\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v = \frac{1}{x^{2}} \Rightarrow \frac{dv}{dx}-\frac{1}{x}v = -\frac{1}{x^{2}}$$

ويكون عامل التكامل $I.F = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = 1/x$ ويكون الحل هو

$$\frac{1}{x}v = \int \frac{-1}{x^{3}}dx = \frac{1}{2x^{2}}+c \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x(\ln z)} = \frac{1}{2x^{2}}+c$$

(ب) معادلة برنولى (Bernoulli's)

هى المعادلة التى على الصورة

$$\frac{dy}{dx}+Py = Qy^{n} \quad , \quad n \neq 1,0 \qquad (1)$$

حيث Q , P ثوابت أو دوال فى x فقط .

بالقسمة على y^{n} فنأخذ المعادلة (1) على الصورة

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+Py^{1-n}=Q \qquad (2)$$

بوضع $v=y^{1-n}$ ويكون $\frac{dv}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ أى أن

$$y^{-n}\frac{dy}{d}=\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}$$

وتأخذ المعادلة الصورة $\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}+Pv=Q$

أو $\frac{dv}{dx}+P(1-n)v=Q(1-n)$

ويكون عامل التكامل

$$I.F=e^{\int P(1-n)dx}=e^{(1-n)\int Pdx}$$

ويكون الحل هو

$$ve^{(1-n)\int Pdx}=\int Qe^{(1-n)\int Pdx}dx+c$$

$$y^{1-n}e^{(1-n)\int Pdx}=\int Qe^{(1-n)\int Pdx}dx+c$$

ملحوظة : يمكن تأخذ معادلة برنولى الصورة

$$\frac{dx}{dy}+P_1x=Q_1x^n$$

حيث P_1 ، Q_1 ثوابت أو فى y فقط ويمكن حل هذا النوع بنفس الطريقة السابقة

مثال (١) : حل المعادلة

$$x\frac{dy}{dy}+y=y^{2}\ln x$$

الحل : تكتب المعادلة على الصورة

$$y^{-2}\frac{dy}{dy}+\frac{1}{x}y^{-1}=\frac{1}{x}\ln x \qquad (1)$$

بوضع $v=y^{-1}$ فإن $\frac{dv}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}$ فإن المعادلة تؤول إلى

$$-\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=\frac{1}{x}\ln x \Rightarrow \frac{dv}{dx}-\frac{1}{x}v=-\frac{1}{x}\ln x$$

ويكون عامل التكامل $I.F$ لهذه المعادلة هو

$$I.F=e^{-\int \frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=1/x$$

وبالتالى يكون حل المعادلة الاصلية هو

$$vx^{-1}=\int -x^{-2}\ln x dx+c$$

أى

$$y^{-1}x^{-1}=-(\ln x)\frac{x^{-1}}{-1}-\int \frac{1}{x}.\frac{x^{-1}}{-1}dx+c$$

أى

$$\frac{1}{y}=(\ln x)+1+cx$$

مثال (٢) : حل

$$\frac{dy}{dx}-y\tan x=-y^{2}\sec x$$

أو

$$\cos x dy=(\sin x-y)y dx$$

الحل : بالقسمة على y^{2} فتحصل على

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}-\tan x y^{-1}=-\sec x$$

وبوضع $v = y^{-1}$ فنجد أن $\frac{dv}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$ وتؤول المعادلة إلى

$$-\frac{dv}{dx} - (\tan x)v = -\sec x \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} + (\tan x)v = \sec x$$

ويكون عامل المكاملة هو $e^{\int \tan x dx} = e^{\ln \sec x} = \sec x$

ويكون حل المعادلة المعطاه هو

$$v \sec x = \tan x + c \Rightarrow y^{-1} \sec x = \tan x + c$$

٢-١٠ - أمثلة متنوعة

مثال (١) : حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y - x}$$

الحل : بوضع $v^2 = y - x$ ومنها نجد أن $\frac{dy}{dx} = 1 + 2v\frac{dv}{dx}$ وتؤول المعادلة المعطاه إلى

$$1 + 2v\frac{dv}{dx} = v \Rightarrow \frac{dx}{dv} = 2v / (v - 1)$$

أى أن

$$dx = \left[\frac{2(v-1)+2}{v-1}\right]dv = \left(2 + \frac{2}{v-1}\right)dv$$

وبالتكامل نحصل على

$$x + c = 2v + 2\ln(v-1) = 2\sqrt{(y-x)} + 2\ln(\sqrt{y-x} - 1)$$

مثال (٢) : حل المعادلة

$$\frac{xdx + ydy}{xdy - ydx} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$$

الحل : باستخدام الاحداثيات القطبية

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, r^2 = x^2 + y^2, y/x = \tan\theta$$

من هذه العلاقات نجد أن

$$2xdx + 2ydy = 2rdr \quad \text{أو} \quad xdx + ydy = rdr$$

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = \sec^2\theta d\theta \Rightarrow xdy - ydx = r^2 d\theta$$

وبالتالى تؤول المعادلة إلى

$$\frac{rdr}{r^2 d\theta} = \left(\frac{a^2 - r^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow d\theta = \frac{dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

وبالتكامل نحصل على

$$\theta + c = \sin^{-1}(r/a) \quad \Rightarrow \quad r = a\sin(\theta + c)$$

أى

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a\sin(c + \tan^{-1} y/x)$$

مثال (٣) : حل المعادلة

$$(y^2 + x^2 - a^2 x)xdx + (y^2 + x^2 - b^2 y)ydy = 0$$

الحل : نكتب المعادلة على الصورة

$$(x^2 + y^2)(xdx + ydy) - a^2 x^2 dx - b^2 y^2 dy = 0$$

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2)(2xdx + 2ydy) - a^2 x^2 dx - b^2 y^2 dy = 0$$

بوضع $z^2 = x^2 + y^2$ فنحصل على

$$\frac{1}{2} zdz - a^2 x^2 dx - b^2 y^2 dy = 0$$

وبالتكامل

$$\frac{z^2}{4}-\frac{a^2x^3}{3}-\frac{b^2y^3}{3}=c/12 \Rightarrow 3z^2-4(a^2x^3+b^2y^3)=c$$

$$3(x^2+y^2)^2-4(a^2x^3+b^2y^3)=c$$

مثال (٤) : حل المعادلة

$$(a^2-2xy-y^2)dx=(x+y)^2dy$$

الحل : نكتب المعادلة على الصورة

$$[(a^2+x^2)-(x^2+2xy+y^2)]dx=(x+y)^2dy$$

أو

$$(a^2+x^2)dx=(x+y)^2(dx+dy)$$

(بوضع $x+y=z$ ، $(a^2+x^2)dy=z^2dz$ وبالتكامل

$$a^2x+\frac{x^3}{3}=\frac{z^3}{3}+\frac{c}{3}\Rightarrow 3a^2x+x^3=z^3+c$$

$$3a^2x+x^3=(x+y)^3+c \quad \Rightarrow \quad 3a^2x-3x^2y-4xy^2-y^3=c$$

مثال (٥) : اثبت أن المعادلة

$$(4x+3y+1)dx+(3x+2y+1)dy=0$$

تمثل عائلة قطوع مكافئة لها الخطان التقاربيين $x+y=0$ ، $2x+y+1=0$

الحل : لدينا المعادلة

$$(4x+3y+1)dx+(3x+2y+1)dy=0 \qquad (1)$$

بالمقارنة مع $Mdx+Ndy=0$ فنجد أن

$$M=4x+3y+1, \quad N=3x+2y+1$$

وكذلك $\partial M/\partial y=\partial M/\partial y=3$

وبذلك تكون المعادلة (1) تامة ويكون حلها هو

$$2x^2+3xy+x+y^2+y+c=0 \qquad (2)$$

وبمقارنة (2) مع المعادلة القياسية للقطوع المخروطية

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

فنجد أن $a=2, h=3/2, b=1, h^2-ab=\frac{9}{4}-2$ وهذا يثبت أن (2) تمثل معادلة قطع مكافىء وحيث أن معادلة القطع المكافى تختلف عن خطية التقاربيان بثابت وعلى ذلك فإن معادلة الخطين التقربيين للقطع المكافىء (2) يمكن أن تكون

$$2x^2+3xy+y^2+x+y+k=0 \qquad (3)$$

حيث k ثابت . وبمقارنة (3) بمعادلة الخطين المستقيمين

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

حيث $a=2, h=3/2, b=1, g=1/2, f=1/2, c=k$

والشرط لكى تمثل (3) خطين مستقيمين هو

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$$

أى

$$2k+2.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}-2.\frac{1}{4}-1.\frac{1}{4}-k-\frac{9}{4}=0$$

أى $k=0$. وبالتالى تكون معادلة الخطين التقربيين هو

$$2x^2+3xy+y^2+x+y=0$$

أو

$$(2x+y)(x+y)+(x+y)=0$$

أى

$$(x+y)(2x+y+1)=0$$

الذى يبين أن $x+y=0$ ، $2x+y+1=0$ هما الخطان التقاربيين .

تمارين

١- حل المعادلة التفاضلية التالية :

1) $(e^x+1)ydy=(y+1)e^x dx$ 2) $x\sqrt{1+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dx=0$

3) $(e^y+1)\cos x dx+e^y \sin x dy=0$ 4) $(x^2-yx^2)dy+(y^2+xy^2)dx=0$

5) $(1-x^2)(1-y)dx=xy(1+y)dy$ 6) $y-x\dfrac{dy}{dx}=3(1+x^2\dfrac{dy}{dx})$

7) $\sec^2 x\tan y dx+\sec^2 y\tan x dy=0$

8) $dy/dx=e^{x+y}, y(1)=1$ 9) $dy/dx=e^{x+y}+x^2e^{x^3+y}$

10) $3e^x\tan y dx+(1-e^x)\sec^2 y dy=0$

11) $(x+y)^2\dfrac{dy}{dx}=a^2$ 12) $\dfrac{dy}{dx}=\sin(x+y)+\cos(x+y)$

13) $(x+y)(dx-dy)=dx+dy$ 14) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x+6y+5}{2x+3y+4}$

15) $(x-y-2)dx-(2x-2y-3)dy=0$

16) $\sin^{-1}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=x+y$ 17) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+3}{2x-2y+5}$

٢- حل المعادلات التالية

1) $x\cos(y/x)(ydx+xdy)=y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)(xdy-ydx)$

2) $(2\sqrt{xy}-x)dy+ydx=0$ 3) $(x^2-y^2)dy=2xydx$

4) $y^2dx+(xy+x^2)dy=0$ 5) $x^2ydx-(x^3+y^3)dy=0$

6) $x(x-y)dy+y^2dx=0$ 7) $x^2dy+y(x+y)dy=0$

8) $(x^3-3xy^2)dx=(y^3-3x^2y)dy$

9) $(x^3-2y^3)dx+3xy^2dy=0$

10) $\frac{dy}{dx}=(xy^2-x^2y)/x^3$

11) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y+3}{2x+3y+4}$

12) $\frac{dy}{dx}=(y-x-1)/(y+x+5)$

13) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+2y-2}{3x+y-5}$

14) $(x+2y-2)dx+(2x-y+3)dy=0$

15) $(3y+7x+7)dx/dy-3x+3)dy=0$

٣- حل المعادلات

1) $(x+2y-2)dx+(2x-y+3)dy=0$

2) $(2ax+by)ydx=(ax+2by)xdy=0$

3) $(x^2-ay)dx=(ax-y^2)dy$

4) $dy/dx=(2x-y)/(x+2y-5)$

5) $(x^2+y^2+a^2)ydy+(x^2+y^2-a^2)xdx=0$

6) $(e^y+1)\cos x dx+e^y\sin x dy=0$

7) $x(x^2+3y^2)dx+y(y^2+3x^2)dy=0$

8) $(3x^2+6xy^2)dx-(x+y)^2dy=0$

9) $y\sin 2x dx-(1+y^2+\cos^2 x)dy=0$

10) $(x^2-4xy-2y^2)dx+(y^2-4xy-2x^2)dy=0$

٤- حل المعادلات التالية

1) $x^2ydx-(x^3+y^3)dy=0$ 2) $(x^4+y^4)dx-xy^3dy=0$

3) $y^2dx+(x^2-xy-y^2)dy=0$ 4) $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$

5) $(x^3-2xy^2)dx+(2xy^2-x^3)dy=0$

1- $e^ydx+(xe^y+2y)dy=0$ 2- $xdx+ydy+(x^2+y^2)dy$

3- $xdy-ydx=(x^2+y^2)dx$ 4- $ydx-xdy+\ln x=0$

5- $e^{2y}+2(xe^{2y}-y)dy=0$

6- $y(2x^2y+e^x)dx+(e^x+y^3)dy=0$

7- $(x^3e^x-my^2)dx+mxydy=0$

8- $xdy-ydx=xy^2dx\,,\ yx^2+2x=2cy$

9- $y+\cos y+b/(2\sqrt{x})dx+(x-x\sin y-1)dy=0,$

10- $xdx+ydy=m(xdy-ydx)$

(تنويه : ضع المعادلة على الصورة $d(x^2+y^2)=2mx^2d(y/x)$)

11- $(x^3y^3+x^2y^2+xy+1)ydx+(x^3y^3-x^2y^2-xy-1)xdy=0$

12- $y(1-xy)dx-x(1+xy)dy=0,$

13- $y(1+xy)dx+x(1-xy)dy=0,$

14- $(xy^2+2x^2y^3)dx+(x^2y-x^3y^2)dy=0$

15- $(x^4y^4+x^2y^2+xy)ydx+(x^4y^4-x^2y^2+xy)xdy=0$

16- $(x^2+y^2+2x)dx+2ydy=0$ 17- $(x^3-2y^2)dx+2xydy=0$

18- $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$ 19- $(x^2+y^2-1)dx-2xydy=0$

20- $(xy^2 - x^2)dx + (3x^2y^2 + x^2y - 2x^3 + y^2)dy = 0$

21- $(xy^3 + y)dx + 2(x^2y^2 + x + y^4)dy = 0$

22- $(y^4 - 2y)dx + (xy^3 + 2y^4 - 4x)dy = 0$

٥- حل المعادلات التفاضلية التالية

i) $\sin x\,(dy/dx) + 3y = \cos x$

ii) $x(1 - x^2)dy + (2x^2y - y - ax^2)dx = 0$

iii) $(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} + ye^{\tan^{-1}x}$

iv) $\dfrac{dy}{dx} + y\cot x = 2\cos x$

v) $\dfrac{dy}{dx} + y\tan x - \sec x = 0$

vi) $(1 + y^2) + (x - e^{\tan^{-1}y})\dfrac{dy}{dx} = 0$

vii) $\dfrac{dy}{dx} - y\tan x = e^x \sec x$

viii) $y\ln y\,dx + (x - \ln y)dy = 0$

ix) $(x + 3y + 2)\dfrac{dy}{dx} = 1$

x) $\sec x\,\dfrac{dy}{dx} = y + \sin x$

٦- حل المعادلات التفاضلية التالية

i) $\sin y\,\dfrac{dy}{dx} = \cos y\,(1 - \cos y)$

ii) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}\tan y = \dfrac{1}{x^2}\tan y\sin y$

iii) $\dfrac{dy}{dx} + 1 = e^{x-y}$

iv) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{\tan y}{1+x} = (1+x)e^x \sec y$

v) $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2y\,dy = 0$

vi) $\dfrac{dy}{dx} - 2y\tan x = y^2 \tan^2 x$

vii) $xy - \frac{dy}{dx} = y^3 e^{-x^2}$

vii) $\frac{dy}{dx} = x^3 y^3 - xy$

x) $\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$

xi) $x\frac{dy}{dx} + y = x^3 y^6$

٧- حل المعادلات

i) $(1 - x^2 y^2)dx = xdy$

ii) $\frac{dy}{dx} - x\tan(y - x) = 1$

٨- اثبت ان المعادلة

$$(12x + 7y + 1)dx + (2x + dy + 1)dy = 0$$

تمثل عائلة منحنيات لها خطان تقربيان $3x + 2y - 1 = 0$ ، $2x + y + 1 = 0$

٩- اثبت أن $1/(x + y + 1)^4$ هى عامل المكاملة للمعادلة

$$(2xy - y^2 - y)dx + (2xy - x^2 - x)dy = 0$$

ثم اوجد المعادلة $\left(xy + (x + y + 1)^2 = 0\right)$

الباب الثالث

تطبيقات على المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

Applications on linear first order differential equations

٣-١ مقدمة: قبل التعرض لهذه التطبيقات نسرد بعض المفاهيم الرياضية والهندسية حيث تستخدم هذه المفاهيم.

أ - النظام الديكارتى

(١) طول تحت العمود $= y\dfrac{dy}{dx}$ (٢) طول تحت المماس $= y\dfrac{dx}{dy}$

(٣) طول المماس $= \dfrac{y\sqrt{\{1+(dy/dx)^2\}}}{dy/dx} = y\left\{1+\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2\right\}^{1/2}$

(٤) طول العمود $= y\sqrt{1+(dy/dx)^2}$

وكل منها مقيمة عند النقطة (x_1, y_1)

(٥) معادلة العمود عند النقطة (x_1, y_1) هو

$$(y-y_1)(dy/dx)+(x-x_1)=0$$

(٦) معادلة المماس عند (x_1, y_1) هو

$$(x-x_1)(dy/dx)=(y-y_1)$$

(٧) طول العمود الساقط من (x_1, y_1) على المستقيم $ax+by+c=0$ هو

$$(ax_1+by_1+c)/\sqrt{a^2+b^2}$$

(٨) ψ هى الزاوية التى يصنعها الاتجاه الموجب لمماس المنحنى عند (x, y) مع المحور x

(٩) $dy/dx=\tan\psi$ = إنحدار (ميل) المماس للمنحنى المعطى.

(١٠) زاوية تقاطع منحنيين عند (x_1, y_1) هى $\tan^{-1}\dfrac{(m_1 - m_2)}{1 + m_1 m_2}$ حيث m_1 ، m_2 هى قيم dy/dx عند (x_1, y_1) للمنحنيين على الترتيب

(١١) العلاقة بين الاحداثيات القطبية والديكارتية

(i) $r^2 = x^2 + y^2, \tan\theta = y/x$, (ii) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

(١٢) نصف قطر الانحناء (التقوس) ρ يساوى

$[1 + (dy/dx)^2]^{3/2} / (d^2y/dx^2)$

حيث $1/\rho$ يمثل الانحناء.

ب- النظام القطبى

(١) r = طول متجه نصف القطر ، θ = الزاوية الاتجاهية

(٢) طول تحت المماس القطبى = $r^2 \dfrac{d\theta}{dr}$

(٣) طول تحت العمودى القطبى = $\dfrac{dr}{d\theta}$

(٤) ϕ = الزاوية بين المماس ومتجه نصف القطر (radius vector) عند اى نقطة (r, θ)

(٥) $\tan\phi = r(d\theta/dr)$

(٦) طول العمود الساقط من نقطة الأصل على المماس عند النقطة (r, θ) يساوى $\ell = r\sin\varphi$

(٧) زاوية تقاطع منحنيين عند (r, θ) هى $\tan^{-1}\left(\dfrac{n_1 - n_2}{1 + n_1 n_2}\right)$ حيث n_1 ، n_2 هى قيم $r\dfrac{d\theta}{dr}$ عند النقطة (r, θ) للمنحنيين على الترتيب.

ملحوظة: إذا كانت A تتناسب مع B فإن $A = KB$ وإذا كان A يتناسب مع $1/B$ فإن $AB = K$ ، K. ثابت وسوف نعطى أمثلة مستخدمين هذه المفاهيم.

مثال (١): اوجد معادلة المنحنى الذى طول تحت العمودى الديكارتى له يتناسب مع مربع معكوس احداثه السينى.

الحل: لدينا طول تحت المماس يتناسب مع $1/x^2$ وبالتالى يساوى $K(x^{-2})$ ، حيث K ثابت ، أو

$$\left(y\frac{dx}{dy}\right)x^2=K \qquad \Rightarrow \qquad x^2dx=K\ dy/y$$

وبالتكامل نحصل على $\frac{1}{3}x^3=K\ln y+c$. وهى معادلة المنحنى المطلوب أو يمكن كتابتها على الصورة $y=c_1e^{(x^3/3K)}$

مثال (٢): اوجد معادلة المنحنيات التى يصنع مماسها زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع القطع الزائد $xy=c$

الحل: الزاوية المطلوبة

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\left(\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right)$$

أو $\tan\frac{\pi}{4}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ حيث $m_1=dy/dx$ للعائلة المطلوبة عند (x,y)، m_2 قيمة dy/dx للمنحنى الثانى $xy=c$ وتساوى $-c/x^2$ (حيث $y=\frac{c}{x}$ تعطى $\frac{dy}{dx}=-c/x^2$). وبالتعويض نحصل على

$$1=\frac{\frac{dy}{dx}+\frac{c}{x^2}}{1-\frac{c}{x^2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)} \qquad \Rightarrow \qquad 1-\left(\frac{c}{x^2}\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dy}{dx}+\frac{c}{x^2}$$

أى

$$\left(1+\frac{c}{x^2}\right)\frac{dy}{dx}=1-\frac{c}{x^2} \ \Rightarrow\ dy=\frac{x^2-c}{x^2+c}dx$$

أو

$$dy = \left[\frac{x^2 + c - 2c}{x^2 + c}\right]dx = \left[1 - \frac{2c}{x^2 + c}\right]dx$$

وبالتكامل نجد أن

$$y = x - 2c(1/\sqrt{c})\tan^{-1}(x/\sqrt{c}) + c_1$$

أى

$$y = x - 2\sqrt{c}\tan^{-1}(x/\sqrt{c}) + c_1$$

حيث c_1 ثابت إختيارى.

مثال (٣): اثبت ان المنحنى الذى تكون فيه الزاوية بين المماس ومتجه نصف القطر عند أى نقطة تساوى نصف الزاوية الاتجاهية هو منحنى الكاردويد (Cardoid).

الحل: لدينا

$$\phi = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \tan\phi = \tan\frac{\theta}{2} \Rightarrow r\frac{d\theta}{dr} = \tan\frac{\theta}{2}$$

وبفصل المتغيرات نجد أن $\frac{dr}{r} = \cot\frac{\theta}{2}d\theta$

وبالتكامل نحصل $\ln r = 2\ln(\sin\frac{\theta}{2}) + \ln c$ أى أن

$$r = c\sin^2(\theta/2) \Rightarrow r = (c/2)(1 - \cos\theta)$$
$$r = c'(1 - \cos\theta), \quad c' = c/2$$

وهذه المعادلة تمثل منحنى الكاردويد (المنحنى القلبى).

مثال (٤): اوجد المنحنى الذى له مجموع مقلوبى متجه نصف القطر وتحت المماس القطبى يكون ثابتا

الحل: مقلوب تحت المماس القطبى هو $\left(r^2\frac{d\theta}{dr}\right)^{-1} = \frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$

لدينا

$$\therefore \frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}=K \quad \Rightarrow \quad d\theta=\frac{dr}{r(Kr-1)}$$

، K ثابت

$$\Rightarrow \qquad d\theta=\left(\frac{K}{Kr-1}-\frac{1}{r}\right)dr$$

وبالتكامل

$$\theta+c=\ln\left[(Kr-1)/r\right]$$

أى

$$Kr-1=re^{c+\theta} \Rightarrow Kr-1=c_1re^{\theta} \ , \quad c_1=e^{c}$$

وهو المطلوب

٣-٢ المعادلة اللوجستيه Logistic equation

ليكن $x(t)$ كثافة التعداد (Population) عند الزمن t وأيضا ليكن b و d معدلى الميلاد والوفاة أى أن b و d هما عددى المواليد والوفيات

(per individual) لوحدة الزمن. فيكون لدينا المعادلة (معادلة مالثيوس (Malthus

$$\frac{dx}{dt}=bx-dx=(b-d)x=ax \tag{1}$$

حيث b، d، a ثوابت. وبالتكامل نحصل على

$$x(t)=x(0)e^{at} \tag{2}$$

وبالتالى يزداد التعداد اسياً إذا كان $a>0$ ويقل أسياً إذا كان $a<0$ ويبقى ثابتا إذا كانت $a=0$.

وعموما ليكن b دالة مطردة التناقص فى x، d دالة مطردة التزايد فى x وبالتالى تكون a دالة مطردة التناقص فى x ، أى أن

$$\frac{dx}{dt}=x[b(x)-d(x)]=xa(x) \qquad (3)$$

حيث

$$b'(x)<0, \quad d'(x)>0, \quad a(x)<0$$

وينتج لدينا الحالات الخاصة عندما

$$b(x)=b_1-b_2x, \quad d(x)=d_1+d_2x, \quad b(x)-d(x)=a-cx$$

وبالتالي

$$a=b_1-d_1, \quad c=b_2+d_2 \qquad (4)$$

حيث $b_1,b_2,d_1,d_2,a>0$.

سوف نفترض

$$x \le b_1/b_2 \qquad (5)$$

أما إذا كان $x>b_1/b_2$ نأخذ معدل المواليد مساوياً للصفر. ومن (3)، (4) نحصل على

$$\frac{dx}{dt}=x(a-cx) \Rightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{c}{a-cx}\right)dx=adt \qquad (6)$$

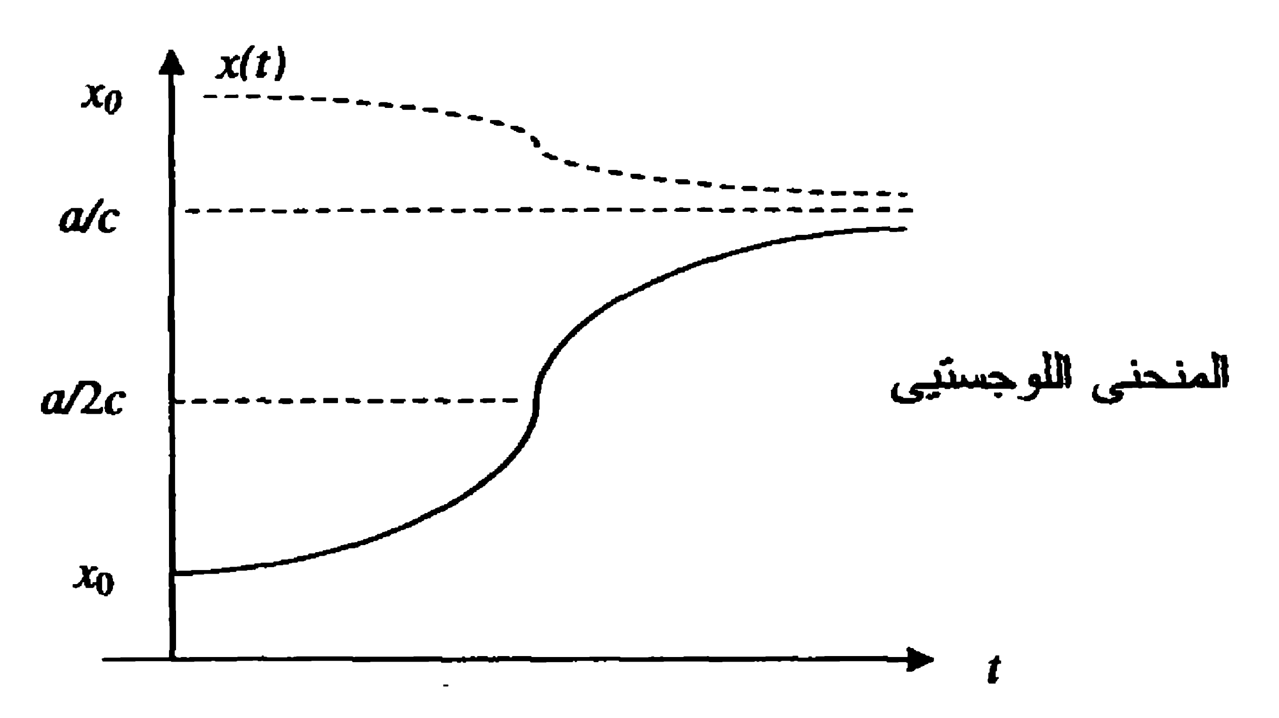
بالتكامل نحصل على

$$\ln\frac{x(t)}{a-cx(t)}=at+\ln\frac{x(0)}{a-cx(0)} \qquad (7)$$

$$\Rightarrow x(t)=\frac{a/c}{1+\left(\frac{a/c}{x(0)}-1\right)e^{-at}}$$

وبالتالي عندما $t\to\infty$ فإن $x(t)\to a/c$.

إذا كان $x(0) < a/c$ فإن $\frac{dx}{dt}$ تكون دائما موجبة وان $x(t)$ تزداد إلى حجم التعداد a/c وإذا كان $x(0) > a/c$ فإن $\frac{dx}{dt}$ تكون دائماً سالبة وأن $x(t)$ تتناقص إلى a/c كما فى الشكل



ويكون حجم التعداد النهائى فى أى حالة هو a/c،

حيث

$$\frac{a}{c} = \frac{b_1 - d_1}{b_2 + d_2} < \frac{b_1}{b_2} \qquad (9)$$

عند $x(0) < a/c$ فإن الشرط (5) يتحقق دائماً ويبقى دائماً معدل المواليد موجباً. وبالتالى سوف نفترض أن $x(0) < a/c$.

باشتقاق (6) نحصل على

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a - 2cx = 2c\left(\frac{a}{2c} - x\right) \qquad (10)$$

إذا كان $x(0) < \frac{a}{2c}$ فإن $\frac{dx}{dt}$ تزداد عندما تتغير x من $x(0)$ إلى $\frac{a}{2c}$ وتتناقص عندما تتغير x من $\frac{a}{2c}$ إلى $\frac{a}{c}$. $\frac{dx}{dt}$ تتغير من دالة تزادية إلى

دالة تناقصية عند $x = \frac{a}{2c}$، $\frac{d^2x}{dt^2}$ تتلاشى عندما $x = \frac{a}{2c}$. وبالتالي توجد نقطة انقلاب في منحنى نمو التعداد (population growth) عندما يصل إلى نصف حجم التعداد النهائي.

من (8) نجد أن نقطة الانقلاب تحدث عند الزمن

$$t_1 = \frac{1}{a}(\ln\left(\frac{a/c}{x(0)} - 1\right) \qquad (11)$$

إذا كان $x(0) > \frac{a}{2c}$ فإنه لاتوجد نقطة انقلاب.

ملحوظة: أبسط صورة للمعادلة اللوجستية هي

$$\frac{dx}{dt} = Kx$$

ويحدد الثابت K من شروط المسألة.

مثال (١): إذا كان تعداد السكان يتضاعف خلال ٥٠ سنة. فمتى يكون تعداد السكان ثلاثة اضعاف ، تحت الافتراض أن معدل النمو يتناسب مع تعداد السكان

الحل: ليكن عدد السكان x عند الزمن t و x_0 هو عدد السكان عند $t = 0$. وبالتالي فإن

$$\frac{dx}{dt} \alpha x \Rightarrow \frac{dx}{dt} = Kx \qquad (1)$$

حيث K ثابت التناسب. من (1) نحصل على

$$\frac{dx}{dt} = Kx \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int Kdt \Rightarrow \ln x - \ln c = Kt$$

$$\ln(x/c) = Kt \Rightarrow x = ce^{Kt}$$

من الافتراض عند $t = 0$ فإن $x = x_0$ وبالتالي $x = 2x_0$ عند $t = 50$ وعلى ذلك فإن

$$2x_0 = x_0 e^{50K} \Rightarrow 50K = \ln 2 \Rightarrow K = (\ln 2)/50$$

لنفترض العدد يتضاعف ثلاث مرات عند الزمن t_1 فيكون

$$3x_0 = x_0 e^{Kt_1} \Rightarrow Kt_1 = \ln 3 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{K}\ln 3 = 50\frac{\ln 3}{\ln 2}$$

وبالتالى فإن t_1 بالسنوات يعطى من

$$t_1 = 50\frac{.47712}{.30103} = 78.25$$

مثال (٢): عدد البكتريا فى مجتمع خميرة (yeast) تنمو بمعدل يتناسب مع العدد الموجود فى نفس اللحظة. إذا كان عدد سكان هذه المستعمرة من الخمائر يتضاعف ٣ مرات فى ساعه واحدة. أوجد عدد البكتريا التى تكون موجودة بعد 5 ساعات.

الحل: نفترض أن عدد البكتريا الموجودة هى x_0 عند الزمن $t = 0$ ويكون عددها x عند الزمن t (ساعة). وعلى ذلك فإن

$$\frac{dx}{dt}\alpha x \Rightarrow \frac{dx}{dt} = Kx \Rightarrow x = ce^{Kt} \tag{1}$$

(بفصل المتغيرات). ومن الافتراض عند $t = 0$ ، فإن $x = x_0$ أى أن من (1) $x_0 = c$ وعلى ذلك فإن

$$x = x_0 e^{Kt} \tag{2}$$

عند $t = 1$ فإن $x = 3x_0$ وعليه من (2) نحصل على

$$3x_0 = x_0 e^{K} \Rightarrow e^{K} = 3 \tag{3}$$

لنفترض أن $x = x_1$ عند $t = 5$ فإننا نحصل عاى

$$x_1 = x_0 e^{5K} = x_0 (e^{K})^5 = x_0 3^5$$

وعلى ذلك نتوقع أن البكتريا ستزداد 3^5 مرة فى نهاية 5 ساعات.

٣-٣ تطبيقات فيزيائية

مثال (١): طبقا لقانون نيوتن للتبريد، المعدل التى تبرد فيه المادة فى هواء متحرك يتناسب مع الفرق بين درجات حرارة المادة وحرارة الهواء. إذا كانت حرارة الهواء $290\ K^o$ وان المادة تبرد من $370\ K^o$ إلى $330\ K^o$ فى 10 دقائق. أوجد متى تكون حرارة المادة $295\ K^o$.

الحل: لتكن درجة حرارة مادة ما هى T عند الزمن t (بالدقائق). فإنه من الافتراض وبتطبيق قانون نيوتن للتبريد نجد أن

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda(T-290) \Rightarrow \frac{dT}{T-290} = -\lambda dt \qquad (1)$$

حيث λ ثابت التناسب. وبتكامل (1) بين $t=0$، $T=370$ وبين $t=10$، $T=330$ يكون لدينا

$$\int_{370}^{330} \frac{dT}{T-290} = -\lambda \int_0^{10} dt \Rightarrow \lambda = \frac{1}{10}\ln(2) \qquad (2)$$

بافتراض أنه عند $t=t_1$ تصبح $T=295$ فبتكامل (1) نحصل على

$$\int_{370}^{295} \frac{dT}{T-290} = -\lambda \int_0^{t_1} dt \Rightarrow -\lambda t_1 = \ln 5 - \ln 80 \Rightarrow$$

$$\lambda t_1 = \ln 16 \Rightarrow \lambda t_1 = 4\ln 2 \Rightarrow \frac{1}{10}(\ln 2)t_1 = 4\ln 2$$

$$\Rightarrow t_1 = 40 \quad \text{minutes}$$

مثال (٢): يتحرك راكب دراجة بمعدل $4m/\sec$. أوقف البدال لتقف الدراجة بعجلة تناقصية (retardation of the cycle) ناتجه عن قوتين، الاولى $(0.08)m/\sec^2$ ناتجه من قوة احتكاك أجزاء الدراجة والأخرى نتيجة المقاومة $(0.02\,v^2)m/\sec^2$ حيث v هى السرعة بالمتر فى الثانية. كم من المسافة يقطعها راكب الدراجة قبل أن يقف $(\ln 5 = 1.6)$.

الحل: لنفترض ان الجسم يتحرك من النقطة O (يتحرك على المحور OX) ويصل إلى سرعة v عند النقطة P فى الزمن t بحيث أن $OP = x$. لتكن عجلة الجسيم المتحرك عند P هى a. وعلى ذلك

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = v\frac{dv}{dx} \qquad (1)$$

من الافتراض مقدار العجلة التقصيرية تساوى

$$0.08 + 0.02v^2 = 0.02(4 + v^2)$$

$$\Rightarrow v\frac{dv}{dx} = -0.02(4 + v^2) \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{1}{0.02}\frac{v\,dv}{(4 + v^2)} \qquad (2)$$

وبتكامل (2) بين $x = 0$، $v = 4m/s$، حتى $x = x_1$، $v = 0$ يكون لدينا

$$\int_0^{x_1} dx = -\frac{1}{0.04}\int_4^0 \frac{2v\,dv}{4 + v^2}$$

$$x_1 = \frac{-1}{0.04}\left[\ln\left(4 + v^2\right)\right]_4^0 = \frac{-1}{0.04}[\ln 4 - \ln 20]$$

$$= \frac{\ln 5}{0.04} = \frac{1.61}{0.04} = 40\frac{1}{4} \ \text{meters}$$

٣-٤ تطبيقات ميكانيكية:

تسمى دراسة القوى والحركة الناتجة عنها بالكيناتيكا (kinetics) التى وضع اسحاق نيوتن القوانين الأساسية واهمها قانون نيوتن الثانى الذى ينص على: القوى المحصلة المؤثرة على جسم كتلته m تساوى المعدل الزمنى لتغير كمية الحركة وفى حالة الكتلة الثابتة أى

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt} = ma \qquad (1)$$

حيث F هى القوى المحصلة المؤثرة على الجسم، v هى سرعته، (mv) كمية الحركة، a عجلة الجسم. إذا كانت الجاذبية الارضية المؤثرة على الجسم هى g ، فالقوى المؤثرة على الجسم هى قوة الجاذبية الارضية وتساوى mg،أى

$$ma = -mg \tag{2}$$

ومقاومة الهواء وتعطى بالمقدار $-kv$ (لأن مقاومة الهواء تتناسب مع سرعة الجسم) $k \geq 0$ هو ثابت التناسب ويسمى بمعامل لحتكاك الهواء والذى يسمى بالاحتكاك اللزج (viscous frction) وتكون اشارته عكس اتجاه الحركة.

وبالتالى تكون القوى المحصلة المؤثرة على جسم ساقط هى $F = mg - kv$ وعلى ذلك يكون لدينا

$$ma + kv = m\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \tag{3}$$

كمعادلة لحركة الجسم.

إذا اهملنا مقاومة الهواء أو كانت غير موجودة فإن $k = 0$ وبذلك تؤول المعادلة (3) إلى

$$\frac{dv}{dt} = g \tag{4}$$

وتعرف السرعة النهائية v_t عندما $k > 0$ بالمعادلة

$$v_t = mg / k \tag{5}$$

ملحوظة هامة: المعادلات (3) ، (4) ، (5) متحققة فقط إذا تحققت الشروط المعطاه. ولا تتحقق هذه المعادلات إذا كانت (مثلا) مقاومة الهواء لاتتناسب مع السرعة ولكن مع مربع السرعة أو إذا أخذ الاتجاه الرأسى إلى أعلى هو الاتجاه الموجب.

مثال (١): اسقطت كتلة من السكون من ارتفاع 15 مترا أعلى مستوى الأرض وبأهمال احتكاك الهواء فمتى تصل الكتلة إلى الأرض وماهى سرعتها.

الحل: نفترض أن الكتلة اسقطت عند الزمن $t = 0$ وإذا كان الارتفاع أعلى مستوى الارض فإن $v = \frac{dy}{dt}$ هى سرعة الكتلة وطبقا للقاون (2) فإن

$$m\frac{dv}{dt} = -gm, \quad v(0) = 0, \quad g = 9.8, \quad y(0) = 15$$

وبحل المعادلة $\frac{dv}{dt}=v=-gt$ نحصل على

$$y(t)=15-\frac{gt^2}{2}$$

تصل الكتلة إلى الارض عندما $y = 0$ أى عند $t_1=\sqrt{\frac{30}{g}}\cong 1.75 \sec$ وتكون سرعتها $v(t)=-g\sqrt{\frac{30}{g}}\cong 17.1\, m/\sec$

ملحوظة: إذا حسبنا احتكاك الهواء فإنه يولد قوى على الكتلة يتناسب فى سرعة الكتلة ويكون اتجاهها عكس اتجاه الحركة ومن المعادلة (1) يكون لدينا

$$m\frac{dv}{dt}=-gm-kv \qquad (3)$$

حيث k ثابت موجب يسمى بمعامل احتكاك الهواء. وهذا النوع من الاحتكاك يسمى الاحتكاك اللزج.

مثال (٢): اسقطت كتلة $2-\text{slug}$ من طائرة بسرعة ابتدائية تساوى الصفر إلى اسفل. أوجد $v(t)$, عندما يكون معامل احتكاك الهواء $k=0.1$

.Pound per foot per second

الحل: فى المعادلة (3) $m=2$ ، $g=32.2$ ، $k=0.1$ ويكون لدينا

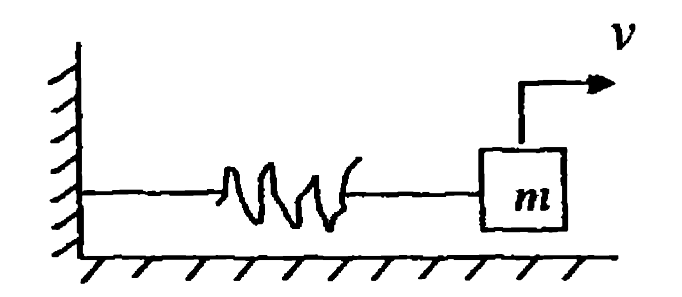
$$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=-g\ ,\ v(0)=0 \ \Rightarrow\ \frac{dv}{dt}+0.05v=-32.2\ ,\quad v(0)=0$$

ويكون حلها هو

$$v(t)=-0.644(e^{-0.05t}-1)$$

ملحوظة: المقدار $e^{-0.05t}$ يتناقص بزيادة t ويؤول إلى الصفر عندما $t\to\infty$ وبالتالى لقيم t الكبيرة يكون $v(t)\cong .664$. وهذا الثابت يسمى بالسرعة النهائية

للجسم (terminal velocity)



الحركة التوافقية

نعتبر ان نظام كتلة مرتبط بزنبرك. كما فى الشكل

لتكن y هى الازاحه الافقية للكتلة m مقاسة من وضع السكون ويكون الاتجاه الموجب إلى اليمين. فإذا انضغط (إنكمش) أو استطال الزنبرك ينتج عن ذلك قوة ارتداد (restoring) على الكتلة ونفترض أن الزنبرك يحقق قانون هوك أى

تكون قوة استرداد الزنبرك F مساوية ومضادة للقوى المؤثرة على الزنبرك وتتناسب مع الاستطالة (الانكماش) ℓ للزنبرك كنتيجة للقوة المؤثرة أى أن $F=-Ky$، حيث K هو ثابت التناسب ويسمى عادة بثابت الزنبرك أو معامل الصلابة (stiffness) وإذا أهملنا قوى الاحتكاك فإنه طبقاً لقانون نيوتن الثانى يكون لدينا

$$Ma=-Ky \tag{5}$$

وعلى ذلك يمكن ان نكتب $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}=v\frac{dv}{dy}$

$$M\frac{dv}{dt}=-Ky \quad \text{أو} \quad Mv\frac{dv}{dy}=-Ky \tag{6}$$

والتى تكافئ معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية

$$M\frac{d^2y}{dt^2}=-Ky \tag{7}$$

ولتحديد حل وحيد للمعادلة (6) أو (7) يجب معرفة الوضع الابتدائى y_0 والسرعة v_0.

ولحل المعادلة (6) نستبدل المتغير t بالمتغير y وبالتالى

$$M\frac{dv}{dy}=\left(M\frac{dv}{dt}\right)\frac{dt}{dy}=-(Ky)\frac{1}{v}$$

$$M\frac{dv}{dy}=-K\frac{y}{v}$$

وهذه المعادلة تحل بفصل المتغيرات فنحصل على

$$M\frac{v^2}{2}+K\frac{y^2}{2}=c\ , \qquad (8)$$

من الواضح أن $c\geq 0$. ولاحظ أن $\frac{Mv^2}{2}$ هى طاقة الحركة (kinetic energy) للكتلة عندما تكون سرعتها v، $\frac{Ky^2}{2}$ هى طاقة الوضع (potential energy) المختزنة فى الزنبرك عند إزاحته بمقدار y عن وضع السكون. وتنص العلاقة (8) على أن أى حل للمعادلة (6) أو (7) تكون الطاقة الكلية للنظام ثابتة.

إذا كان $c=0$ فإن $y=v=0$ وتكون y فى وضع الاتزان

إذا كان $c>0$ فإننا يمكن أن نكتب (8) على الصورة

$$\frac{dy}{dt}=+\sqrt{\frac{2c}{M}-\frac{Ky^2}{M}} \quad \text{او} \quad \frac{dy}{dt}=-\sqrt{\frac{2c}{M}-\frac{Ky^2}{M}}$$

وبحل احد المعادلتين نحصل على

$$y=\pm\sqrt{\frac{2c}{K}}\sin\left(\sqrt{\frac{K}{M}}t+d\right) \qquad (9)$$

وحيث أن $\pm\sqrt{c}$، d ثوابت. فإننا نرى من (9) أن حلول المعادلة (6) تتذبذب حول وضع السكون وحيث أن دالة الجيب دالة دورية لها الدورة 2π.

فإن هذه التذبذبات تكون دورية ولها الدورة T حيث $T\sqrt{\frac{K}{M}}=2\pi$ أى

$$T=2\pi\sqrt{M/K}$$

مثال (٣): كما فى الشكل السابق ليكن $M=2Kg$، $K=3\ \text{Newton}/m$. إذا استطال الزنبرك $20cm$ من السكون إلى اليمين ثم ترك. اوجد الحركة الناتجة.

الحل: علينا حل المعادلة

$$\frac{dy}{dt}=v \ , \ 2\frac{dv}{dt}=-3y \ , \ y(0)=0.2, v(0)=0$$

ومن $2\left(\frac{dv}{dy}\right)=\frac{-3y}{v}$ نجد أن $v^2+\frac{3}{2}y^2=c$

وبالتالى

$$\frac{dy}{dt}=\pm\sqrt{c-\frac{3}{2}y^2}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\left(\frac{2c}{3}-y^2\right)}$$

وبفصل المتغيرات نحصل على

$$y=\pm\sqrt{\frac{2c}{3}}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,t+d\right)=c_1\sin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,t+d\right)$$

حيث $c_1=\pm\sqrt{\frac{2c}{3}}$ ثابت اختيارى. وحيث أن $y(0)=0.2$, $y'(0)=0$ فإن

$$y(0)=c_1\sin d=0.2 \ , \ y'(0)=c_1\sqrt{\frac{3}{2}}\cos d=0$$

وعلى ذلك نحتاج إلى $\cos d=0$ أو $d=\frac{\pi}{2}+n\pi$، n عدد صحيح وللسهولة نأخذ $n=0$، $d=\frac{\pi}{2}$ وكذلك نحتاج

$$c_1\sin d=c_1\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.2\Rightarrow c_1=0.2$$

ويكون الحل هو

$$y(t)=0.2\sin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}t+\frac{\pi}{2}\right)$$

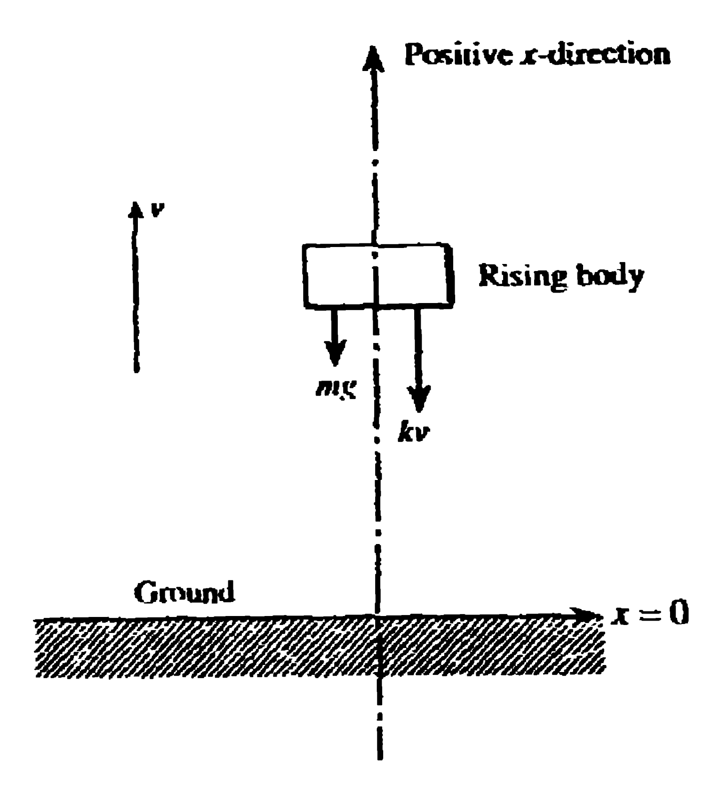
ومثال ذلك نرى أن الحل y ينبذب بين $(-0.2, + 0.2)$ بطريقة دورية.
ودورة هذا الحل هى $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \cong 5.13$

مثال (٤): قذف جسم كتلته m رأسياً إلى أعلى فى الهواء بسرعة ابتدائية v_0 فإذا كان الجسم يواجه مقاومة الهواء التى تتناسب مع سرعته. أوجد

(أ) معادلة الحركة فى نظام الاحداثيات كما فى الشكل

(ب) تعبيرا عن سرعة الجسم عند أى لحظة t

(جـ) الزمن الذى يصل فيه لاقصى ارتفاع



الحل: (أ) نظام الاحداثيات هذا يمكن أن تكون المعادلة (4) معادلة الحركة. ولاشتقاق المعادلة المناسبة نلاحظ وجود قوتين قوة الجاذبية وتعطى بالمقدار mg، قوة مقاومة الهواء وتعطى بالقيمة Kv والتى تقلل السرعة. وحيث أن كلا القوتين تؤثر رأسياً إلى أسفل (فى الاتجاه السالب) فإن القوة المحصلة على الجسم هى $-mg - Kv$ وباستخدام المعادلة (3) وترتيب الحدود فيها نحصل على

$$\frac{dv}{dt}+\frac{K}{m}v=-g \qquad (1)$$

كمعادلة للحركة.

(ب) المعادلة (1) معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ويكون حلها هو $v = ce^{-(K/m)t} - (mg/K)$. وعندما تكون $t = 0$ يكون $v = v_0$ وبالتالى فإن $c = v_0 + \frac{mg}{K}$ وعلى ذلك تكون سرعة الجسم عند أى لحظة t هى

$$v = \left(v_0 + \frac{mg}{K}\right)e^{\frac{-K}{m}t} - \frac{mg}{K}$$

(جـ) ويصل الجسم لاقصى ارتفاع عندما $v = 0$. وعلى ذلك بوضع $v = 0$ فى المعادلة الاخيرة نحصل على

$$t = \frac{m}{K}\ln\left(1 + \frac{v_0 K}{mg}\right)$$

٣-٥ تركيز السوائل (تحليل الاوعية) Compartment Analysis

يمكن تقسيم العملية الفيزيائية أو البيولوجية إلى عدة مراحل مختلفة. ويمكن وصف العملية الكلية بالتفاعلات بين المراحل المختلفة. وتسمى كل مرحلة غرفة أو بركه (pool) أو مستودع أو وعاء. وان محتويات كل وعاء يفترض أنها مزجت (خلطت) جيداً. وتنقل المادة من وعاء إلى أخر فينضم الحالى إلى اللاحق ولذلك سميت العملية الكلية بنظام الاوعية. والنظام المفتوح (open) هو الذى فيه مدخلات إلى أو مخرجات من النظام خلال غرفه أو أكثر. والنظام غير المفتوح يقال أنه مغلق (closed) وفى هذا البند سندرس أبسط هذه النظم، نظام الوعاء الواحد.

كما سنتعرض لدراسة النظم فى اكثر من وعاء فى أبواب تالية.

فى الشكل المقابل نظام وعاء واحد. يتكون من كمية من المادة $x(t)$ فى الوعاء

$i(t)$ → [$x(t)$] → K

ومعدل الادخال $i(t)$ الذى تدخل فيه المادة النظام، معامل الانتقال الجزئى (fractional transfer) K يبين جزئ المادة فى الوعاء التى استخدمت (حولت) من النظام فى وحدة الزمن. ومن الواضح أن المعدل الذى تتغير فيه الكمية $x(t)$ يعتمد على الفرق بين الادخال والاخراج عند أى زمن t الذى يؤدى إلى المعادلة التفاضلية

$$\frac{dx}{dt} = i(t) - Kx(t) \qquad (1)$$

وهى معادلة خطية ولها الحل

$$x(t) = e^{-Kt}[\int i(t)e^{Kt}dt + c]$$

مثال (١): مستودع يحتوى على 100 جالون من الماء مذاب فيه 50 رطل من الملح. نفترض انه ينساب فيه جالونان من محلول مشبع بالملح كل منهما يحتوى رطل واحد من ملح ذائب يدخلان إلى المستودع كل دقيقة ويتم مزجهما، ويخرج المخلوط الممتزج جيدا من المستودع بمعدل ٢ جالون / دقيقة. اوجد كمية الملح فى المستودع عند أى لحظة.

الحل: ليكن x هى عدد ارطال الملح عند نهاية t دقيقة وحيث أن كل جالون من الملح المشبع يدخل الوعاء (المستودع) يحتوى على رطل واحد من الملح، وتعرف أن $i(t) = 2$. ومن الناحية الأخرى $K = \frac{2}{100}$ حيث جالونان من 100 جالون فى المستودع يتم خروجهما كل دقيقة. فإن المعادلة (1) تصبح

$$\frac{dx}{dt} = 2 - \frac{2}{100}x$$

والتى حلها

$$x(t) = e^{-\frac{t}{50}}[2\int e^{t/50}dt + c] = 100 + ce^{-\frac{t}{50}}$$

عند $t = 0$ يكون لدينا

$$50 = x(0) = 100 + c \quad \Rightarrow \quad c = -50$$

وبالتالى

$$x(t) = 100 - 50e^{-t/50}$$

لاحظ أن x تزداد وتقترب من نسبة الملح إلى الماء فى مجرى المدخل بزيادة الزمن.

ملحوظة: معامل الانتقال الجزئى K يمكن أن يكون دالة فى الزمن كما فى المثال التالى

مثال (٢): كما فى المثال السابق ينساب ٣ جالون من الماء المشبع كل منهم يحتوى على رطل واحد من الملح تدخل المستودع فى كل دقيقة وباقى المعطيات كما هى. اوجد كمية الملح فى المستودع فى أى زمن t.

الحل: لدينا $i = 3$ ولكن حيث ان كمية الملح المشبع فى الخزان تزداد مع الزمن، فيكون معامل الانتقال الجزئى هو $K = \dfrac{2}{100+t}$.

وبسط K هو عدد الجالونات التى خرجت من المستودع، ومقام K هو $100+t$ هى عدد الجالونات عند الزمن t وتكون المعادلة التى تصف ذلك هى

$$\frac{dx}{dt} = 3 - \frac{2x}{100+t} \qquad (4)$$

والذى يكون حلها هو

$$x(t) = e^{+2\int \frac{dt}{100+t}} \left[3\int e^{-2\int \frac{dt}{100+t}} dt \right] = (100+t) + c(100+t)^{-2}$$

بوضع $t = 0$ فتكون $c = -50(100)^2$ وبالتالى

$$x(t) = 100 + t - 50\left(1 + \frac{t}{100}\right)^{-2}$$

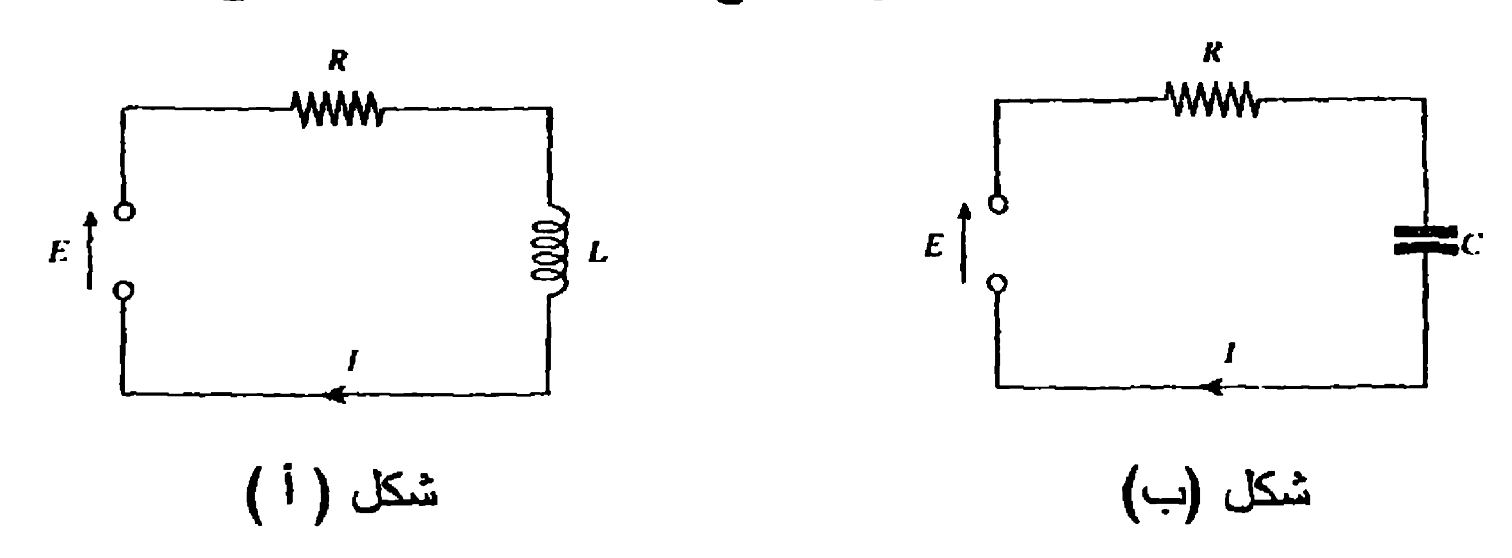
وبعد 100 دقيقة يكون

$$x(100) = 200 - \frac{50}{4} = 187.5$$

رطل من الملح فى الوعاء.

٣-٦ الدوائر الكهربية البسيطة

سنعتبر فى هذا البند دوائر كهربية بسيطة تحتوى مقاومة (Resistor) ملف (inductor) أو مكثف (capacitor) مع قوة دافعة كهربية. كما فى الشكل



شكل (أ)　　　　　　شكل (ب)

١- **القوة الدافعة الكهربية** وتقاس بمقياس (Volt) وعادة تكون بطارية أو مولد يولد شحنة كهربية Q (Couloms) وينتج تيار I (Amperes)

$$I = dQ/dt \tag{1}$$

٢- **مقاوم** R وتقاس مقاومته بمقياس (Ohms) هو جزء من الدائرة يضاد التيار ويبدد الطاقة فى شكل حرارة وينتج عنه فرق فى الجهد (voltage) ويعطى بقانون اوم

$$E_R = RI \tag{2}$$

٣- **ملف الحث** (inductor of induction) L وتقاس حثه بمقياس (Henries) يضاد اى تغير فى التيار بانتاج فرق الجهد

$$E_L = L\frac{dI}{dt} \tag{3}$$

٤- **مكثف** (capacitor تقاس سعته بمقياس (Farad's) يخزن الشحنة ويقاوم سريان الشحنة ويسبب فرق فى الجهد

$$E_C = \frac{Q}{C} \tag{4}$$

والكميات R ، L ، C عادة ما تكون ثوابت مرتبطة بمركبات الدائرة ، E يمكن أن تكون ثابتاً أو دالة فى الزمن.

والمبدأ الاساسي في الدوائر الكهربية هو قانون كيرشوف **Kirchoff's**

المجموع الجبرى لفروق الجهد حول دائرة بسيطة مغلقة يساوى الصفر.

في الدائرة (شكل (أ)) المقاوم والملف يسببان فروق الجهد لكل من E_R، E_L على الترتيب. وقوة الدفع الكهربية التى تمد القوى الكهربية E (أى يكون فرق الجهد الكهربية الذى له $E-$)

ومن قانون كرشوف للقوى الكهربية

$$E_R + E_L - E = 0$$

ومن (2)، (3) نجد أن

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E \qquad (5)$$

وهى معادلة خطية وتحل كما سبق والأمثلة توضح ذلك.

مثال (١): ملف حثه 2 Heneries ومقاومة 10 Ohm ، وصلا على التوالى مع قوة دافعة كهربية 100 Volts. إذا كان التيار I يساوى الصفر عندما $t=0$، اوجد التيار I بنهاية 0.1 sec.

الحل: حيث $L=2$ ، $R=10$، $E=100$ فمن المعادلة (5) يكون لدينا

$$2\frac{dI}{dt} + 10I = 100\,,\ \ I(0)=0 \qquad (6)$$

وتكون المعادلة خطية لها e^{5t} عامل التكامل أى

$$\frac{d}{dt}(e^{5t}I) = e^{5t}\left(\frac{dI}{dt} + 5I\right) = 50e^{5t} \qquad (7)$$

فيكون الحل هو

$$e^{5t}I(t) = 10e^{5t} + c \ \ \Rightarrow \ \ I(t) = 10 + ce^{-5t} \qquad (8)$$

بوضع $t=0$ فى (8) واستخدام الشرط الابتدائى $I(0)=0$ نحصل على الحل فى الصورة

$$I(t)=10(1-e^{-5t})$$

وبالتالى عندما $t=0.1$ يكون لدينا

$$I(0.1)=10(1-e^{-0.5})=3.93 \text{ amp}$$

مثال (٢): ليكن $E=100\sin(60t)$ ولكن باقى القيم الاخرى فى المثال السابق تبقى كما هى فانه من المعادلة (5) نحصل على

$$2\frac{dI}{dt}+10I=100\sin 60t, \quad I(0)=0 \qquad (9)$$

ويكون حل هذه المعادلة على الصورة

$$I(t)=\frac{2\sin 60t-24\cos 60t}{29}+ce^{-5t}$$

بوضع $t=0$ نحصل على $c=\frac{24}{29}$ ويكون

$$I(0.1)=\frac{2\sin 6-24\cos 6}{29}+\frac{24}{29}e^{-0.5} = 0.31 \text{ Amp}$$

فى الدائرة (شكل ب) يكون لدينا

$$E_R+E_C-E=0 \quad \Rightarrow \quad RI+\frac{Q}{C}=E$$

وحيث أن $I=\frac{dQ}{dt}$ فنحصل على معادلة خطية من الرتبة الأولى

$$R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=E \qquad (10)$$

وحلها متروك للقارئ

مثال: إذا لوصلت مقاومة 2000 Ohms ومكثف سعته (f) 5×10^{-6} Farad على التوالى مع قوة دافعة كهربية 100 Volts. ماهو التيار عند 0.1 sec إذا كان I(0) = 0.01 Amp .

الحل: بوضع $R = 2000$ ، $C = 5\times10^{-6}$ ، $E = 100$ فى المعادلة (10) نحصل على

$$2000\left(\frac{dQ}{dt}+100Q\right)=100 \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt}+100Q=\frac{1}{20} \qquad (11)$$

الذى يمكن من هذه المعادلة تعيين $Q(0)$ حيث

$$\frac{1}{20}=Q'(0)+100Q(0)=I(0)+100Q(0)$$

وبالتالى

$$Q(0)=\frac{1}{100}\left[\frac{1}{20}-I(0)\right]=4\times10^{-4} \quad \text{Columbs} \qquad (12)$$

بضرب طرفى (11) بمعامل المكاملة e^{100t} نحصل على

$$\frac{d}{dt}(e^{100t}Q)=e^{100t}/20$$

ويكون حل المعادلة (12) هو

$$Q(t)=\frac{1}{2000}+ce^{-100t}$$

بوضع $t=0$ نجد أن $c=-10^{-4}$ وبالتالى تكون الشحنة عند أى زمن t هى

$$Q(t)=(5-e^{-100t})/10^{4}$$

وان التيار

$$I(t)=Q'(t)=\frac{1}{100}e^{-100t}$$

وبالتالى

$$I(0.1)=10^{-2}e^{-10}=4.5\times10^{-4} \quad \text{amp}$$

٣-٧ تطبيقات كيميائية:

تؤدى دراسة التفاعلات الكيميائية إلى معادلات تفاضلية سوف نعتبر التفاعلات خلال ثبات درجة الحرارة والضغط . واننا سندرس نظام مغلق أى النظام الذى لايضاف إليه ولا يسحب منه أى مادة أو منتج خلال عملية التفاعل.

إذا تغير جزئ من S_1 الى جزئ واحد من P فإننا نكتب $S_1 \rightarrow P$

وإذا جزئ واحد من S_1 ، وجزئ واحد من S_2 اتحدا لاعطاء جزئ واحد من P فإننا نكتب $S_1 + S_2 \rightarrow P$

وهكذا.

وترتيب التفاعل هو وصف لحركة الجزيئات. فإنها تعرف كم حدود التركيزات يجب ضربها مع بعض للحصول على تعبير لكل من معدل وسرعة التفاعل. للتفاعل من الرتبة الأولى تكون السرعة تتناسب مع تركيز واحد فمثلا فى

$$S_1 \xrightarrow{K} P$$

فإذا كان s_1 التركيز مول / لتر (moles/leter) لـــ S_1، p هو التركيز مول/لتر فى P فإن

$$\frac{dp}{dt} = ks_1$$

وبالمثل للتفاعل $S_1 + S_2 \xrightarrow{K} P$ من الرتبة الثانية يكون

$$\frac{dp}{dt} = ks_1 s_2$$

وفى التفاعل الجزئى الثلاثى يكون

$$S_1 + S_2 \xrightarrow{K_1} X \;,\; X + S_3 \xrightarrow{K_2} P$$

والذى سرعته تكون

$$\frac{dx}{dt} = k_1 s_1 s_2 - k_2 x s_3 \;, \quad \frac{dp}{dt} = k_2 x s_3$$

والآن نعتبر التفاعل $S_1+S_2 \xrightarrow{K} P$ أى أن جزئ واحد من S_1 وجزئ واحد من S_2 تغيرا إلى جزئ واحد من P . وحيث أن التركيزات يعبر عنها دائماً مول / لتر وان النظام مغلق فإن تركيز S_1+P ، S_2+P يبقى ثابتاً أثناء التفاعل أى أن

$$s_1+p \equiv q_1 \ , \ \ s_2+p \equiv q_2$$

والتالى

$$\frac{dp}{dt}=Ks_1s_2=K(q_1-p)(q_2-p)$$

أى أن معادلة السرعة ويمكن اختزالها إلى معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى فى p. وإذا علمت $p(0)$ فإنه يمكن حساب $p(t)$ عندما $t \geq 0$.

مثال (١): اختبر التفاعل الثنائى $S_1+S_2 \xrightarrow{K} P$ حيث $K=2$ وافترض التركيز الابتدائى لكل من S_1 هو 3 moles / liter ، S_2 هو 1 mole / liter بينما لايوجد الناتج P ابتدائياً. أوجد $p(t)$

الحل: مسألة القيم الابتدائية التى يجب حلها هى

$$\frac{dp}{dt}=2s_1s_2=2(3-p)(1-p) \quad , \quad p(0)=0 \tag{1}$$

أى

$$2dt=\frac{1}{(3-p)(1-p)}dp=\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{p-3}\right)dp$$

وبالتكامل نحصل على

$$\frac{p-3}{p-1}=(\pm e^{2c})e^{4t}=c_1e^{4t}, \qquad c_1=\pm e^{2c}$$

وحيث أن $p(0)=0$ ، فإن $c_1=3$ ويكون لدينا

$$\frac{p-3}{p-1}=3e^{4t} \Rightarrow p(t)=\frac{3e^{4t}-3}{3e^{4t}-1}=1-\frac{2}{3e^{4t}-1}$$

مثال (٢): فى المثال السابق اوجد $p(t)$ إذا كان تركيز الناتج P ابتدائياً هو 2 mol / leter

الحل: فى هذه الحالة

$$s_1 + p = 3 + 2 = 5, s_2 + p = 1 + 2 = 3$$

وتكون مسألة القيمة الابتدائية التى يجب حلها هى

$$\frac{dp}{dt} = 2s_1 s_2 = 2(5-p)(3-p)\ , \qquad p(0) = 2$$

بحل هذه المعادلة تحصل على الحل

$$p(t) = \frac{9e^{4t} - 5}{3e^{4t} - 1} = 3 - \frac{2}{3e^{4t} - 1}$$

ملحوظة : تكون معظم التفاعلات **قابلة للانعكاس** (reversible) وتكتب على الصورة

$$S_1 \underset{K_{-1}}{\overset{K_1}{\rightleftarrows}} p \qquad (2)$$

وبدلالة السرعات

$$\frac{dp}{dt} = k_1 s_1 - k_{-1} p\ , \quad \frac{ds_1}{dt} = -k_1 s_1 + k_{-1} p = -\frac{dp}{dt}$$

مثال (٣): للتفاعل العكسى (2) نفترض $k_1 = 3$، $k_{-1} = 1$ إذا كان $s_1(0) = 5$ مول/لتر , $p(0) = 0$ أوجد الحل بالنسبة إلى $p(t)$.

الحل: تحت الشروط المعطاه

$$\frac{dp}{dt} = 3s_1 - p\ , \ s_1 + p = 5\ , \ p(0) = 0$$

والتالى

$$\frac{dp}{dt} = 3(5-p) - p = 15 - 4p\ , \ p(0) = 0$$

وهى معادلة تفاضلية خطية يكون حلها العام هو

$$p = \frac{15}{4} + ce^{-4t}$$

وحيث $p(0) = 0$ فإن $c = -\frac{15}{4}$ ويكون الحل العام هو

$$p(t) = \frac{15}{4}(1 - e^{-4t})$$

ملحوظة : وبالمثل للتفاعل من الرتبة الثانية القابل للانعكاس

$$S_1 + S_2 \underset{K_{-1}}{\overset{K_1}{\rightleftarrows}} P$$

أى

$$\frac{dp}{dt} = k_1 s_1 s_2 - k_{-1} p$$

وحيث أن النظام مغلق فإن $s_1 + p = q_1$ ، $s_2 + p = q_2$ تكون ثابتة وبالتالى

$$\frac{dp}{dt} = k_1(q_1 - p)(q_2 - p) - k_{-1} p$$

مثال (٤): ماهى المعادلة التفاضلية التى تصف حركة التفاعلات

$$S_1 + S_2 + S_3 \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} X \text{ . } X \underset{k_{-2}}{\overset{k_2}{\rightleftarrows}} P$$

وتكون المعادلات التفاضلية المناسبة هى

$$\frac{dx}{dt} = (k_1 s_1 s_2 s_3 - k_{-1} x) + (-k_2 x + k_{-2} p),$$

$$\frac{dp}{dt} = k_2 x - k_{-2} p$$

وحيث أن النظام مغلق فإن $s_i + x + p = q_i$ ، $i = 1, 2, 3$ تكون ثابتة وبالتالى وان $s_i = q_i - x - p$

$$\frac{dx}{dt}=k_1(q_1-x-p)(q_2-x-p)(q_3-x-p)-(k_{-1}+k_2)x+k_{-2}p$$

$$\frac{dp}{dt}=k_2x-k_{-2}p$$

وهو نظام من معادلتين وبالتالى نحتاج لشرطين ابتدائيين $p(0)=p_0$ ، $x(0)=x_0$ لتحديد الحل ولا يوجد طريقة عامة لحل هذا النظام الا بالتقريب العددى واستخدام الحاسب الالى.

المحفزات: (catalyst)

هى مادة اما ان تعجل (تسرع) التفاعل الكيميائى او تكون ضرورية لاتمام التفاعل. فالانزيمات (Enzymes) مثال على ذلك فهى معجلة عضوية وعادة تكون بروتين. وفى التفاعلات فان الانزيم E يتحد مع المادة S ليكون منتج وسيط X والذى ينتج منتج P ويترك الانزيم ، أى

$$E+S \underset{K_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} X \xrightarrow{K_2} E+P \qquad (4)$$

نريد ايجاد dp/dt بدلالة تركيز S. نفترض أن التركيز الابتدائى للانزيم هو e_0 وتركيز S هو s_0 ، وان X لم تكن موجودة أولا أى $x_0=0$

نعتبر الافتراضيات التالية: يحدث التفاعل الاول فى (4) اسرع بالمقارنة بالثانى أى $E+S>X$ ويمكن افتراضه أن يكون فى حالة الاتزان. وعلى درجة الخصوص $\frac{ds}{dt}=0$ وتكون معادلات الحركة هى

$$\frac{dp}{dt}=k_2x$$

$$\frac{dx}{dt}=k_1es-k_{-1}x-k_2x$$

$$\frac{ds}{dt}=-k_1es+k_{-1}x$$

$$\frac{de}{dt}=-k_1es+k_1x+k_2x$$

وحيث أن $ds/dt=0$ (من الافتراض) فإن $-k_1es+k_{-1}x=0$ اى $x=k_1es/k_{-1}$ وحيث أن النظام مغلق فإن $e_0=e+x$ وبالتالى

$$x=\frac{k_1}{k_{-1}}es=\frac{k_1}{k_{-1}}(e_0-x)s$$

وبحل المعادلة نحصل على

$$x=\frac{e_0s}{s+(k_{-1}/k)}$$

وتكون معادلة السرعة للتفاعل الثانى

$$\frac{dp}{dt}=k_2x=\frac{k_2e_0s}{s+(k_{-1}/k)}$$

والتى تأخذ الصورة

$$\frac{dp}{dt}=\frac{Vs}{s+k_n} \qquad (5)$$

الثابت V هو اقصى سرعة ممكنة للتفاعل، والثابت k_m يسمى بثابت ميتشالين (Michaelis) للتفاعل وتسمى المعادلة (5) معادلة ميتشالين وميتين (Michaelis-Menten)

مثال (٥): يفترض التفاعل $S\to P$ الذى له معادلة الحركة

$$\frac{dp}{dt}=\frac{Vs}{s+k_m} \qquad (6)$$

فإذا كان ابتدائيا يوجد s_0 mole/liter، ولاتوجد P. اوجد $p(t)$

الحل: التفاعل $S\to P$ يعتبر انه تفاعل انزيم محفز على الصورة (4). وبدلا من محاولة معرفة الأنزيم المناسب ثم نقيس k_1، k_{-1} ، k_2 فإننا نستخدم مباشرة المعادلة (6). الثابتان V، k_m يجب تحديدهما بالبيانات عن التفاعل.
وحيث ان النظام مغلق فإن $s+p=s_0$ وأن

$$\frac{dp}{dt}=\frac{V\,(s_0-p)}{s_0-p+k_m}=f\,(p)\,.\;\;p(0)=0 \tag{7}$$

وحيث $f\,(p)=0$ فقط إذا كان $p=s_0$ بينما $f\,(p)>0$ عند $p<s_0$ ويكون الحل الثابت الوحيد للمعادلة (7) هو $p(t)\equiv s_0$. فى المنطقة $-\infty<p<s_0$ تكون الحلول تزايدية. فإننا نتوقع أن الحل $p(t)$ للمعادلة (7) يكون تزايدى ويبقى أقل من s_0 . وبفصل المتغيرات نحصل على

$$V\,dt=\frac{s_0-p+k_m}{s_0-p}dp=\left(1+\frac{k_m}{s_0-p}\right)dp$$

أو

$$Vt+c=p-k_m\ln(s_0-p)$$

وحيث أن $p(0)=0$ فإن $c=-k_m\ln s_0$ وأن

$$Vt=p-k_m\ln\left(1+\frac{p}{s_0}\right) \tag{8}$$

وهذا التعبير يحدد p ضمنيا كدالة فى t.

وتبدو معادلة السرعة (6) كتقريب جيد لتفاعلات عديدة قد يكون بعضها أكثر تعقيداً من (4). يجب تحديد الثابتين V، k_m لأى تفاعل معطى.

٣-٨ تطبيقات اقتصادية

مثال (١): وضع شخص 5000 دولار فى حساب يعطى فائدة مركبة. وبافتراض عدم الاضافة أو السحب من الحساب فكم يكون الرصيد بعد سبع سنوات إذا كان معدل الفائدة ثابت وقدره 8.5% فى الاربع سنوات الأولى ومعدل الفائدة ثابت وقدره 9.25% فى الثلاث سنوات الاخيرة.

الحل: ليكن $N(t)$ هو الرصيد فى الحساب عند أى لحظة t وفى البداية $N(0)=5000$. وفى الاربع سنوات الأولى يكون $K=0.085$ وتصبح المعادلة اللوجستية (بند ٢) (1) على الصورة

$$\frac{dN}{dt} - 0.085\,N = 0$$

ويكون حلها العام هو

$$N(t) = e^{0.085t} \;,\; 0 \le t \le 4 \qquad (2)$$

عندما $t = 0$ يكون $N = 5000$ وبالتعويض فى المعادلة الاخيرة نجد أن

$$N(t) = 5000e^{0.085t} \qquad (3)$$

وبوضع $t = 4$ نحصل على الرصيد بعد ٤ سنوات وهو

$$N(t) = 5000e^{(0.085)(4)} = 7024.74$$

وهذه تمثل الرصيد المبدئى فى الثلاث سنوات الأخيرة.

بعد نهاية الثلاث سنوات ومعدل الفائدة 9.25% فإن المعادلة (1) تؤول إلى

$$\frac{dN}{dt} = 0.0925N \;,\; 4 \le t \le 7$$

ويكون حلها هو

$$N(t) = ce^{0.0925t} \qquad (4)$$

وعند $t = 4$، $N(4) = 7024.74$ وبالتعويض فى (4) والاختصار نحصل على الرصيد وهو

$$N(t) = 4852.23e^{(0.0925)t}, 4 \le t \le 7$$

وبوضع $t = 7$ فى المعادلة الاخيرة نحصل على الرصيد بعد سبع سنوات وهو

$$N(7) = (4852.23)e^{(0.0925)(7)} = \$\ 9271.44$$

٣-٩ المسارات Trajectories

تعريف: يسمى المنحنى الذى يقطع كل منحنى من عائلة منحنيات طبقا لقانون معين بالمسار لعائلة المنحنيات المعطاه. سوف نستعرض هنا الحالة التى يكون فيها القانون المعطى هو الزاوية التى يقطع فيها المنحنى كل منحنى من العائلة ثابتة.

وإذا قطع المنحنى كل منحنى من عائلة المنحنيات بزاوية قائمة فإن المسار يكون متعامدا (orthogonal) أما إذا قطعها بزاوية $(\neq 90^o)\alpha$. فإنه يسمى مسارا مائلا (oblique). ومثال ذلك إذا اعتبرنا عائلتين من المنحنيات $y = mx$، $x^2 + y^2 = a^2$ حيث a, m بارامتران. فإننا نجد أن كل خط مستقيم (معطى بالمعادلة $y = mx$) يمر خلال نقطة الأصل يكون مساراً عمودياً لعائلة الدوائر المتحدة المركز (معطاه بالمعادلة $x^2 + y^2 = a^2$) ومركزها نقطة الأصل. وبالتالي $y = mx$ يكون مسارا عموديا لعائلة الدوائر $x^2 + y^2 = a^2$. وحيث أن m بارامتر، فإنه ينتج من ذلك أن المسارات المتعامدة لعائلة منحنيات تكون هي نفسها عائلة منحنيات.

أ) تعيين المسارات المائلة في الاحداثيات الديكارتية:

لتكن معادلة عائلة المنحنيات المعطاه هي

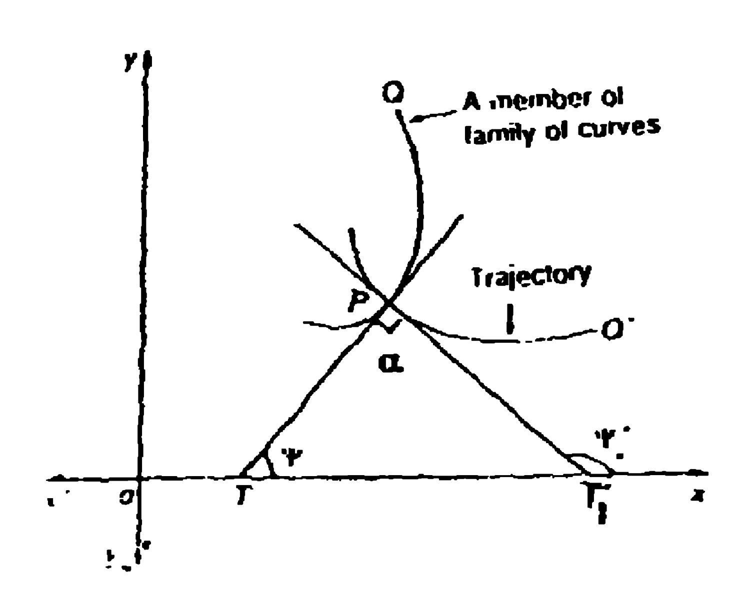
$$f(x, y, c) = 0 \qquad (1)$$

حيث c بارامتر. باشتقاق (1) بالنسبة إلى x وبحذف c من المعادلة (1) والمعادلة الناتجة من الاشتقاق نحصل على المعادلة التفاضلية لعائلة المنحنيات المعطاه (1) وهي

$$F(x, y, dy/dx) = 0 \qquad (2)$$

لتكن ψ الزاوية المحصورة بين المماس PT للعنصر PQ من عائلة المنحنيات عند أي نقطة $P(x, y)$ مع المحور x. وعلى ذلك

$$\tan\psi = dy/dx \qquad (3)$$



ليكن (X, Y) إحداثى نقطة على المسار. وعند نقطة التقاطع P لأى عنصر فى (2) مع المسار PQ_1. ليكن ψ_1 هى الزاوية التى يصنعها المماس PT_1 مع المحور x وعلى ذلك

$$\tan\psi_1 = dY \,/\, dX \tag{4}$$

ليكن PT، PT_1 متقاطعين بزاوية α وبالتالى

$$\tan\alpha = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{dY}{dX}}{1 + \frac{dy}{dx}\frac{dY}{dX}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(dY \,/\, dX) + \tan\alpha}{1 - \left(\frac{dY}{dX}\right)\tan\alpha} \tag{5}$$

وعند نقطة تقاطع عنصر من (2) مع المسار يكون لدينا

$$x = X\,, \quad y = Y \tag{6}$$

وبحذف x ,y ,dy/dx من (2) ، (5)، (6) نحصل على

$$F\left(X, Y, \frac{(dY \,/\, dX) + \tan\alpha}{1 - \left(\frac{dY}{dX}\right)\tan\alpha} \right) = 0 \tag{7}$$

وهى معادلة تفاضلية لعائلة المسارات المطلوبة. وعلى ذلك تكون المعادلة التفاضلية لعائلة المسارات لعائلة المنحنيات

$$F(x, y, dy \,/\, dx) = 0$$

هى

$$F\left(x, y, \frac{(dy \,/\, dx) + \tan\alpha}{1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)\tan\alpha} \right) = 0$$

مبينا أنه يمكن الحصول عليه بابدال $dy \,/\, dx$ بالعلاقة

$$[dy \,/\, dx + \tan\alpha] \,/\, [1 - (dy \,/\, dx)\tan\alpha]$$

(ب) تحديد المسارات العمودية فى الاحداثيات الديكارتية:

لتكن معادلة عائلة المنحنيات المعطاه هى

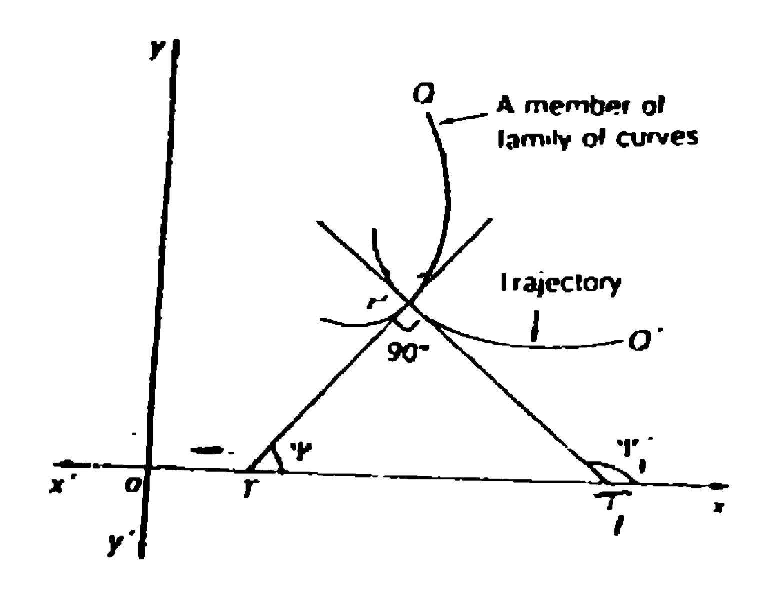
$$f(x, y, c) = 0 \qquad (1)$$

حيث c بارامتر. باشتقاق (1) بالنسبة إلى x وبحذف c من (1) ونتيجة الاشتقاق، نحصل على معادلة تفاضلية لمعادلة المنحنيات المعطاه (1). ولتكن هى

$$F(x, y, dy/dx) = 0 \qquad (2)$$

لتكن ψ هى الزاوية بين المماس PT للمنحنى PQ من عائلة المنحنيات ومحور السينات عند النقطة $P(x, y)$

$$\tan\psi = dy/dx \qquad (3)$$



لتكن (X, Y) احداثى أى نقطة على المسار وعند نقطة التقاطع P لعنصر من (2) مع المسار PQ_1 ليكن ψ_1 هى الزاوية التى يصنعها المماس PT_1 للمسار مع محور السينات

$$\tan\psi_1 = dY/dX \qquad (4)$$

ليكن PT، PT_1 متقاطعين بزاوية 90° وعلى ذلك

$$\tan\psi \cdot \tan\psi_1 = -1$$

أى أن

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dY}{dX}=-1 \quad \Rightarrow \quad dy/dx=-\frac{1}{dY/dX}=-\frac{dX}{dY} \qquad (5)$$

وعلى ذلك عند نقطة تقاطع عنصر من عائلة المنحنيات (2) مع المسار يكون لدينا

$$x=X, \quad y=Y \qquad (6)$$

وبحذف $dy/dx, y, x$ من (2) ، (5) ، (6) نحصل على

$$F(X, Y, -dX/dY)=0 \qquad (7)$$

وهى المعادلة التفاضلية لعائلة المسارات المطلوبة. وعلى ذلك بالرموز العادية، فإننا نجد أن المعادلة التفاضلية لعائلة المسارات العمودية لعائلة المنحنيات

$$F(x, y, dy/dx)=0 \qquad (8)$$

تكون هى

$$F(x, y, -dx/dy)=0 \qquad (9)$$

والتى تبين أنه يمكن الحصول عليها بوضع $-dx/dy$ بدلا من dy/dx

تعريف: عائلة المنحنيات المتعامدة ذاتيا (self-orthogonal) إذا كان كل عنصر من عائلة المنحنيات المعطاه تتقاطع مع العناصر الأخرى على التعامد، فإنه يقال أن عائلة المنحنيات المعطاه متعامدة ذاتيا.

ومن هذا التعريف نجد أن إذا كانت المعادلة التفاضلية لعائلة المنحنيات متطابقة مع المعادلة التفاضلية لعائلتها المتعامدة، فان مثل هذه العائلة من المنحنيات يجب أن تكون متعامدة ذاتيا ويمكن تلخيص الطريقة فيما يلى:

١- نشتق المعادلة المعطاه ونحذف البارامتر من المعادلة المعطاه والمعادلة المشتقة.

٢- نضع $-dx/dy$ بدلا من dy/dx فى المعادلة التفاضلية فى (1) ونحصل على المعادلة التفاضلية لعائلة المنحنيات المتعامدة.

٣- تحل المعادلة الناتجة فى (2) ويكون الناتج هو عائلة المنحنيات للمسارات المتعامدة.

مثال (١): اوجد المسارات المائلة بزاوية $\frac{\pi}{4}$ على مجموعة الدوائر $x^2+y^2=c$

الحل: باشتقاق المعادلة المعطاه نحصل على $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ أى $f(x,y)=-\frac{x}{y}$، $\alpha=\frac{\pi}{4}$ فإن المعادلة التفاضلية للمسارات المائلة تكون

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{x}{y}+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\frac{x}{y}\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{y-x}{y+x}$$

وهى معادلة تفاضلية متجانسة من الرتبة الأولى ويكون حلها هو

$$x^2+y^2=c_1e^{[-2\tan^{-1}(y/x)]}$$

مثال (٢): اوجد المسارات التى تقطع عائلة المستقيمات $y=mx$ بزاوية $\frac{\pi}{4}$

الحل: من المعادلة $y=mx$ نجد أن $y'=m$ وعلى ذلك تكون المعادلة التفاضلية لعائلة المستقيمات المعطاه هى $y=y'x$ أى $y'=\frac{y}{x}$ وعلى ذلك يكون $f(x,y)=y/x$ ولكن $\alpha=\frac{\pi}{4}$ فإن المعادلة التفاضلية للمسارات المائلة تكون

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x}{y}+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1-\frac{x}{y}\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{y+x}{y-x}$$

وهى معادلة تفاضلية متجانسة ويكون حلها هو

$$\ln(c_1^2(x^2+y^2))-2\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

وهى عائلة المسارات المائلة بزاوية $\frac{\pi}{4}$ على عائلة المستقيمات $y = mx$.

ملحوظة : قارن نتيجة هذا المثال مع نتيجة المثال السابق

مثال (٣): اوجد المسارات المتعامدة لعائلة المنحنيات $y = ax^2$ حيث a بارمتر

الحل: لدينا

$$y = ax^2 \qquad (1)$$

باشتقاق (1) نحصل على

$$\frac{dy}{dy} = 2ax \qquad (2)$$

ومن (1) يكون لدينا $a = y / x^2$ وعلى ذلك من (2) يكون لدينا

$$dy / dx = 2\frac{y}{x^2}x = 2y / x$$

وهى المعادلة التفاضلية لعائلة المنحنيات المعطاه. بوضع $-dx / dy$ بدلا من dy / dx فإن المعادلة التفاضلية لعائلة المسارات المتعامدة هى

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow xdx + 2ydy = 0$$

وبالتكامل

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

وهى عائلة المسارات المتعامدة. والمنحنى المعطى يمثل عائلة قطوع مكافئة بينما المسارات المتعامدة هى عائلة قطوع ناقصية وكل مسار فى (1) يقطع كل قطع فى (3) على التعامد.

مثال (٤): أوجد المسارات المتعامدة لعائلة المنحنيات $3xy = x^3 - a^3$ ، a بارامتر للعائلة.

الحل: لدينا عائلة المنحنيات

$$3xy = x^2 - a^2 \qquad (1)$$

باشتقاق المعادلة (1) بالنسبة إلى x ، تحصل على

$$3y + 3x\frac{dy}{dx} = 3x^2, \quad y + x\frac{dy}{dx} = x^2 \qquad (2)$$

وحيث أن (2) لاتحتوى على بارامتر فإنها تمثل المعادلة التفاضلية للعائلة المعطاة. وباحلال dy/dx بالمقدار $-dx/dy$ فنحصل على المعادلة التفاضلية للعائلة المتعامدة المطلوبة وهى

$$y - x\frac{dx}{dy} = x^2 \quad \Rightarrow \quad x\frac{dx}{dy} + x^2 = y \qquad (3)$$

ويكون حلها هو

$$x^2 = y - \left(\frac{1}{2}\right) + ce^{-2y}$$

وهى المسارات المتعامدة المطلوبة، c بارامتر.

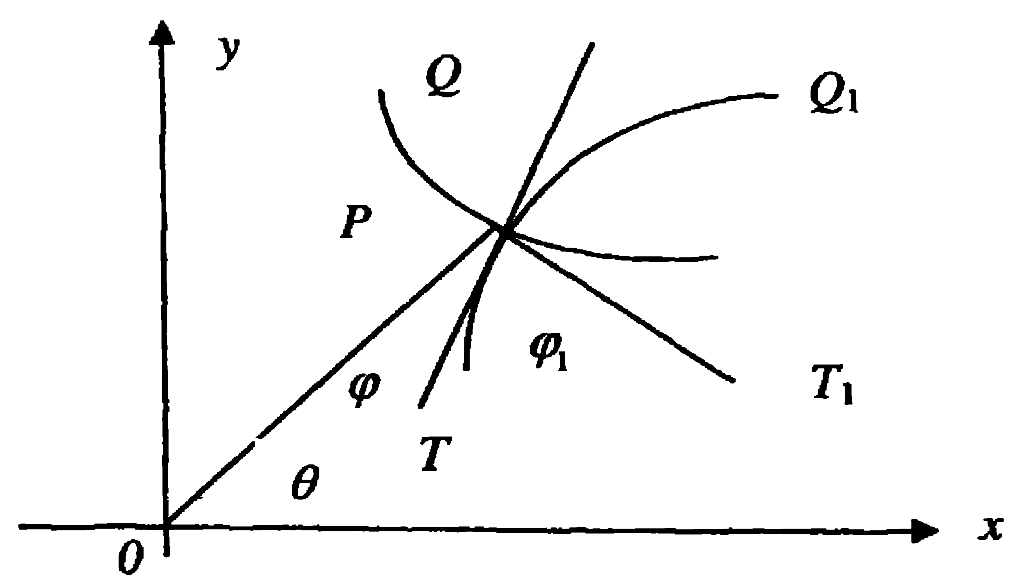
(جـ) تعيين المسارات المتعامدة فى الاحداثيات القطبية:

لتكن معادلة عائلة المنحنيات هى

$$f(r, \theta, c) = 0 \qquad (1)$$

حيث c بارامتر. وباشتقاق (1) بالنسبة إلى θ وبحذف c بين المعادلة (1) والمعادلة الناتجة فنحصل على معادلة تفاضلية تمثل العائلة المعطاه

$$F(r, \theta, dr/d\theta) = 0 \qquad (2)$$



لتكن φ هى الزاوية بين المماس PT لعنصر PQ من عائلة المنحنيات المعطاه ومتجه نصف القطر OP عند النقطة $P(r,\theta)$ وعلى ذلك

$$\tan\varphi = r\frac{d\theta}{dr} \tag{3}$$

ليكن (R,Θ) احداثيى أى نقطة على المسار. وعند نقطة التقاطع P، تتساوى الاحداثيات فى (2) مع المسار PQ_1، لتكن φ_1 هى الزاوية بين المماس PT_1 ومتجه نصف القطر OP. وعلى ذلك

$$\tan\varphi_1 = R\frac{d\Theta}{dR} \tag{4}$$

ليكن PT، PT_1 يتقاطعان بزاوية $\pi/2$. ومن الشكل نجد أن

$$\varphi_1 - \varphi = \pi/2 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

وعلى ذلك

$$\tan\varphi_1 = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\cot\varphi \;\Rightarrow\; \tan\varphi_1, \tan\varphi_2 = -1$$

أى

$$\left(r\frac{d\theta}{dr}\right)\left(R\frac{d\Theta}{dR}\right) = -1 \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = -rR\frac{d\Theta}{dR} \tag{5}$$

وعند نقطة التقاطع يكون

$$\Theta = \theta, \quad r = R \tag{6}$$

وبحذف r,θ، $dr/d\theta$ من (2)، (5)، (6) نحصل على

$$F\left(R,\Theta,-R^2\frac{d\Theta}{dR}\right)=0 \qquad (7)$$

والتى تسمى بمعادلة تفاضلية لعائلة المسارات المطلوبة وعلى ذلك تكون المعادلة التفاضلية لعائلة المسارات المتعامدة لعائلة المنحنيات

$$F(r,\theta,dr/d\theta)=0 \qquad (8)$$

هى

$$F\left(r,\theta,-r^2\frac{d\theta}{dr}\right)=0 \qquad (9)$$

مبينا أنه يمكن الحصول عليها بوضع $-r^2(d\theta/dr)$ بدلا من $dr/d\theta$.

وطريقة الحل لهذا النوع هى كالتالى

(i) نشتق معادلة عائلة المنحنيات ثم نحذف البارامتر فنحصل على المعادلة التفاضلية للعائلة المعطاه

(ii) نضع $-r^2(d\theta/dr)$ بدلا من $dr/d\theta$

(iii) نحل المعادلة الناتجة

مثال (٥): أوجد المسارات المتعامدة لعائلة الكاردويد $r=a(1-\cos\theta)$، a بارامتر

الحل: لدينا معادلة الكاردويد

$$r=a(1-\cos\theta) \qquad (1)$$

بأخذ لوغاريتم المعادلة المعطاه فنجد أن

$$\ln r=\ln a+\ln(1-\cos\theta) \qquad (2)$$

باشتقاق (2) بالنسبة إلى θ نحصل على

$$\frac{1}{r}(dr/d\theta)=\sin\theta/(1-\cos\theta) \qquad (3)$$

وهى لاتحتوى البارامتر a فهى المعادلة التفاضلية للعائلة

بوضع $-r^2(d\theta/dr)$ بدلا من $dr/d\theta$ فى (3) فنحصل على المعادلة التفاضلية للمسارات المتعامدة أى أن

$$\frac{1}{r}\left(-r^2\frac{d\theta}{dr}\right)=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}{2\sin^2(1/2)\theta}$$

$$dr/r=-\tan(\theta/2)d\theta$$

وبالتكامل نحصل على

$$\ln r=2\ln\left(\cos\frac{1}{2}\theta\right)+\ln c \quad\Rightarrow\quad \ln r=\ln\left(c\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \qquad (4)$$

أى

$$r=\frac{c}{2}(1+\cos\theta)\Rightarrow r=b(1+\cos\theta)$$

حيث $b=c/2$ ثابت اختيارى. فإن (4) تعطى عائلة منحنيات كاردويد ايضاً متعامدة مع العائلة المعطاه.

مثال (٦): اوجد معادلة نظام المسارات المتعامدة لعائلة القطوع المكافئة

$$r=2a/(1+\cos\theta)$$

حيث a بارامتر.

الحل: بأخذ لوغاريتم المعادلة المعطاة نجد أن

$$\ln r=\ln 2a-\ln(1+\cos\theta) \qquad (1)$$

بالاشتقاق بالنسبة إلى θ نحصل على

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\theta/2}=\tan\frac{1}{2}\theta \qquad (2)$$

وهى المعادلة التفاضلية لعائلة المنحنيات المعطاة وبذلك تكون المعادلة التفاضلية للمسارات المتعامدة المطلوبة هى

$$\frac{1}{r}\left(-r^2\frac{d\theta}{dr}\right)=\tan(\theta/2)\Rightarrow\frac{dr}{r}=-\cot\frac{\theta}{2}d\theta$$

والتكامل نحصل على

$$\ln r=-2\ln\sin\frac{1}{2}\theta+\ln c \quad\Rightarrow\quad r=c/(\sin^2\frac{1}{2}\theta)=\frac{2c}{1-\cos\theta}$$

وهى المسارات المتعامدة على عائلة المنحنيات المعطاه وهى مجموعة قطوع مكافئة ايضا.

تمارين

١- اوجد المنحنى الذى فيه طول العمودى من القطب للمماس يتناسب مع نصف القطر r للمنحنى .

٢- اوجد المنحنى الذى فيه مجموع مقلوب كل من نصف قطر القطبى وتحت المماس القطبى عند أى نقطة عليه هو 5 وحدات وأن المنحنى يمر بالنقطة التى احداثياتها القطبية $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

٣- اوجد عائلة المنحنيات التى تتقاطع مع عائلة المتجهات $r=a\theta$ بزاوية α

٤- يتضاعف سكان مدينة خلال 15 سنه. بافتراض ان معدل التزايد يتناسب مع عدد السكان. اوجد عدد السنوات التى عندها يكون عدد السكان 3 امثال عددها الأولى .

٥- يمر هواء درجة حرارته 200 K على مادة درجة حرارتها 300 K وتبرد حرارة المادة إلى 260 K خلال 30 دقيقة. وبافتراض ان معدل انخفاض حرارة المادة فى هواء متحرك تتناسب مع الفرق بين درجة حرارة المادة ودرجة حرارة الهواء. أوجد الوقت الذى تنخفض فيه درجة حرارة المادة إلى 240 K.

٦- معدل تزايد بكتريا فى مجتمع ما يتناسب مع عددها فى نفس الوقت ووجد أن عددها يتضاعف فى 5 ساعات. عبر عن هذا رياضيا. احسب كم يكون عددها بعد 15 ساعه.

٧- اوجد المسارات المتعامدة لعائلة المنحنيات التالية

(i) $y=ax^n$ (ii) $y=ax^3$

(iii) $x^2+y^2=a^2$ (iv) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

٨- اوجد المسارات المتعامدة لعائلة المنحنيات التالية

(i) $ay^2=x^3$ (ii) $x^2+y^2+2gx+c=0$, بارامتر c ,

(iii) $x^2+y^2+2fy+1=0$, بارامتر f ,

٩- اوجد المسارات المتعامدة لعائلة المنحنيات

(i) $r^n \sin n\theta = a^n$, (ii) $r^n = a^n \cos n\theta$,

(iii) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, (iv) $r = a\theta$, (v) $r\theta = a$.

١٠- اوجد المسارات المائلة على عائلة المنحنيات المعطاه بزاوية $\pi/4$

(i) $x^2 + y^2 = a^2$, (ii) $y^2 = 4ax$, (iii) $xy = c$.

١١- يتناسب معدل إزدياد تعداد سكان قطر معين مع عدد السكان الذين يعيشون فيه. إذا تضاعف عدد السكان بعد سنتين، ثم اصبح 20000 بعد ثلاث سنوات. اوجد عدد السكان الذين يعيشون فى القطر فى البداية.

١٢- يتناسب معدل اضمحلال كتلة مادة لها نشاط اشعاعى مع كتلة المادة الموجودة. إذا وجد فى البداية 50 mg من المادة ولوحظ ان المادة فقدت 10% من كتلتها الاصلية بعد ساعتين أوجد

(i) تعبيرا عن كتلة المادة المشعة عند أى لحظة t

(ii) كتلة المادة بعد اربع ساعات

(ii) الزمن الذى اضمحلت عنده الماده إلى نصف كتلتها الابتدائية .

١٣- أصيبت خمسة فئران بعد ساعة بعدوى مرض الملامسه عمدا من تعداد 500 فأر فى اختبار انتشار الوباء الذى يفترض ان معدل التغير فى التعداد المصاب يتناسب مع ناتج ضرب عدد الفئران المصابة بعدد الفئران غير المصابة. وبافتراض صحة النظرية. اوجد متى يكون نصف الفئران مصابة.

١٤- وضع قضيب معدنى درجة حرارته 100^o F فى حجرة حرارتها ثابتة عند 0^oF. بعد عشرين دقيقة اصبحت درجة حرارة القضيب 50^oF أوجد

(أ) الزمن اللازم لتصل درجة حرارة القضيب إلى 25^oF

(ب) درجة حرارة القضيب بعد عشر دقائق

١٥- وضع جسم درجة حرارته 50^oF بالخارج حيث درجة الحرارة 100^oF وكانت درجة حرارة الجسم بعد 5 دقائق هى 60^oF لوجد

(أ) متى تصل درجة حرارة الجسم إلى 75^oF

(ب) درجة حرارة الجسم بعد عشرين دقيقة

١٦- يحتوى مستودع فى البداية 100 gal من محلول ملحى يحتوى على رطل واحد من الملح. ينساب محلول ملحى اخر يحتوى على رطل واحد من الملح لكل جالون إلى المستودع بمعدل $3\ \text{gal}/\text{min}$ عند $t=0$، وفى نفس اللحظة يخرج المخلوط الممتزج جيداً من المستودع بنفس المعدل. أوجد

(أ) كمية الملح فى المستودع عند أي لحظة t

(ب) الزمن اللازم لكى يحتوى المستودع على رطلين من الملح

١٧- وضع شخص 20000 دولار فى حساب توفير الذى يعطى فائدة مركبة سنويا 5%. أوجد

(أ) قيمة الرصيد بعد ٣ سنوات

(ب) الزمن اللازم ليتضاعف قيمة الرصيد بافتراض عدم السحب أو الاضافة للرصيد

١٨- مستودع يحتوى 50 لتر من الماء بدخله محلول ملحى مشبع يحتوى x جرام / لتر من الملح تدخل المستودع بمعدل 1.5 لتر / دقيقة ومزج الخليط جيداً ويخرج من المستودع بمعدل 1 لتر / دقيقة. إذا كان 1 لتر يحتوى كمية 20 جرام/لتر فى نهاية 20 دقيقة. اوجد قيمة x.

١٩- مستودع يحتوى 500 جالون من ملح مشبع الذى يحتوى c رطل لكل جالون ينساب إلى المستودع بمعدل 5 جالون / دقيقة ويخرج المنتج بمعدل 10 جالون / دقيقة. إذا كانت اكبر كمية من الملح وجدت فى المستودع عند نهاية 20 دقيقة. فما هى كمية الملح الابتدائية المحتواة فى المستودع ،

٢٠- يكون لخراج (excretion) ملح الفوسفات أقل ما يمكن عند الساعه 6 صباحاً واكبر مايمكن عند 6 مساء. وإذا كان معدل الاخراج هو

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{12}(t-6)$$

جرام / ساعه عند الزمن t، $(0\le t\le 24)$، والجسم يحتوى 400 جرام من ملح الفوسفات وان المريض مسموح له فقط بشرب الماء، فما هى كمية ملح الفوسفات فى جسم المريض عند أى وقت.

٢١- يزداد تعداد قطر معين بمعدل يتناسب مع عدد سكان القطر. وعدد سكان القطر الآن 80 مليونا. ومنذ عشر سنوات كان تعداده 70 مليونا. بافتراض استمرار هذا المعدل فى الازدياد، أوجد

(أ) تعبيراً عن عدد السكان التقريبى عند أى لحظة t (وبأخذه $t = 0$ هى الزمن الحالى)

(ب) عدد السكان التقريبى بعد نهاية فترة عشر سنوات تالية.

٢٢- تتلاشى مادة مشعة معينة بمعدل يتناسب مع الكمية الموجودة. لوحظ أنه بعد ساعة واحدة قد تلاشى عشرة فى المائة من المادة، أوجد زمن نصف حياة المادة. [تنويه: ليكن N_0 هو الكتلة الأصلية، وليس من الضرورى معرفة N_0 صراحة]

٢٣- أودع مودع 10000 دولار فى شهادة استثمار تعطى 6 فى المائة فائدة مركبة مستمرة سنوياً، فكم يكون الرصيد بعد نهاية سبع سنوات بفرض عدم الإضافة أو السحب من الرصيد.

٢٤- كم يكون الرصيد فى الحساب المبين فى المسألة السابقة إذا كان معدل الفائدة هو 7.5% بدلا من 6%.

٢٥- أودع مودع 5000 دولار فى حساب طفل عند ميلاده. بفرض عدم الإضافة أو السحب

(أ) فكم يكون رصيد الطفل عندما يبلغ عمره 21 عاماً إذا كان البنك يعطى فائدة مركبة 5% سنوياً للفترة كلها

(ب) عين معدل الفائدة المركبة المطلوبة ليكون الاستثمار مضاعفاً بعد ثمان سنوات.

(جـ) عين معدل الفائدة المركبة المطلوبة ليكون الاستثمار ثلاثة أمثاله بعد عشر سنوات.

(د) كم من الزمن يلزم البنك لجعل الاستثمار ثلاثة امثال الرصيد إذا كان معدل الفائدة المركبة المستمرة هى $2,25\%$ سنويا

(هـ) كم من الزمن يلزم البنك لجعل الاستثمار ضعف قيمته إذا كان معدل الفائدة المركبة المستمرة هى 8.75% سنويا

٢٦- يخطط مودع لاستثمار 6000 دولار فى حساب يعطى فائدة مركبة ما هو معدل الفائدة الذى يعطيه البنك للمودع الذى يريد أن يصل رصيده إلى 10000 دولار فى أربع سنوات.

٢٧- وضع جسم درجة حرارته $50^{o}F$ فى فرن تبقى درجة حرارته ثابتة عند $150^{o}F$. إذا أصبحت درجة حرارة الجسم $75^{o}F$ بعد 10 دقائق، أوجد الزمن اللازم لتصل درجة حرارة الجسم إلى $100^{o}F$.

٢٨- أعد كوب من الشاى فى كوب سبق تسخينه وماء ساخن بحيث كانت درجة حرارة الكوب والشاى فى البداية هى $190^{o}F$. ترك الكوب بعد ذلك ليبرد فى حجرة تبقى درجة حرارتها ثابتة عند $72^{o}F$. أصبحت درجة حرارة الشاى $150^{o}F$ بعد دقيقتين. عين

(أ) درجة حرارة الشاى بعد خمس دقائق

(ب) الزمن اللازم لتصل درجة حرارة الشاى $100^{o}F$.

٢٩- أسقط جسم كتلته 3 kg من ارتفاع 50 m بسرعة صفر. بإهمال مقاومة الهواء، أوجد

(أ) تعبيراً عن سرعة الجسم عند أىَ لحظة t

(ب) تعبيراً عن موضع الجسم عند أى زمن t بالنسبة إلى نظام الإحداثيات المبين فيه الاحداثى الرأسى لاعلى.

٣٠- أسقط جسم كتلته 2 kg من ارتفاع 45 m بسرعة ابتدائية 10 متر/ثانية. بإهمال مقاومة الهواء، اوجد

(أ) تعبيراً عن سرعة الجسم عند أى لحظة t

(ب) الزمن اللازم لكى يصل الجسم إلى الارض

٣١- قذف جسم كتلته m رأسياً إلى أعلى فى الهواء بسرعة ابتدائية v_0. بإهمال مقاومة الهواء، أوجد

(أ) معادلة الحركة فى نظام إحداثيات ديكارتى

(ب) تعبيراً عن سرعة الجسم عند أى لحظة t

(جـ) أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم.

٣٢- فى دائرة مقاومة ومكثف (RC) لها قوة دافعة كهربية 5 فولت، ومقاومة 10 أوم، ومكثف سعته 10^{-2} فاراد وشحنة ابتدائية 5 كولوم على المكثف. اوجد

(أ) التيار العابر

(ب) تيار حالة الاستقرار

٣٣- دائرة مقاومة ومكثف لها قوة دافعة كهربية 100 فولت، ومقاومة 10 أوم، وسعة 0.02 فاراد وشحنة ابتدائية 5 كولوم على المكثف. اوجد

(أ) تعبيرا عن الشحنة على المكثف عند أى لحظة t

(ب) التيار فى الدائرة عند أى لحظة t

٣٤- دائرة مقاومة ومكثف لها قوة دافعة كهربية 10^{-t} فولت، ولها مقاومة 10 أوم، وسعة 0.04 فاراد وشحنة ابتدائية 10 كولوم على المكثف. اوجد

(أ) تعبيرا عن الشحنة على المكثف عند أى لحظة t

(ب) التيار فى الدائرة عند أى لحظة t

٣٥- دائرة مقاومة ومكثف لها قوة دافعة كهربية $10 \sin t$ فولت، ومقاومة 100 أوم، وسعة 0.05 فاراد، ولاتوجد شحنة ابتدائية على المكثف. اوجد

(أ) الشحنة على المكثف عند أى لحظة t

(ب) تيار حالة الاستقرار

٣٦- دائرة مقاومة ومكثف لها قوة دافعة كهربية $300 \cos 2t$ فولت، ومقاومة 150 أوم، وسعة 1.6×10^{-2} فاراد، وشحنة ابتدائية 5 كولوم على المكثف. اوجد

(أ) الشحنة على المكثف عند أى لحظة t

(ب) تيار حالة الاستقرار

٣٧- دائرة مقاومة وملف (RL) لها قوة دافعة كهربية 5 فولت، ومقاومة 50 أوم، وحث 1 هنرى ولايوجد تيار ابتدائى. اوجد

(أ) التيار فى الدائرة عند أى لحظة t

(ب) مركبة حالة الاستقرار للتيار

٣٨- يحتوى مستودع فى البداية على 10 جالون مياه نقية. عند $t = 0$، ينساب محلول ملحى يحتوى على ½ رطل ملح لكل جالون إلى المستودع بمعدل 2 جالون / دقيقة، بينما يخرج المخلوط الممتزج جيدا من المستودع بنفس المعدل.
اوجد (أ) الكمية (ب) تركيز الملح فى المستودع عند أى لحظة t

٣٩- يحتوى مستودع فى البداية على 80 جالون من محلول ملحى يحتوى على 1/8 رطل من الملح لكل جالون. عند $t = 0$، ينساب محلول ملحى آخر يحتوى على رطل واحد من الملح لكل جالون بمعدل 4 جالون / دقيقة بينما يخرج المخلوط الممتزج جيدا من المستودع بمعدل 8 جالون / دقيقة. اوجد كمية الملح فى المستودع عندما يحتوى المستودع على 40 جالون من المحلول فقط.

٤٠- يحتوى مستودع على 100 جالون من محلول ملحى مكون بإذابة 80 رطل من الملح فى الماء. تنساب مياه نقية إلى المستودع بمعدل 4 جالون / دقيقة، بينما يخرج المخلوط الممتزج جيدا من المستودع بنفس المعدل. اوجد

(أ) كمية الملح فى الخزان عند أى لحظة t

(ب) الزمن اللازم لكى يخرج نصف الملح من المستودع

٣٩- يحتوى مستودع على 100 جالون من محلول ملحى مكون بإذابة 60 رطل من الملح فى الماء. تنساب مياه مالحة تحتوى على رطل واحد لكل جالون بمعدل 2 جالون / دقيقة، بينما يخرج المخلوط الممتزج جيدا من المستودع بمعدل 3 جالون / دقيقة. اوجد كمية الملح فى المستودع بعد 30 دقيقة.

٤١- أوجد $p(t)$ باستخدام قانون الكتلة

(i) $S_1 \xrightarrow{K} P, k = 3, S_1(0) = 4, p(0) = 0$

(ii) $S_1 \xrightarrow{K} P, S_1(0) = c, p(0) = q, q > 0, k > 0, c > 0$

(iii) $S_1 \xrightarrow{K_1} X_1 \xrightarrow{K_2} X_2 \xrightarrow{K_3} P, s_1(0) = s_0 > 0, x_1(0) = x_2(0) = p(0) = 0, k_i \neq k_j, i \neq j$

(iv) $2S_1 \underset{K_{-1}}{\overset{K}{\rightleftarrows}} P, S_1(0)=1, p(0)=0, k_1=4. k_{-1}=1$

٤٢- افترض أن فى الخليط S_1 ، S_2 يحدث التفاعلان

$S_1 \xrightarrow{K_1} P_1, S_1+S_2 \xrightarrow{K_2} P_2.$ عندما $K_1=K_2=1$

وليكن $p_2(0), p_1(0)=0. s_2(0)=1, s_1(0)=2$

(أ) بتطبيق قانون عمل الكتلة اكتب معادلات السرعات الاربعة لهذه التفاعلات

(ب) اثبت أن $p_2=1-e^{-\left(\frac{K_2}{K_1}\right)p_1}$ (النظام مغلق)

(جـ) اوجد جميع الكميات المحفوظة (conserved)

٤٣- فى التفاعل $S_1+S_2+S_3 \xrightarrow{K} P$ افترض أن $s_1(0)=2$ ، $s_2(0)=1$ ، $s_3(0)=\frac{3}{2}$ ، $p(t)=0$. اكتب معادلة الحركة $\frac{dp}{dt}=f(p)$ التى تصف التفاعل. وعين جميع الحلول الثابتة لهذه المعادلة. صف السلوك العام لحل هذه المعادلة مستخدما إشارة $f(p)$ فى التحليل.

الباب الرابع

معادلات تفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاعلى

First order nonlinear differential equations

٤-١ مقدمة: تكون الصورة العامة لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ودرجة أعلى من الأولى هى:

$$p^n + Q_1 p^{n-1} + Q_2 p^{n-1} + \ldots + Q_n = 0 \qquad (1)$$

حيث $p = dy/dx$ ، $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ دوال فى x و y . وهذه المعادلة بهذه الصورة يصعب حلها – توجد ثلاث طرائق رئيسية لحل هذه المعادلات سوف نتعرض لها فى هذا الباب.

الطريقة الأولى تستخدم فى حل المعادلة التفاضلية بالنسبة إلى المشتقة p أى تحلل المعادلة إلى عدة عوامل فى p. ويمكن استخدام الطريقتين الاخريين فى حل هذه المعادلة التفاضلية إذا فشلت الطريقة الأولى .

وفى هذا الباب يمكن أن يكون الحل فى احدى الصورتين التاليتين

(i) الصورة الديكارتية التى تحتوى x و y وثابت اختيارى مثل $y^2 = 2cx + c^2$

(ii) الصورة البارامترية: والتى تتكون من معادلتين على الصورة $x = f_1(p,c)$ ، $y = f_2(p,c)$ ، حيث c ثابت اختيارى، p هو البارامتر. هاتان المعادلتان هما الصورة البارامترية للحل. وهذا الحل يظهر عندما يتعذر حذف p من المعادلتين.

٤-٢ الطريقة الأولى: معادلات يمكن تحليلها كعوامل من الدرجة الأولى فى p.

نفترض لدينا معادلة تفاضلية والتى يمكن تحليلها بالنسبة إلى p على الصورة.

$$[p - f_1(x,y)][p - f_2(x,y)] \ldots [p - f_n(x,y)] = 0$$

وبمساواة كل عامل بالصفر يعطى معادلة من الدرجة الأولى والرتبة الأولى. ونفترض أن حلولها، (مثلا) هى

$$\phi_1(x, y, c_1)=0, \phi_2(x, y, c_2)=0 \ldots, \phi(x, y, c_n)=0$$

ولاينتقص من العمومية إذا وضعنا $c_1 = c_2 = c_3 = \ldots c_n = c$.

وبالتالى يمكن وضع حل المعادلة المعطاه على الصورة

$$\phi(x, y, c)\phi_2(x, y, c)\phi_3(x, y, c) \ldots \phi_n(x, y, c)=0$$

مثال (١): حل المعادلة

$$p^2 + 2py \cot x = y^2 \quad \text{،} \quad \text{حيث} \quad p = \frac{dy}{dx}$$

الحل: لدينا

$$p^2 + 2py \cot x - y^2 = 0 \ , \quad p = dy / dx$$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة إلى p نجد أن

$$p = -y \cot x \pm (\frac{1}{2})\sqrt{4y^2 \cot^2 x + 4y^2}$$

وبأخذ الاشارتين + و − فيكون لدينا المعادلتين

$$\text{(i)} \ p = \frac{dy}{dx} = \frac{1-\cos x}{\sin x} y \quad , \qquad \text{(ii)} \ \frac{dy}{dx} = -\frac{1+\cos x}{\sin x}$$

وبفصل المتغيرات فى (i) نحصل على

$$\frac{dy}{y} = \frac{2\sin^2(x/2)dx}{2\sin(x/2)\cos(x/2)}$$

أى

$$\frac{dy}{y} = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} dx \Rightarrow \ln y = -2\ln(\cos(x/2)) + \ln c$$

أى أن الحل هو:

$$y = c\sec^2(x/2)$$

وبالمثل (ii) تعطى الحل

$$y = c\,\text{cosec}^2(x/2)$$

وعلى ذلك سيكون الحل العام هو:

$$(y - c\sec^2(x/2))(y - c\,\text{cosec}^2(x/2)) = 0 \qquad (1)$$

مثال (٢): إذا كان المنحنى الذى معادلته التفاضلية هى $p^2 + 2py\cot x = y^2$ يمر بالنقطة $(\pi/2,1)$ اثبت أن معادلة المنحنى هى:

$$(2y - \sec^2 x/2)(2y - \text{cosec}^2 x/2) = 0$$

الحل: حيث إن الحل (1) فى المثال (١) يمر بالنقطة $(\pi/2,1)$ فنجد أن

$$(1-2c)(1-2c) = 0 \Rightarrow c = 1/2$$

وبالتعويض فى (1) نجد أن الحل هو

$$(2y - \sec^2 x/2)(2y - \text{cosec}^2 x/2) = 0$$

وهى الصورة العامه للمنحنى.

مثال (٣): حل المعادلة

$$(1 - y^2 + y^4/x^2)p^2 - 2(yp/x) + y^2/x^2 = 0$$

الحل: نعيد كتابة المعادلة على الصورة

$$p^2 - \frac{2y}{x}p + \frac{y^2}{x^2} = p^2y^2 - \frac{p^2y^4}{x^2}$$

أى

$$(p-\frac{y}{x})^2=p^2y^2(1-y^2/x^2)$$

$$(p-\frac{y}{x})=\pm py\,(1-y^2/x^2)^{1/2}$$

وبالتالى بالضرب فى x نجد أن

$$(px-y)=\pm py\,(x^2-y^2)^{1/2}$$

وعلى ذلك

$$\frac{dx}{dy}[x\mp y\sqrt{x^2-y^2}]=y$$

أى

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x\mp\sqrt{x^2-y^2}}{y}$$

ولحل هذه المعادلة المتجانسة نضع $x=vy$ وبالتالى $\frac{dy}{dx}=v+y\frac{dv}{dy}$

$$v+y\frac{dv}{dy}=\frac{vy\mp\sqrt{v^2y^2-y^2}}{y}=v\mp\sqrt{v^2-1}$$

وعلى ذلك

$$y\frac{dv}{dy}=\mp\sqrt{v^2-1}\Rightarrow\frac{dv}{\sqrt{v^2-1}}=\mp\frac{dy}{y}$$

وبالتكامل نحصل على

$$\cosh^{-1}v=c\mp\ln y\Rightarrow\cosh^{-1}(x/y)=c\mp\ln y=\mp\ln c_1y, c=\ln c_1$$

مثال ٤: حل المعادلة

$$x^2(dy/dx)^2 - 2xy\,(dy/dx) + 2y^2 - x^2 = 0$$

الحل: بحل المعادلة بالنسبة إلى dy/dx نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy \pm \sqrt{4x^2y^2 - 4x^2(2y^2 - x^2)}}{2x^2} = \frac{y \pm \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$$

أى أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \pm \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)^{1/2}$$

وهى معادلة متجانسة وبوضع $y/x = v$ ، $y = xv$ وبالتعويض

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ فى المعادلة نحصل على

$$v + x\frac{dv}{dx} = v \pm \sqrt{1 - v^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \pm\frac{dx}{x}$$

وبالتكامل نحصل على

$$\sin^{-1} v = \pm \ln x \pm \ln c \quad \Rightarrow \quad \sin^{-1}(y/x) = \pm \ln(cx)$$

٤-٣ الطريقة الثانية: معادلات تحل فى x

عندما تكون المعادلة المعطاة من الدرجة الأولى فى x فانه يمكن كتابتها على الصورة

$$x = f(y, p) \qquad (1)$$

باشتقاق (1) بالنسبة إلى y فنحصل على معادلة على الصورة

$$1/p = \phi(y, p, dp/dy) \quad , \quad \frac{dy}{dx} = p$$

وهذه معادلة تفاضلية فى متغيرين y , p والذى يكون حلها على الصورة

$$F(y,p,c)=0 \qquad (2)$$

وبحذف p من (1)، (2) فنحصل على الحل المطلوب

ملحوظة (١): إذا تعذر حذف p من (1)، (2) فاننا نحصل على

$$x=F_1(p,c),y=F_2(p,c) \qquad (3)$$

وهو الحل فى الصورة البارامترية، حيث p هو البارامتر.

مثال (١): حل المعادلة

$$y=2px+p^2y$$

الحل: بالحل بالنسبة إلى x يكون لدينا

$$2x=-py+y/p \qquad (1)$$

بالاشتقاق بالنسبة إلى y نحصل على

$$\frac{2}{p}=-p-y\frac{dp}{dy}+\frac{1}{p}-\frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy}$$

أى

$$p+\frac{1}{p}=-y(dp/dy)(1+1/p^2)$$

أى

$$p(1+\frac{1}{p^2})+y(dp/dy)(1+1/p^2)=0$$

أى

$$(1+\frac{1}{p^2})[p+y\frac{dp}{dy}]=0$$

وبحذف العامل الأول لأنه يؤدى إلى حل شاذ، فيكون لدينا

$$p+y\frac{dp}{dy}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p}+\frac{dy}{y}=0$$

والتكامل

$$\ln p+\ln y=\ln c \quad \Rightarrow \quad py=c \qquad (2)$$

لحذف p من بين (1)، (2)، فاننا نحل (2) بالنسبة إلى p فيكون $p=c/y$ وبوضع قيمة p هذه فى (1) نحصل على

$$2x=-c+y^2/c \quad \Rightarrow \quad y^2=2xc-c^2$$

وهو الحل المطلوب.

مثال (٢): حل المعادلة

$$x=y+p^2$$

الحل: بالاشتقاق بالنسبة إلى y نحصل على

$$\frac{1}{p}=1+2p\frac{dp}{dy} \Rightarrow \frac{dp}{dy}=(1-p)/2p^2 \qquad (1)$$

أو

$$dy=-\frac{2p^2}{p-1}dp=-2(p+1+\frac{1}{p-1})dp$$

وبالتكامل نحصل على

$$y=c-2[\frac{1}{2}p^2+p+\ln(p-1)] \qquad (2)$$

بتعويض قيمة y فى المعادلة المعطاة نحصل على

$$x = c - 2[p + \ln(p-1)] \qquad (3)$$

تكون المعادلتان (2)، (3) هما حل المعادلة المعطاه فى الصورة البارامترية

ملحوظة: يمكن حل المعادلة بالنسبة إلى y كما سنرى فى البند القادم.

٤-٤- الطريقة الثالثة: معادلات تحل بالنسبة إلى y:

مثال (١): حل المعادلة

$$y = -px + x^4 p^2$$

الحل: بالاشتقاق بالنسبة إلى x نحصل على

$$p = -p - x\frac{dp}{dx} + 4x^3p^2 + 2x^4p(dp/dx)$$

أى

$$x\left(\frac{dp}{dx}\right)(1-2x^3p) + 2p(1-2x^3p) = 0$$

أى

$$(1-2x^3p)(x\frac{dp}{dx} + 2p) = 0$$

نحذف الحد الأول لأنه يؤدى إلى حل شاذ. وعلى ذلك

$$x\frac{dp}{dx} + 2p = 0 \;\Rightarrow\; 2\frac{dx}{x} + \frac{dp}{p} = 0$$

وبالتكامل نحصل على

$$2\ln x + \ln p = \ln c \quad \text{أى} \quad p = c/x^2$$

وبوضع قيمة p فى المعادلة المعطاه نحصل على

$$y = -\left(\frac{c}{x^2}\right)x + x^4(c^2/x^4) \quad \Rightarrow \quad y = c^2 - (c/x)$$

مثال (٢): حل المعادلة

$$y = x + a\tan^{-1} p$$

الحل: بالاشتقاق بالنسبة إلى x نحصل على

$$p = 1 + \frac{a}{1+p^2}\frac{dp}{dx} \quad \Rightarrow \quad dx = a\frac{dp}{(p-1)(1+p^2)}$$

باستخدام الكسور الجزئية نجد أن

$$dx = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{p-1} - \frac{p+1}{p^2+1}\right]dp$$

وبالتكامل نحصل على

$$x = c + \frac{1}{2}a[\ln(p-1) - \frac{1}{2}\ln(p^2+1) - \tan^{-1} p \qquad (2)$$

العلاقة (2) مع المعادلة المعطاه يكونان الحل المطلوب فى الصورة البارامترية، p هو البارامتر.

٤-٥ معادلة لاجرانج: Lagrange

تسمى المعادلة التى على الصورة

$$y = xF(p) + f(p) \qquad (1)$$

معادلة لاجرانج. وتحل بالطرق السابقة ، ولكن للسهولة سندرس جميع الحالات الخاصة للمعادلة (1)

طريقة الحل: نشتق المعادلة (1) بالنسبة إلى x فنحصل على

$$p = F(p) + xF'(p)\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

أى أن

$$p - F(p) = [xF'(p) + f'(p)]\frac{dp}{dx}$$

أى أن

$$\frac{dx}{dp} = \frac{xF'(p) + f'(p)}{p - F(p)}$$

أى

$$\frac{dx}{dp} = \frac{F'(p)}{p - F(p)}x + \frac{f'(p)}{p - F(p)}$$

وهى معادلة خطية x، p وتحل بالطرق السابقة ونحصل على العلاقة التالية

$$x = \phi(p,c) \qquad (2)$$

فإذا حذفنا p من بين (1)، (2) فنحصل على الحل المطلوب. وإذا تعذر ذلك فاننا نضع قيمة x فى (1) نحصل على

$$y = \phi(p,c)F(p) + f(p) \qquad (3)$$

والان (2) ، (3) معا تعطيان الحل المطلوب فى الصورة البارامترية، p هو البارامتر

مثال (١): حل المعادلة

$$y = apx + bp^3 \qquad (1)$$

الحل: بالاشتقاق بالنسبة إلى x فنحصل على

$$p = ap + ax\frac{dp}{dx} + 3bp^2\frac{dp}{dx} \quad \Rightarrow \quad p(1-a) = (ax + 3bp^2)\frac{dp}{dx}$$

وبالتالى

$$\frac{dx}{dp} = \frac{ax + 3bp^2}{(1-a)p}$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{ax}{(a-1)p} = \frac{3bp}{1-a} \qquad (2)$$

وهى معادلة خطية فى x ويكون عامل المكاملة

$$I.F. = e^{\int [a\,dp/(a-1)p]} = e^{a/(a-1)\ln p}$$
$$= p^{[a/(a-1)]}$$

ويكون حل المعادلة (2) هو

$$xp^{\frac{a}{a-1}} = \frac{3b}{1-a}\int p^{\frac{a}{a-1}} p\,dp + c$$
$$= \frac{3b}{1-a}\int p^{(2a-1)/(a-1)}\,dp + c$$

أى أن

$$xp^{\frac{a}{a-1}} = \frac{3b}{(1-a)}\frac{p^{(3a-2)/(a-1)}}{(3a-2)/(a-1)} + c$$
$$= \frac{3b}{(2-3a)}p^{(3a-2)/(a-1)} + c$$

$$x = \frac{3bp^2}{2-3a} + cp^{a/(1-a)} \qquad (3)$$

فيكون الحل المطلوب هو (1)، (3) فى الصورة البارامترية.

٤-٦ معادلة كليرو (Clairout)

تسمى المعادلة التى على الصورة

$$y = xp + f(p) \qquad (1)$$

معادلة كليرو. بالاشتقاق بالنسبة إلى x تحصل على

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

أى

$$[x - f'(p)]\frac{dp}{dx} = 0$$

يحذف الحد الأول لأنه يؤدى إلى الحل الشاذ فيكون لدينا

$$\frac{dp}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; dp = 0 \;\Rightarrow\; p = c$$

بوضع قيمة p فى (1) فنحصل على الحل المطلوب وهو

$$y = xc + f(c)$$

ملحوظة (١): معادلة كليرو حالة خاصة من معادلة لاجرانج عندما $F(p) = p$.

ملحوظة (٢): نتذكر أن حل معادلة كليرو تحصل عليه بوضع c بدلا من p، حيث c ثابت اختيارى.

مثال (١): حل المعادلة

$$(y - px)(p - 1) = p$$

الحل: نعيد كتابة المعادلة على الصورة

$$y-px=\frac{p}{p-1}\Rightarrow y=px+\frac{p}{p-1}$$

وهى فى صورة معادلة كليرو. فبوضع c بدلا من p فيكون الحل هو

$$y=cx+\frac{c}{c-1}\ ,$$

حيث c ثابت إختيارى.

مثال (٢): حل المعادلة

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2(x^2-a^2)-2\left(\frac{dy}{dx}\right)xy+y^2-b^2=0$$

الحل: نكتب المعادلة على الصورة

$$p^2x^2-2pxy+y^2=a^2p^2+b^2$$

أى

$$(y-px)^2=a^2p^2+b^2 \quad\Rightarrow\quad y-px=\pm\sqrt{a^2p^2+b^2}$$

$$y=px\pm\sqrt{a^2p^2+b^2}$$

وهى صورة معادلة كليرو. ويكون الحل هو

$$y=cx\pm\sqrt{a^2c^2+b^2} \quad\Rightarrow\quad (y-cx)^2=a^2c^2+b^2$$

٤-٧ معادلات تختزل إلى صورة معادلة كليرو:

باستخدام تعويض مناسب يمكن وضع بعض المعادلات في صورة معادلة كليرو. ولا توجد طريقة عامة للتعويض المباشر. وعلى القارئ تذكر التعويضات الثلاثة الهامة المعطاة في الأمثلة التالية:

الصورة الأولى: إذا كان $y^2 = pxy + f(py/x)$ نضع $y^2 = v, x^2 = u$.

مثال (١): حل المعادلة

$$x^2(y - px) = yp^2$$

الحل: بضرب المعادلة في y نحصل على

$$x^2y^2 - px^3y = y^2p^2 \Rightarrow y^2 = pxy + (py/x)^2 \qquad (1)$$

وهى في الصورة $y^2 = pxy + f(py/x)$ لذلك نستخدم التعويض $x^2 = u, y^2 = v$ وعلى ذلك

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{du} \Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{2y}{2x}\cdot\frac{dy}{dx} \Rightarrow P = \frac{y}{x}p$$

حيث $p = \frac{dy}{dx}$ ، $P = \frac{dv}{du}$. والآن

$$pxy = (x/y)Pxy = x^2P = uP$$

وبوضع هذه القيم لكل من pxy ، py/x في (1) نحصل على

$$v = uP + P^2$$

وهى في صورة معادلة كليرو ويكون حلها العام

$$v = uc + c^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = cx^2 + c^2$$

الصورة الثانية: إذا كان $e^{by}(a - bp) = f(pe^{by-ax})$

نستخدم التعويض $u = e^{ax}, v = e^{by}$.

مثال (٢): حل المعادلة

$$e^{3x}(p-1)+p^3e^{2y}=0$$

الحل: نعيد كتابة المعادلة على الصورة

$$(p-1)e^{3x}=-p^3e^{2y}\Rightarrow 1-p=p^3e^{2y-3x}$$

أى على الصورة

$$e^y(1-p)=p^3e^{3(y-x)}$$

وهى فى الصورة الثانية نضع $u=e^x$ ، $v=e^y$ (حيث $a=1$ ، $b=1$).
وعلى ذلك

$$\frac{dv}{du}=\frac{dv}{dy}.\frac{dy}{dx}.\frac{dx}{du}\Rightarrow\frac{dv}{du}=\frac{e^y}{e^x}\frac{dy}{dx}\Rightarrow P=\frac{v}{u}p$$

أو $p=\frac{uP}{v}$ حيث $p=\frac{dy}{dx}$, $P=\frac{dv}{du}$

وبالتعويض فى المعادلة $e^{3x}(p-1)+p^3e^{2y}=0$

نحصل على

$$u^3\left(\frac{uP}{v}-1\right)+\frac{u^2P^3}{v^3}v^2=0$$

أى أن $v=uP+P^3 \quad \Rightarrow \quad uP-v+P^3=0$

وهى فى صورة معادلة كليرو ويكون حلها هو

$$v=uc+c^3 \quad \Rightarrow \quad e^y=ce^x+c^3$$

الصورة الثالثة: فى بعض الأحيان التعويض $y^2=v$ يحول المعادلة إلى صورة معادلة كليرو

مثال (٣): حل المعادلتين

(i) $y = 2px + y^2 p^3$, (ii) $y - 2px + ayp^2 = 0$

الحل:

(i) بوضع $y^2 = v$ بالتالى $2y\, dy/dx = \dfrac{dv}{dx}$ أى أن $2yp = P$

بضرب المعادلة المعطاة فى y نحصل على

$$y^2 = 2pxy + y^3 p^3 \Rightarrow v = xP + P^3/8$$

وهى فى صورة معادلة كليرو ويكون الحل هو

$$v = xc + c^3/8 \Rightarrow y^2 = cx + c^3/8$$

(ii) بالضرب فى y نحصل على

$$y^2 = 2xyp - ay^2 p^2 \Rightarrow v = xp - \frac{ap^2}{4}$$

(حيث $y^2 = v$ ، $2py = P$ كما فى الجزء (i)) ويكون الحل كما سبق

$$y^2 = cx - \frac{ac^2}{4}$$

٤-٨ علاقة المميز p: p-Discriminant relation

ليكن $f(x, y, p) = 0$ معادلة تفاضلية معطاه. ولنعتبر $p(= dy/dx)$ كبارامتر. فاننا نحصل على علاقة المميز p بحذف البارامتر p من بين المعادلتين

$$f(x, y, p) = 0 \ , \quad \partial f/\partial p = 0 \qquad (1)$$

فيلي من التعريف أن علاقة المميز p تمثل المحل الهندسى (Locus) لكل نقطة التى عندها $f(x, y, p) = 0$ لها قيم متساوية للبارامتر p.

٤-٩ **علاقة المميز c**: ليكن $\phi(x,y,c)=0$ هو الحل العام أو الحل التام (complete) للمعادلة التفاضلية $f(x,y,p)=0$ ونعتبر الثابت الاختيارى c كبارامتر. فإن علاقة المميز c تحصل عليها بحذف c بين المعادلتين

$$\phi(x,y,c)=0 \quad , \quad \partial\phi/\partial c=0 \qquad (2)$$

ويلى من التعريف أن علاقة المميز c تمثل المحل الهندسى لكل نقطة التى عندها $\phi(x,y,c)=0$ لها قيم متساوية للبارامتر c.

ملحوظة: إذا كانت المعادلة تربيعية (quadratic) فى البارامتر p أو c فإن المميز p أو المميز c يمكن الحصول عليه كما يلى :

إذا كان $F_1p^2+F_2p+F_3=0$ (أو $F_1c^2+F_2c+F_3=0$) تربيعية فى p (أو c) حيث F_1، F_2، F_3 دوال فى x , y فإن علاقة المميز p (أو المميز c) تعطى العلاقة $F_2^2-4F_1F_3=0$

الحل المنفرد (الشاذ) (singular)

ليكن لدينا معادلة كليرو

$$y=px+a/p \qquad (1)$$

والذى حلها هو

$$y=mx+a/m \qquad (2)$$

حيث m ثابت إختيارى. ونعرف من الهندسة الديكارتيه أن (2) تمثل مماسا للقطع المكافئ $y^2=4ax$ لكل قيمة للثابت m. وعلى العكس كل نقطة على القطع المكافئ $y^2=4ax$ يوجد مماس عندها له المعادلة (2). وينتج من تعريف الغلاف (envelope) أن $y^2=4ax$ تمثل غلاف للعائلة (2) حيث بسهولة التأكد من أن $y^2=4ax$ هو حل للمعادلة (1). وهذا يثبت العبارة.

" معادلة غلاف العائلة لمنحنيات معطاه بالحل العام لمعادلة تفاضلية والذى يعرف بالحل المنفرد. مثل هذا الحل لايحتوى على ثابت إختيارى وأنه ليس كحالة خاصة للحل العام . ويمكن فى بعض الاحيان ممكن اختزال هذا الحل من الحل العام باعطاء قيمة خاصة للثابت الاختيارى. فى مثل هذه الحالة يكون الحل المنفرد هو حل خاص أيضاً ".

إذا كان $E(x,y)=0$ حل منفرد (غلاف) لمعادلة تفاضلية $f(x,y,p)=0$ الذى حلها العام هو $\phi(x,y,c)=0$ فإن $E(x,y)$ يكون عاملاً فى المميزين p، c. علاوة على ذلك $E(x,y)=0$ يجب أن يحقق المعادلة التفاضلية $f(x,y,p)=0$.

٤-١٠ أمثلة

مثال (١): أوجد المميز فى كل من

(أ) $p^3-px-y=0$ (ب) $p^3x-2p^2y-16x^2=0$

(جـ) $y=c(x-c)^2$.

الحل:

(أ) علينا أن نحذف p من المعادلة المعطاة

$$f(x,y,p)=p^3+px-y=0$$

والمعادلة $\frac{\partial f}{\partial p}=3p^2+x=0$ وبعد حذف p من المعادلتين فنجد أن

$$4x^3+27y^2=0$$

ملحوظة: إذا كان $f(x,y,p)=0$ من درجة n فى p فإننا نحذف p من المعادلتين $nf-p\frac{\partial f}{\partial p}=0$ ، $\frac{\partial f}{\partial p}=0$

(ب) علينا حذف p من المعادلتين

$$3f - p\frac{\partial f}{\partial p} = 3p^3x - 6p^2y - 48x^2 - 3p^3x + 4p^2y = -2p^2y - 48x^2$$

و $\frac{\partial f}{\partial p} = 3p^2x - 4py = 0$ ، نستنتج من المعادلة الأخيرة

$$9p^4x^2 = 16p^2y^2 \quad \Rightarrow \quad 9p^4x^2 - 16p^2y^2 = 0$$

ومن المعادلة الأولى $p^2 = -24\frac{x^2}{y}$ ثم نعوض عن p^2 فنجد ان

$$x^2(2y^3 + 27x^4) = 0$$

(جـ) فى هذه الحالة $g(x,y,c) = c^3 - 2c^2x + cx^2 - y = 0$ وعلينا حذف c من

$$\text{(i)} \quad 3g - c\frac{\partial g}{\partial c} = 3c^3 - 6c^2x + 3cx^2 - 3y - 3c^3 + 4c^2x - c^2x^2$$

$$= -2c^2x + 2cx^2 - 3y = 0$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{\partial g}{\partial c} = 3c^2 - 4cx + x^2 = 0$$

بضرب (i) فى (3) والمعادلة (ii) فى x^2 والجمع نجد أن

$$-2cx^2 + 2x^3 - 9y = 0$$

نعوض عن $c = \frac{2x^3 - 9y}{2x^2}$ فى (ii) فنحصل على

$$y(4x^3 - 27y) = 0$$

مثال (٢): حل المعادلة $y = 2xp - yp^2$ وابحث عن الحلول المفردة.

الحل: يمكن كتابة المعادلة المعطاة بالشكل $2x=\frac{y}{p}+yp$ وبالاشتقاق بالنسبة ألى y نجد أن

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{p}-\frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy}+p+y\frac{dp}{dy} \Rightarrow (p^2-1)(p+y\frac{dp}{dy})=0$$

وبتكامل المقدار $p+y\frac{dp}{dy}=0$ نحصل على $py=c$ وبالتعويض عن $p=\frac{c}{y}$ فى المعادلة المعطاة فنجد أن الحل العام هو $y^2=2cx-c^2$.

ان علاقة المميز p والمميز c هى $x^2-y^2=0$ وحيث إن كل من $y=x$، $y=-x$ تحقق المعادلة التفاضلية فانهما حلان مفردان للمعادلة.

مثال (٣): اوجد المميز - p والمميز - c للمعادلة

$$4p^2x(x-a)(x-b)=[3x^2-2x(a+b)+ab]^2$$

الحل: يمكن كتابة المعادلة على الصورة

$$4x(x-a)(x-b)p^2-[3x^2-2x(a+b)+ab]^2=0 \qquad (1)$$

ويكون حل المعادلة (1) هو

$$(y+c)^2=x(x-a)(x-b)=0$$

$$\Rightarrow c^2+2cy+y^2-x(x-a)(x-b)=0 \qquad (2)$$

من (1) يكون علاقة المميز p هى

$$0-4x(x-a)(x-b)[-(3x^2-2x(a+b)+ab)^2]=0$$

$$\text{i.e.} \quad x(x-a)(x-b)[3x^2-2x(a+b)+ab]^2=0 \qquad (3)$$

من (2) تكون علاقة المميز c هى

$$4y^2-4[y^2-x(x-a)(x-b)]=0$$

i.e. $\quad x(x-a)(x-b)=0$

نلاحظ أن $x=0$ تظهر فى كل المميزين. وأيضا $x=0$ مع $\frac{dx}{dy}=0$

أى $\frac{1}{p}=0$ تحقق (1) (بعد القسمة على p^2). وبالتالى $x=0$ حل منفرد (الغلاف) (singular) وأيضا لأسباب مشابهة $x-a=0$ ، $x-b=0$ أيضاً حلولا منفردة.

مثال (٤): اوجد المميزين p ، c والحلول المنفردة للمعادلة

$$p^2(1-x^2)=1-y^2$$

الحل: لدينا المعادلة

$$p^2(1-x^2)-(1-y^2)=0 \qquad (1)$$

ويكون علاقة المميز p هى

$$0+4(1-x^2)(1-y^2)=0$$

$$(1-x)(1+x)(1-y)(1+y)=0 \qquad (2)$$

وبحل (1) بالنسبة إلى p نجد أن

$$p=\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2}\,/\sqrt{1-x^2}$$

$$dy/\sqrt{1-y^2}-dx/\sqrt{1-x^2}=0$$

وبالتكامل نحصل على

$$\sin^{-1} y - \sin^{-1} x = c',$$ c' ثابت اختيارى

أو

$$\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} y - \left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x\right) = c' \Rightarrow \cos^{-1} x - \cos^{-1} y = c'$$

بأخذ cos للطرفين نحصل على

$$\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-y^2)} + xy = \cos c' = c$$

أو

$$(1-y^2)(1-x^2) = (c - yx)^2$$

$$c^2 - 2xyc + x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad (3)$$

يلاحظ أن مميز c يعطى من

$$\text{i.e} \quad (1-x^2)(1-y^2) = 0 \Rightarrow (1-x)(1+x)(1-y)(1+y) = 0 \qquad (4)$$

نلاحظ أن $1 - x = 0$ موجودة فى المميز p والمميز c وتحقق (1) وبالتالى هما حلولا منفردة.

مثال (٥): اوجد المميزين p، c للمعادلة

$$p^2(2-3y)^2 = 4(1-y)$$

الحل: لدينا

$$p^2(2-3y)^2 - 4(1-y) = 0$$

وعلاقة المميز p هى

$$0 - 4(2-3y)^2.4(1-y) = 0 \qquad (1)$$

i.e $\quad (2-3y)^2(1-y)=0 \qquad (2)$

وبالحل بالنسبة إلى p نجد أن

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{2\sqrt{1-y}}{(2-3y)}$$

$$dx=\frac{2-3y}{2\sqrt{1-y}}dy \Rightarrow \frac{3-3y-1}{2\sqrt{1-y}}dy=[\frac{3}{2}\sqrt{1-y}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-y}}]dy$$

وبالتكامل

$$x+c=(1-y)^{1/2}[1-(1-y)]=(1-y)^{1/2}.y$$

وبالتربيع نحصل على

$$c^2+2xc+x^2-y^2(1-y)=0 \qquad (3)$$

ويكون المميز c هو

$$4x^2-4.1(x^2-y^2(1-y)]=0 \quad \Rightarrow \quad y^2(1-y)=0$$

وحيث إن $1-y=0$ موجود في كل من المميزين وتعطى الحل المنفرد. بينما $y=0$ موجودة مربعة في المميز c وغير موجود في المميز p وتعطى المحل الهندسي العقدى. واخيراً $(2-3y)=0$ وهى موجودة مربعة في المميز p وليس في المميز c وتعطى محلاً هندسياً.

تمارين

١- حل المعادلات التالية (حيث $p = dy/dx$)

(i) $p^2 - 5p + 6 = 0$, (ii) $yp^2 + (x-y)p - x = 0$,

(iii) $x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0$, (iv) $xy^2(p^2+2) = 2py^2 + x^3$,

(v) $xyp^2 + p(3x^2 - 2y^2) - 6xy = 0$,

(vi) $p^2 - 2p\cos x + 1 = 0$, (vii) $p^2 - ax^3 = 0$,

(viii) $x^2p^3 + yp^2(1 + x^2y) + py^3 = 0$,

٢- حل المعادلات التالية

(i) $x = 2px + y^2p^3$, (ii) $xp^3 = a + bp$,

(iii) $(2x - b)p = y - ayp^2$, (iv) $xp^2 - 2yp + ax = 0$,

(v) $y = 2px - p^2$, (vi) $y = xp^2 + p$,

(vii) $y = a + bp + dp^2$,

٣- حل المعادلات التالية

(i) $(x-a)p^2 + (x-y)p - y = 0$,

(ii) $y = px + \sqrt{a^2p^2 + b^2}$, (iii) $(y - px)^2/(1 + p^2) = a^2$,

(iv) $y = x\ dy/dx + 9(dy/dx)^2$, (v) $y = xp + +a/p$,

٤- حل المعادلات التفاضلية التالية

(i) $x^2(y-px)=yp^2$, ضع $y^2=v, x^2=u$

(تعويض كما فى (i))

(ii) $xy(y-px)=x+yp$,

(iii) $x^2p^2+py(2x+y)+y^2=0$,

(ضع $y=u$ ، $xy=v$)

(iv) $(y+xp)^2=x^2p$, (ضع $xy=v$)

$y^2(y-xp)=x^4p^2$ (v) (ضع $x=1/u, y=1/v$)

٥- اوجد الحل المفرد للمعادلات التالية

(i) $y=2px+f(xp^2)$ (ii) $4p^2=qx$

(iii) $x^2p^2-3xyp+2y^2+x^3=0$

٦- اوجد الحلول المفردة والمميز p والمميز c للمعادلات التالية

(i) $x^3p^2+x^2yp+a^3=0$ (ii) $y+px=x^4p^2$

(iii) $xp^2-2yp+4x=0$ (iv) $3y=2px-p^2/x$

(v) $xp^2-2yp+ax=0$ (vi) $(8y^3-27)x=12p^2y$

الباب الخامس

استقلال حلول المعادلات التفاضلية الخطية

Independence of soluitions of linear differential equations

٥-١ **مقدمة:** سنبدأ في هذا الباب بدراسة استقلال حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ثم بعد ذلك نعمم الدراسة إلى معادلات تفاضلية خطية من الرتبة النونية.

٥-٢- **نظرية وجود ووحدوية الحل** : نعتبر معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية على الصورة

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=r(x) \qquad (1)$$

حيث a_0 ، a_1 ، a_2 و r دوال في x ومتصلة على الفترة (a, b) ، $a_0 \neq$ لكل $x\in(a,b)$. ليكن c_1 ، c_2 ثابتين إختياريين ، $x_0\in(a,b)$ فإنه يوجد حل وحيد $y(x)$ للمعادلة (1) يحقق $y(x_0)=c_1$ ، $y'(x_0)=c_2$. وعلاوة على ذلك يكون هذا الحل معرف على الفترة (a, b).

ملحوظة (١): هذه النظرية هي نظرية وجود لأنها تنص أن مسألة القيمة الحدية لها حل. وكذلك هي نظرية وحدوية لأنها تنص على أنه يوجد حل وحيد فقط. وهذه النظرية تنطبق على المعادلة المتجانسة المناظرة.

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0 \qquad (2)$$

ملحوظة (٢): في هذه الباب سنتعرض دون برهان أن للنظرية السابقة الاساسية لمسألة القيمة الابتدائية متحققة.

ملحوظة (٣): قد لايمكن تحقيق شروط نظرية الوجود والوحدوية. فمثلاً إذا كان $a_0(x)=0$ لبعض النقط $x\in(a,b)$ فإن حل المعادلة (1) قد لايكون وحيداً أو قد لايوجد على الاطلاق كما يتضح من المثال التالي.

مثال (١): اثبت أن الدالة $y=cx^2+x+3$ على الفترة $(-\infty,\infty)$ يكون حلاً ليس وحيداً لمسألة القيمة الأبتدائية

$$x^2y''-2xy'+2y=6, \quad y(0)=3, \quad y'(0)=1$$

الحل: لدينا

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 6 \qquad (1)$$

والحل المعطى

$$y(x) = cx^2 + x + 3 \qquad (2)$$

من (2) نجد أن

$$y' = 2cx + 1, \qquad y'' = 2c$$

الطرف الأيسر من (1) هو

$$x^2(2c) - 2x(2cx + 1) + 2(cx^2 + x + 3) = 6$$

وهذا يثبت أن (2) حل للمعادلة (1). ولكن من (2) ، (3) نجد أن

$$y(0) = (cx_0) + 3 = 3, y'(0) = 2c(0) + 1 = 1$$

وبمقارنة (1) مع

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = r$$

يكون $a_0 = x^2$ ، $a_1 = -2x$ ، $a_2(x) = 2$ ، $r = 6$ وهى دوال متصلة على $(-\infty, \infty)$ وحيث أن $a_0 = x^2 = 0$ لقيمة $x = 0$ فى الفترة $(-\infty, \infty)$ وبالتالى يكون الحل $y = cx^2 + x + 3$ ليس وحيداً. فإننا نرى أن $y = cx^2 + x + 3$ يكون حلاً لأى قيمة للثابت c. ومثال ذلك الحلين $y = 2x^2 + x + 3$ ، $y = 3x^2 + x + 3$ كل منهما حل للمعادلة (1) مع

$$y(0) = 3 \quad ، \quad y'(0) = 1$$

ملحوظة (٤): نظرية الوجود والوحدوية يمكن تعميمها لمعادلة تفاضلية خطية من الرتبة النونية.

نتيجة: إذا كان $y(x)$ حلا للمعادلة التفاضلية

$$a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) = 0$$

تحقق $y(x_0)=0$ ، $y'(x_0)=0$ لبعض $x_0\in(a,b)$ فإن $y(x)\equiv 0$ على (a, b).

البرهان: من التعريف ، $y(x)$ حل للمعادلة المعطاة والذى يحقق $y(x_0)=0$ ، $y'(x_0)=0$.،ايضاً من نظرية الوجود والوحدوية فإن $y(x)$ حل وحيد يحقق $y(x_0)=0$ ، $y'(x_0)=0$. ويلى ذلك $y(x)\equiv 0$ على (a, b) أى أن $y(x)$ يكون صفراً تطابقياً على (a, b).

ملحوظة (١): يقال أن الدالة الحقيقية $y(x)$ تتطابق صفرياً على فترة (a, b) ونكتب $y(x)\equiv 0$ إذا كان $y(x)=0$ لكل $x\in(a,b)$.

مثال (٢): اثبت أن $y=3e^{2x}+e^{-2x}-3x$ هو الحل الوحيد لمسألة القيمة الابتدائية $y''-4y=12x\,, y(0)=4, y'(0)=1$.

الحل: لدينا

$$y''-4y=12x \tag{1}$$

والحل المعطى

$$y=3e^{2x}+e^{-2x}-3x \tag{2}$$

من (2) يكون لدينا

$$y'=6e^{2x}-2e^{-2x}-3,\ \ y''=12e^{2x}+4e^{-2x} \tag{3}$$

الطرف الأيسر للمعادلة (1)

$$12e^{x}+4e^{-2x}-4(3e^{2x}+e^{-2x}-3x)\equiv 12x$$

مبيناً أن (2) يكون حلاً للمعادلة (1). ومن (2) ، (3) نجد أن

$$y=(0)=4, y'(0)=1$$

بمقارنة (1) مع $a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=r(x)$ يكون لدينا

$$a_0(x)=1,\ a_1(x)=0,\ a_2(x)=-4,\ r(x)=12x$$

وهى كلها دوال متصلة على $(-\infty,\infty)$ وأن $a_0(x)=1\neq 0$ لكل $x\in(-\infty,\infty)$.
وبالتالى من نظرية الوجود والوحدوية يلى أن الحل (2) هو الحل الوحيد للمعادلة (1) محققاً الشروط الابتدائية.

٥-٣ الحلول المرتبطة والمستقلة خطيا:

Linearly dependent and independent solutions

نعتبر معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية

$$a_0(x)y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_2(x)y(x)=0 \qquad (1)$$

حيث a_0 ، a_1 ، a_2 دوال متصلة على (a, b) ، $a_0(x)\neq 0$ لكل $x\in(a,b)$.

يقال أن الحلين $y_1(x)$ و $y_2(x)$ مرتبطان خطياً إذا وجد ثابتان c_1 و c_2 ليس كليهما صفراً بحيث إن

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0, \quad x\in(a,b)$$

كما يقال أن الحلين $y_1(x)$ و $y_2(x)$ مستقلان (غير مرتبطين) خطياً إذا لم يكونا مرتبطين أى أن الحلين y_1 و y_2 مستقلان خطياً إذا كان

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0 \;\Rightarrow\; c_1=0, c_2=0,\ x\in(a,b)$$

٥-٤ الرونسكى: Wronskian

ليكن $y_1(x)$ و $y_2(x)$ حلين للمعادلة التفاضلية (1). فإن الرونسكى للحلين y_1 و y_2 يرمز له بالمحدد W ويعرف بالآتى

$$W(y_1,y_2)=W=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

٥-٥ بعض النظريات الهامة:

نظرية (١): إذا كان $y_1(x)$ و $y_2(x)$ حلين للمعادلة التفاضلية

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0 \qquad (1)$$

فإن التركيبة (combination) الخطية $c_1y_1+c_2y_2$ ، حيث c_1 ، c_2 ثابتان، يكون أيضاً حلا للمعادلة المعطاة

البرهان: حيث إن $y_1(x)$ و $y_2(x)$ حلين للمعادلة (1) فإن

$$a_0(x)y_1''+a_1(x)y_1'+a_2(x)y_1=0 \tag{2}$$

$$a_0(x)y_2''+a_1(x)y_2'+a_2(x)y_2=0 \tag{3}$$

ليكن

$$u(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \tag{4}$$

وعلى ذلك

$$u'(x)=c_1y_1'+c_2y_2', u''(x)=c_1y''+c_2y_2'' \tag{5}$$

وعلى ذلك يكون لدينا

$$a_0(x)u''(x)+a_1(x)u'(x)+a_2(x)u(x)=$$

$$=a_0(x)[c_1y_1''+c_2y_2'']+a_1(x)[c_1y_1'+c_2y_2']+a_2(x)[c_1y_1+c_2y_2]$$

$$=c_1(x)[a_0y_1''+a_1y_1'+a_2y_2]+c_2[a_0y_2''+a_1y_2'+a_2y]$$

$$=c_1.0+c_2.0=0$$

وبالتالى

$$a_0(x)u''(x)+a_1(x)u'(x)+a_2(x)u(x)=0$$

مثبتاً أن $u(x)$ أى $c_1y_1+c_2y_2$ هو أيضاً حل للمعادلة (1).

ملحوظة: النتيجة السابقة يمكن تعميمها كما يلى: إذا كان $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)$ ، n من الحلول للمعادلة التفاضلية

$$a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+...+a_{n-1}(x)y'(x)+a_n(x)y(x)=0$$

فإن التركيبة الخطية $c_1y_1+c_2y_2+...+c_ny_n$ تكون أيضاً حلا لنفس المعادلة حيث $c_i, i=1,2,...,n$ ثوابت .

نظرية (٢): يوجد حلان مستقلان خطياً $y_1(x)$ و $y_2(x)$ للمعادلة

$$a_0(x)y''(x)+a_1y'(x)+a_2(x)y(x)=0$$

حيث أن كل حل $y(x)$ يمكن كتابته على الصورة

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x),\quad x\in(a,b)$$

حيث c_1 و c_2 ثابتان

البرهان: ليكن $x_0\in(a,b)$ ، $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ هما حلان للمعادلة (1) يحققان

$$y_1(x_0)=1,\ y_1'(x_0)=0 \tag{2}$$

$$y_2(x_0)=0,\ y_2'(x_0)=1 \tag{3}$$

لاثبات أن y_1 و y_2 مرتبطين خطياً. فإنه من التعريف يوجد ثابتان c_1 و c_2 لايساويان الصفر معاً بحيث إن

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0,\quad x\in(a,b) \tag{4}$$

وبالتالى

$$c_1y_1'+c_2y_2'=0,\quad x\in(a,b) \tag{5}$$

ومن الافتراض $x_0\in(a,b)$. فإنه من (4) ، (5) نجد أن

$$c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=0 \tag{6}$$

$$c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)=0 \tag{7}$$

باستخدام (2) ، (3) فإنه من (6) ينتج $c_1=0$ ومن (7) ينتج أن $c_2=0$ وهذا يتناقض مع أن c_1 و c_2 لايساويان الصفر معاً. وعلى ذلك فإن افتراضنا أن $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ مرتبطان خطياً غير ممكن وبالتالى من التعريف يجب أن يكون $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ مستقلين خطياً. والأن نثبت الجزء الأخير من النظرية.

ليكن $y(x)$ أى حل للمعادلة (1) يحقق

$$y(x_0)=c_1, \qquad y'(x_0)=c_2 \tag{8}$$

ليكن

$$u(x)=y(x)-c_1y_1(x)-c_2y(x) \tag{9}$$

المعادلة (9) تبين أن $u(x)$ تركيبة خطية للحلول y ، y_1 ، y_2 للمعادلة (1) وبالتالى فإن $u(x)$ أيضاً حلاً للمعادلة (1) ومن تعميم النظرية (١) ومن (9) نحصل على

$$u(x_0)=y(x_0)-c_1y_1(x_0)-c_2y_2(x_0)=0 \tag{10}$$

باستخدلم (2) ، (3) ، (8) . ومن (10) نحصل على

$$u'(x_0)=y'(x_0)-c_1y_1'(x_0)-c_2y_2'(x_0)=0$$

باستخدام (2) ، (3) ، (8). وبالتالى نجد أن $u(x)$ حلاً للمعادلة (1) يحقق $u(x_0)=0$ ، $u'(x_0)=0$ وبالتالى $u(x)\equiv 0$ على (a, b) وبالتالى من (9) يكون لدينا

$$y(x)-c_1y_1(x)-c_2y_2(x)=0$$

أى

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

حيث c_1 و c_2 ثابتان مناسبان معطيان بالعلاقة (8).

نظرية (٣): الحلان $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ للمعادلة

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0 \tag{I}$$

$x\in(a,b)$ و $a_0(x)\neq 0$ يكونان مرتبطين خطياً إذا كان الرونسكى يساوى الصفر تطابقياً.

البرهان: (أ) الشرط ضرورى: ليكن $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ مرتبطين خطياً فإنه من التعريف يوجد ثابتان c_1 و c_2 لايساويان الصفر معاً بحيث إن

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0 \quad ، \quad x\in(a,b) \text{ لكل} \tag{1}$$

وعلى ذلك

$$cy_1'(x)+c_2y_2'(x)=0 \quad ، \quad x\in(a,b) \quad \text{لكل} \qquad (2)$$

وحيث إن c_1 و c_2 لايساويان الصفر معاً فإن نظام المعادلات (1) ، (2) يكون له حل غير صفرى تحت الشرط

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=0 \quad ، \quad x\in(a,b) \quad \text{لكل}$$

أى أن $W(x)\equiv 0$ على (a, b) أى $W(x)$ يكون صفرا تطابقيا.

(ب) **الشرط كافى:** نفترض أن الرونسكى للحلين $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ يساوى الصفر تطابقيا على (a, b) ، ليكن

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=0, \quad x\in(a,b) \qquad (3)$$

ليكن $x_0\in(a,b)$ وعلى ذلك من (3) يكون لدينا

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}=0 \qquad (4)$$

وهذا هو الشرط لوجود ثابتين K_1 ، K_2 ليس كلاهما صفراً بحيث إن

$$K_1y_1(x_0)+K_2y_2(x_0)=0 \qquad (5)$$

$$K_1y_1'(x_0)+K_2y_2'(x_0)=0 \qquad (6)$$

ليكن

$$y(x)=K_1y_1(x)+K_2y_2(x) \qquad (7)$$

وبالتالى يكون $y(x)$ هو تركيبة خطية للحلين $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ يكون أيضاً حلاً للمعادلة المعطاة. وعلى ذلك من (7)

$$y'(x)=Ky_1'(x)+K_2y_2'(x) \qquad (8)$$

من (7) باستخدام (5) نجد أن

$$y(x_0)=K_1y_1(x_0)+K_2y_2(x_0)=0$$

و (8) باستخدام (6) نجد أن

$$y'(x_0)=K_1y_1'(x_0)+K_2y_2'(x_0)=0$$

وبالتالى وجدنا أن $y(x)$ هو حل للمعادلة المعطاة بحيث إن $y(x_0)=0$ ، $y'(x_0)=0$. وعلى ذلك يكون $y(x)\equiv 0$ على (a, b) ومن (7) يكون لدينا

$$K_1y_1(x)+K_2y_2(x)=0 \quad ، \quad x\in(a,b) \quad لكل$$

حيث K_1 ، K_2 ثابتان لايساويان الصفر معاً ومن التعريف يكون $y_1(x)$، $y_2(x)$ حلين مرتبطين.

نتيجة: يكون الحلان $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ للمعادلة (I) مستقلين خطياً إذا كان وفقط إذا كان $W(y_1,y_2)\neq 0$ عند نقطة $x_0\in(a,b)$.

البرهان: (أ) الشرط ضرورى: ليكن $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ حلين مستقلين وعلى ذلك من النظرية السابقة لايكون $W(x)\equiv 0$ على (a, b) وإلا كان $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ مرتبطين خطياً ، يتبع ذلك وجود $x_0\in(a,b)$ بحيث إن $W(x_0)\neq 0$.

(ب) الشرط كافى: نفترض وجود $x_0\in(a,b)$ بحيث إن $W(x_0)\neq 0$. يلى ذلك أن $W(x)\neq 0$ على (a, b) وبالتالى يكون $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ مستقلين خطياً من النظرية السابقة.

نظرية (٤): الرونسكى لحلين للمعادلة التفاضلية (1) إما أن يساوى الصفر تطابقياً أو لايساوى الصفر إطلاقاً على الفترة (a, b).

البرهان: لدينا المعادلة (1)

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0, a_0(x)\neq 0, x\in(a,b) \qquad (1)$$

ليكن $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ حلين للمعادلة (1) وعلى ذلك يعطى الرونسكى بالعلاقة

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x) \qquad (2)$$

باشتقاق طرفى (2) نحصل على

$$W'(x)=\frac{d}{dx}[y_1y_2'-y_2y_1']=(y_1'y_2'-y_1y_2'')-(y_2'y_1'-y_2y_1'')$$

$$=y_1(x)y_2''(x)-y_2(x)y_1''(x) \qquad (3)$$

وحيث إن $a_0(x)\neq 0$ وبقسمة (1) على $a_0(x)$ يكون لدينا

$$y''(x)=-\left(\frac{a_1}{a_0}\right)y'-\left(\frac{a_2}{a_0}\right)y \qquad (4)$$

وحيث إن $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ حلان للمعادلة (4) [أى (1)] ، فإن

$$y_1''(x)=-\left(\frac{a_1}{a_0}\right)y_1'-\left(\frac{a_2}{a_0}\right)y_1 \qquad (5)$$

$$y_2''(x)=-\left(\frac{a_1}{a_0}\right)y_2'-\left(\frac{a_2}{a_0}\right)y_2 \qquad (6)$$

بالتعويض عن قيم y_1'' ، y_2'' معطاه بالعلاقتين (5) ، (6) فى (3) نحصل على

$$W'(x)=y_1(x)\left[-\left(\frac{a_1}{a_0}\right)y_2'-\left(\frac{a_2}{a_0}\right)y_2(x)\right]-$$

$$-y_2(x)\left[-\left(\frac{a_1}{a_0}\right)y_1'-\left(\frac{a_2}{a_0}\right)y_1(x)\right]$$

$$=-(a_1/a_0)[y_1y_2'-y_2y_2']$$

$$=-(a_1/a_0)W(x) \qquad (7)$$

وعلى ذلك

$$a_0(x)W'(x)+a_1(x)W(x)=0 \qquad (8)$$

ومن المعادلة (8) نرى أن $W(x)$ هى حل لها ويوجد لدينا حالتين:

(أ) ليكن $W(x)\neq 0$ على (a, b) فيكون الجزء الثانى من النظرية قد اثبت.

(ب) إذا كان $W(x_0)=0$ ممكناً لقيمة $x\in(a,b)$ فإنه من (7)

$$W'(x_0)=-\left(\frac{a_1}{a_0}\right)W(x_0)=0$$

وبالتالى يكون $W(x)$ حل للمعادلة (8) بحيث $W(x_0)=0$ ، $W'(x_0)=0$. وعلى ذلك $W(x)=0$ على (a, b) أى أن الرونسكى يكون صفريا تطابقياً على (a, b) وهذا يثبت الجزء الأول من النظرية.

٥-٦ المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة النونية:

يمكن تعميم ماشرحناه سابقاً فى البنود السابقة إلى معادلات تفاضلية خطية من الرتبة النونية على الصورة

$$P_0(x)y^{(n)}+P_1(x)y^{n-1}+...+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)y=r(x) \qquad (1)$$

او على الصورة

$$L(y)=(P_0D^n+P_1D^{n-1}+...+P_{n-1}+P_n)y=r(x) \qquad (2)$$

حيث P_i ، $i=0,1,...,n$ دوال فى x أو ثوابت ، $P_0(x)\neq 0$ على (a, b).

سوف نسرد بعض النظريات بدون برهان حيث يكون برهانها على نفس طريقة برهان المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية التى سنشرخها لاحقا.

نظرية (١): إذا كانت $y_1,y_2,...,y_n$ حلول معادلة تفاضلية خطية من الرتبة النونية متجانسة (أى $r(x)=0$) فإن

$$y=c_1y_1+c_2y_2+...+c_ny_n$$

هو أيضاً حلاً لها.

ويمكن تعريف الرونسكى لهذه الحلول على الصورة

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

نظرية (٢): أى معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة النونية ليس لها اكثر من n من الحلول المستقلة خطياً.

نظرية (٣): ليكن $u_1, u_2, ..., u_n$ مجموعة من الدوال المرتبطة خطياً على الفترة $a \le x \le b$ وأن كل دالة قابلة للاشتقاق $(n-1)$ من المرات على الفترة (a, b) فإن الرونسكى لهذه المجموعة من الدوال يكون صفراً تطابقياً.

نظرية (٤): إذا كان الرونسكى لهذه المجموعة من الدوال لايساوى الصفر عند نقطة واحدة فى الفترة $a \le x \le b$ فإن هذه الدوال تكون مستقلة خطياً.

نظرية (٥): إذا كانت $u_1, u_2, ..., u_n$ حلول المعادلة الخطية المتجانسة $L(y)=0$ فى فترة (a, b) حيث الرونسكى لها يتلاشى عند أى نقطة فى (a, b) فإن هذه الحلول تكون مرتبطة خطياً.

نظرية (٦): لتكن الدوال $u_1, u_2, ..., u_n$ حلولا للمعادلة $L(y)=0$ على الفترة $a \le x \le b$. فإن أما الرونسكى لهذه الدوال يساوى الصفر تطابقياً على $a \le x \le b$ (وتكون فى هذه الحالة الدوال غير مستقلة خطيا) أو لايتلاشى عند أى نقطة فى $a \le x \le b$ (وتكون فى هذه الحالة الدوال مستقلة خطياً).

نظرية (٧): الشرط الضرورى والكافى لكى تكون الحلول $y_1, y_2, ..., y_n$ للمعادلة التفاضلية $L(y)=0$ مستقلة خطياً هو أن $W(y_1, y_2, ..., y_n) \ne 0$.

٥-٧ أمثلة محلولة:

مثال (١): إذا كان $y_1(x)=\sin 3x$ ، $y_2(x)=\cos 3x$ حلين للمعادلة التفاضلية $y''+9y=0$. اثبت أن y_1 ، y_2 مستقلين خطياً.

الحل: الرونسكى للحلين y_1 ، y_2 هو

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \sin 3x & \cos 3x \\ 3\cos 3x & -3\sin x \end{vmatrix}=-3\neq 0$$

وحيث إن $W(x)\neq 0$ فإن y_1، y_2 هما حلان مستقلان خطيا للمعادلة المعطاة.

مثال (٢): أثبت أن e^{3x}، e^{2x} هما حلان مستقلان خطيا للمعادلة $y''-5y'+6y=0$. اوجد الحل $y(x)$ الذى له الخاصية $y(0)=0$ ، $y'(0)=1$.

الحل: بسهولة يمكن اثبات أن كل من e^{2x} ، e^{3x} يحقق المعادلة وبهذا يكون كل منهم حلاً. الرونسكى للحلين y_1، y_2 هو

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}=3e^{5x}-2e^{5x}=e^{5x}\neq 0$$

وهذا يثبت أن الحلين مستقلان خطياً. ويكون الحل العام للمعادلة هو

$$y(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{3t},\ y(0)=c_1+c_2=0$$

$$y'(t)=2c_1e^{2t}+3c_2e^{3t},\ y'(0)=2c_1+3c_2=1$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على $c_2=1$، $c_1=-1$ ويكون الحل المطلوب هو $y=e^{3x}-e^{2x}$.

مثال (٣): اثبت أن x, e^x مستقلان خطياً على المحور x.

الحل:

$$W(x)=\begin{vmatrix} x & xe^{3x} \\ 1 & e^x+xe^x \end{vmatrix}=x(e^x+xe^x)-xe^x=x^2e^x$$

وحيث إن $W(x)\neq 0$ ، على المحور x فهما مستقلان خطياً.

مثال (٤): اثبت أن الرونسكى للدالتين x^2، $x^2\ln x$ غير صفرى وهل يمكن أن تكون هاتان الدالتان حلين مستقلين لمعادلة تفاضلية. وإذا كان كذلك اوجد هذه المعادلة.

الحل: الرونسكى هو

$$W(x)=\begin{vmatrix} x^2 & x^2\ln x \\ 2x & 2x\ln x+x \end{vmatrix}=x(2x\ln x+x)-2x^3\ln x=x^3$$

وهى ليست صفراً تطابقياً على $(-\infty,\infty)$ وعلى ذلك يكون الحلان $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ مستقلين خطياً. وللحصول على المعادلة التفاضلية نستخدم ما شرحناه فى الباب الأول فنحصل على المعادلة التفاضلية التى يكون x^2 ، $x^2\ln x$ حلين لها وهى $x^2y''-3xy'+4y=0$

تمارين

١- اثبت أنه إذا كان $m_1 \neq m_2$ ، فإن الدالتين e^{m_1x} ، e^{m_2x} مستقلتان خطياً.

٢- اثبت أن $y_1 = \sin x$ ، $y_2(x) = \sin x - \cos x$ حلان مستقلان خطياً للمعادلة $y'' + y = 0$.

٣- ادرس الاستقلال الخطى للدوال التالية

(i) $\sin x, \cos x,$ (ii) $\cos 3x, \cos x, \cos^2 x$

٤- اثبت أن $1, x, x^2$ مستقلة خطياً.

٥- أثبت أن $y_1(x) = e^{-x/2}\sin(x\sqrt{3}/2), y_2 = e^{-x/2}\cos(x\sqrt{3}/2)$ حلان مستقلان خطياً للمعادلة التفاضلية

$$y'' + y' + y = 0$$

٦- اثبت أن $y = 2x - 1 + x(\ln x - 1)$ هو حل وحيد للمعادلة $xy'' - 1 = 0$ يحقق الشرطين $y(1) = 0$ ، $y'(1) = 2$.

٧- اوجد الحل الوحيد للمعادلة $y'' = 1$ يحقق $y(0) = 1$ ، $y'(0) = 2$.

٨- اثبت أن $y = \frac{1}{4}\sin 4x$ هو حل وحيد لمسألة القيمة الابتدائية $y'' + 16y - 0$ حيث $y(0) = 0$ ، $y'(0) = 1$.

٩- ليكن φ_1 ، φ_2 حلين غير بديهين للمعادلة $L(y) = 0$ على الفترة I.
اثبت أن φ_1 ، φ_2 يكونا مرتبطين خطياً على I إذا وإذا فقط كان

$$W(\varphi_1, \varphi_2, x) = 0 \;, \qquad x \in I$$

حيث

$$L(y) = y'' + a(x)y' + b(x)y$$

١٠- ادرس ارتباط الدوال التالية

(i) $f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2 - x + 1,\ f_3(x) = x^2 + 1$

(ii) $f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = e^{-x},\ f_3(x) = \sin x$

١١- ليكن $y = u + iv$ ، $\bar{y} = u - iv$ إذا كان y ، $\bar{y}$ حلين مستقلين أثبت أن u ، v يكونا مستقلين.

١٢- اثبت أن الرونسكى للدالتين $\varphi_1(x) = x^2$ ، $\varphi_2(x) = x|x|$ يساوى الصفر فى كل مكان.

١٣- اوجد الرونسكى للنظم الخطية التالية

$$x_1' = x_1 \sin t + x_2 \cos t, \quad x_2' = -x_1 \cos t + x_2 \sin t$$

$$x_1' = f(t) x_2, \quad x_2' = g(t) x_1$$

١٤- اثبت أن الدوال المعطاه هى حلول مستقلة خطياً للمعادلات المبينة

(i) $y'' + y = 0, \qquad \sin x, \cos x, (-\infty < x < \infty)$

(ii) $y'' + y = 0, \qquad \sin x, \sin x - \cos x, (-\infty < x < \infty)$

(iii) $y'' - y = 0, \qquad e^x, e^{-x}, (-\infty < x < \infty)$

(iv) $y'' - 2y' + y = 0, \qquad e^x, xe^x, (0 \le x \le 3)$

(v) $y''' + y' = a, \qquad -2\sin x, 3\cos x, (-\pi \le \bar{x} \le \pi)$

(vi) $y'''' - y = 0, \qquad e^x, e^{-x}, \sin x, \cos x, (-\infty < x < \infty)$

الباب السادس

معادلات تفاضلية خطية من الرتبة النونية ذات معاملات ثابتة

Linear nth order differential equations with constant coefficients

٦-١ مقدمة: لنرمز بالرمز D للرمز $\frac{d}{dx}$ و D^2 للرمز $\frac{d}{dx^2}$ وهكذا.
تسمى الرموز D و D^2 و D^3 و.... بالمؤثرات (operators) ودليل D "أس D" يبين عدد مرات عملية الاشتقاق التى يجب إجراؤها. فمثلا D^3x^4 تدل على اشتقاق x^4 ثلاث مرات. وبالتالى $D^3x^4 = 24x$.

وتحقق الخواص التالية

1- $D^m + D^n = D^n + D^m$, 2- $D^nD^m = D^mD^n = D^{m+n}$

3- $D(u+v) = Du + Dv,$ حيث u و v دالتان فى x

4- $(D-\alpha)(D-\beta) = (D-\beta)(D-\alpha),$ حيث α و β ثابتان

الأس السالب للمؤثر D: يكون D^{-1} مكافئا لعملية التكامل فمثلا $D^{-1}x = \int xdx = x^2/2$. ولكن من المهم أن نلاحظ أن الهدف الرئيسى للمؤثر D^{-1} هو إيجاد تكامل ولكن ليس التكامل التام. وبالتالى ثابت التكامل الناتج من عملية التكامل يجب حذفه وعلى ذلك $(D^{-1})^5 = D^{-5}$.

والدليل السالب لمؤثر D يدل على عدد مرات عملية التكامل التى يتم إجراؤها فمثلا

$$D^{-2}x = \int [\int xdx]dx = \int \frac{x^2}{2}dx = x^3/6$$

ويجب ملاحظة أن $1/D^m = D^{-m}$، و $DD^{-1} = 1$. وان المؤثر D بدليل سالب يحقق الخواص الأربعة السابقة.

وعلاوة على ذلك يمكن أن نكتب

$$d^2y/dx^2 + ady/dx + a_2y \equiv (D^2 + a_1D + a_2)y = f(D)y$$

حيث $f(D)$ مؤثر. فاذا كان $f_1(D)$ ، $f_2(D)$ مؤثرين فان $f_1(D)f_2(D)$ هو أيضا مؤثر بحيث أن

$$f_1(D)f_2(D)=f_2(D)f_1(D)$$

وأيضاً إذا كانت u دالة فى x ، k ثابت فان

$$f(D)ku=kf(D)u$$

ومن المناقشات السابقة نلاحظ أن المؤثر D يحقق قوانين الجبر الاساسية وبالتالى يمكن النظر إليه ككمية جبرية فى إتجاهات متعددة.

٢-٦ المعادلات التفاضلية التى على الصورة

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+...+a_n y=X \qquad (1)$$

بالمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة النونية

حيث X دالة فى x فقط و a_1 و a_2 و ... و a_n ثوابت وباستخدام الرموز $D,D^2,...,D^n$ التى شرحناها سابقاً فان المعادلة (1) تؤول إلى

$$D^n y+a_1D^{n-1}+a_2D^{n-2}+..a_n y=X$$

أى أن

$$(D^n+a_1D^{n-1}+a_2D^{n-2}+..a_n)y=X \qquad (2)$$

وبالتالى يكون

$$f(D)y=X \qquad (3)$$

حيث

$$f(D)=D^n+a_1D^{n-1}+a_2D^{n-2}+..a_n \qquad (4)$$

تمثل مؤثرا يؤثر على y لينتج X.

تسمى المعادلتان (2) ، (3) الصورة الرمزية للمعادلة (1)

نعتبر الآن المعادلة التفاضلية

$$f(D)y=0 \qquad (5)$$

التى نحصل عليها من المعادلة (1) بوضع $X=0$. والأن سنبرهن التالى.

نظرية (١): إذا كانت $y_1, y_2, ..., y_n$ حلولا مستقلة للمعادلة (5) فان $c_1y_1+c_2y_2+..c_ny_n$ يكون أيضاً حلا للمعادلة (5) حيث $c_1, c_2, ..., c_n$ ثوابت إختيارية.

البرهان:

ليكن $y_1, y_2, ..., y_n$ حلولا للمعادلة (5) فيكون لدينا

$$f(D)y_1=0, f(D)y_2=0, .. f(D)y_n=0 \qquad (6)$$

إذا كان $c_1, c_2, ..., c_n$ ثوابت اختيارية فيكون

$$\begin{aligned} f(D)(c_1y_1+c_2y_2+..c_ny_n) &= \\ &= f(D)(c_1y_1)+f(D)(c_2y_2)+..f(D)(c_ny_n) \\ &= c_1f(D)y_1+c_2f(D)y_2+...+c_nf(D)y_n \\ &= c_1.0+c_2.0+..c_n.0=0 \end{aligned}$$

باستخدام (6) . وهذا يثبت النظرية.

وحيث أن الحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة النونية يحتوى على n ثوابت إختيارية، فيكون

$$c_1y_1+c_2y_2+..c_ny_n=u \quad (\text{مثلا})$$

حلاً عاماً للمعادلة (5) وبالتالى فان

$$f(D)\,u=0 \qquad (7)$$

وأيضاً ليكن v أى حل خاص (particular) للمعادلة (3) وبالتالى يكون

$$f(D)\,v=X \qquad (8)$$

وبالتالى يكون لدينا باستخدام (7) ، (8)

$$F(D)\,(u+v) = f(D)\,u + f(D)v = 0 + X$$

وهذا يبين أن $(u+v)$ أى $c_1y_1 + c_2y_2 + ..c_ny_n + v$

هو الحل العام (general) للمعادلة التفاضلية (3) أى أن (1) تحتوى على n ثابت اختيارى هى $c_1, c_2, ..., c_n$.

يسمى الجزء

$$c_1y_1 + c_2y_2 + ..c_ny_n$$

بالدالة المتممة (complementary functionb) وترمز لها $(C.F.)$ وتسمى الدالة v التى لاتحتوى على ثوابت بالحل الخاص Particular integral ونرمز له $(P.I.)$ وعلى ذلك يكون الحل العام للمعادلة (1) هو $y = C.F.+P.I.$ حيث $C.F.$ يحتوى ثوابت اختيارية عددها n وان $P.I.$ لايحتوى على ثوابت إختيارية.

ملحوظة: يجب التذكر أن $P.I$ ظهر فى الحل لوجود X فى (1) وبالتالى إذا كانت المعادلة التفاضلية ذات معاملات ثابتة حيث $X = 0$ فان الحل العام لايحتوى على $P.I$ وفى هذه يكون حل المعادلة العام هو $y = C.F$.

ملحوظة: تسمى المعادلة (7) بالمعادلة الخطية المتجانسة بينما تسمى المعادلة (8) بالمعادلة غير المتجانسة.

٦-٣ إيجاد الدالة المتممة:

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية المتجانسة (1) مع $X = 0$ أى أن

$$(D^n + a_1D^{n-1} + a_2D^{n-2} + ... + a_n)y = 0,$$

أى

$$f(D)\,y = 0 \qquad (9)$$

نفترض أن $y = e^{mx}$ حلا لهذه المعادلة حيث

$$y = e^{mx}, Dy = me^{mx}, D^2y = m^2e^{mx}, ..., D^ne^{mx} = m^ne^{mx}$$

وبالتالى تؤول المعادلة (1) إلى

$$(m^n + a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-2} + ... + a_n) e^{mx} = 0$$

وحيث أن $e^{mx} \neq 0$ فإن

$$m^n + a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-2} + ... + a_n = 0$$

أى

$$f(m) = 0 \qquad (10)$$

تسمى المعادلة (10) بالمعادلة المساعدة (auxiliary equation) بمقارنة (9) ، (10) ترى أن المعادلة المساعدة $f(m) = 0$ يمكن الحصول عليها مباشرة من $f(D) = 0$.

لحل المعادلة (1) نوجد أولا حل المعادلة المتجانسة $f(D)y = 0$. ومن ثم نبحث عن جذور المعادلة المساعدة $f(m) = 0$ وهى معادلة من الدرجة n ولها n من الجذور. توجد ثلاث حالات طبقاً لجذور المعادلة المساعدة وهى (i) الجذور حقيقية ومختلفة ، (ii) بعض الجذور أعداد مركبة ، (iii) بعض الجذور مكررة

الحالة (١): أ – الجذور حقيقية ومختلفة:

تكون فى هذه الحالة، جذور المعادلة المساعدة حقيقية ومختلفة وهى $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq ... \neq m_n$ وتكون الدالة المتممة هى

$$y_{C.F} = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + ... + c_n e^{m_n x}$$

حيث c_1 ، c_2 ، ...، c_n ثوابت اختيارية.

ب– بعض الجذور مكررة

وأيضاً إذا كان للمعادلة المساعدة جذر حقيقى m_k مكرر k من المرات وان الجذور الاخرى حقيقية مختلفة وهى $m_{k+1}, m_{k+2}, ... m_n$ فإن الدالة المتممة تعطى بالعلاقة

$$(c_1+c_2x+c_3x^2+..c_kx^{k-1})e^{m_kx}+c_{k+1}e^{m_{k+1}x}+...+c_ne^{m_nx}$$

لتوضيح ذلك نعطى المثالين التاليين

(i) $(D^2-3D+2)y=0$

وتكون المعادلة المساعدة $m^2-3m+2=0$

وتكون $(m-2)(m-1)=0, m=1, m=2$

وعلى ذلك تكون الدالة المتممة $y_{C.F}=c_1e^x+c_2e^{2x}$

(ii) $(D^3-3D+2)y=0$

وتكون المعادلة المساعدة هى

$$(m^3-3m+2)=(m-1)(m-1)(m+2)=0$$

والتى جذورها هى $m=1,1,-2$ تكون للدالة المتممة هى

$$y_{C.F}=(c_1+c_2x)e^x+c_3e^{-2x}$$

حيث c_1c_2,c_3 ثوابت إختيارية.

جـ بعض الجذور مركبة:

ليكن $\alpha\pm i\beta$ جذران من الاعداد المركبة فإن الجزء المناظر من الدالة المتممة يأخذ الصورة

$c_1e^{\alpha x}\sin(\beta x+c_2)$ أو $c_1e^{\alpha x}\cos(\beta x+c_2)$ أو $e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$.

أو $c_1e^{(\alpha+i\beta)x}+c_2e^{(\alpha-i\beta)x}$ حيث c_1 و c_2 اختياريان .

إذا كان للمعادلة المساعدة جذرين مركبين $\alpha\pm i\beta$ مكرر مرتين فإن الجزء المناظر من الدالة المتممة يأخذ الصورة

$$e^{\alpha x}\{(c_1+c_2x)\cos\beta x+(c_3+c_4x)\sin\beta x\}$$

وعموماً إذا كان $\alpha \pm i\beta$ مكرر k من المرات فإن الجزء المناظر من الدالة المتممة يأخذ الصورة

$$e^{\alpha x}\{(c_1 + c_2 x + ... + c_k x^{k-1})\cos\beta x + (c_{k+1} + c_{k+2} x + .. c_{2k} x^{k-1})\sin\beta x\}$$

حيث $c_1, c_2, .. c_{2k}$ ثوابت إختيارية ومثال ذلك

$$(D^4 + a^4)y = 0 \qquad (1)$$

تكون المعادلة المساعدة

$$m^4 + a^4 = 0$$

وعلى ذلك

$$\begin{aligned} m^4 + a^4 &= (m^2 + a^2)^2 - 2m^2a^2 = 0 \\ &= (m^2 + a^2)^2 - (\sqrt{2}ma)^2 = 0 \\ &= (m^2 + a^2 + \sqrt{2}ma)(m^2 + a^2 - \sqrt{2}ma) = 0 \end{aligned}$$

ولكن

$$m^2 + \sqrt{2}ma + a^2 = 0$$

تعطى

$$m = \frac{-\sqrt{2}a \pm \sqrt{2a^2 - 4a^2}}{2} = \frac{-a}{\sqrt{2}} \pm \frac{a}{\sqrt{2}}i$$

أيضاً

$$m^2 - \sqrt{2}ma + a^2 = 0$$

يعطى

$$m = \frac{\sqrt{2}a \pm \sqrt{2a^2 - 4a^2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \pm \frac{a}{\sqrt{2}}i$$

وعلى ذلك تكون الدالة المتتمة هى

$$y_{C.F} = e^{-ax/\sqrt{2}}\{c_1 \cos(ax/\sqrt{2}) + c_2 \sin(ax/\sqrt{2})\} +$$
$$e^{ax/\sqrt{2}}\{c_3 \cos(ax/\sqrt{2}) + c_4 \sin(ax/\sqrt{2})\}$$

حيث c_1، c_2، c_3، c_4 ثوابت اختيارية.

ملحوظة (١): إذا كان زوج من جذور المعادلة المساعدة تحتوى **جذور جذرية** $\alpha \pm \sqrt{\beta}$ حيث $\beta > 0$ فإن جزء من الدالة المتممة المناظر يأخذ الصورة

$$c_1 e^{\alpha x} \cosh(x\sqrt{\beta} + c_2) \quad \text{أو} \quad e^{\alpha x}[c_1 \cosh x\sqrt{\beta} + c_2 \sinh x\sqrt{\beta}]$$

$$\text{أو} \quad c_1 e^{(\alpha+\sqrt{\beta})x} + c_2 e^{(\alpha-\sqrt{\beta})x} \quad \text{أو} \quad c_1 e^{\alpha x} \sinh(x\sqrt{\beta} + c_2)$$

ملحوظة (٢): يلاحظ أن هذه النتائج مشابهه تماماً لتلك الحالة (جـ) ماعدا sin، cos استبدلتا بدالتين sinh، cosh على الترتيب. وبالتالى النتائج الاخرى لهذه الحالة يمكن أن تكتب بمساعدة النتائج المناظرة للحالة (جـ)

ومثال ذلك

$$(D^2 + 6D + 4)y = 0$$

وتكون المعادلة المساعدة

$$m^2 + 6m + 4 = 0$$

ويكون الجذران هى $-3 \pm \sqrt{5}$ ويكون حل الدالة المتممة

$$y_{C.F} = e^{-3x}(c_1 \cosh x\sqrt{5} + c_2 \sinh \sqrt{5})$$

مثال (١): حل المعادلة

$$(D^4 - 81)y = 0$$

الحل: المعادلة المساعدة $m^4 - 81 = 0$

$$(m^4 - 81) = (m^2 - 9)(m^2 + 9) = (m-3)(m+3)(m+3i)(m-3i)$$

أى الجذور هى $-3, 3, \pm 3i$ وتكون الدالة المتممة

$$y_{C.F} = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + e^{0x}(c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x)$$
$$= c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x$$

مثال: حل المعادلة

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

الحل (٢): نكتب المعادلة على الصورة

$$(D^3 - 4D^2 + 5D - 2)y = 0$$

وتكون المعادلة المساعدة هى

$$m^3 - 4m^2 + 5m - 2 = 0$$
$$m^2(m-1) - 3m(m-1) + 2(m-1) = 0$$
$$(m-1)(m^2 - 3m + 2) = (m-1)(m-1)(m-2) = 0$$

وعليه فإن $n = 1, 1, 2$

ويكون حل الدالة المتممة (العام) هو

$$y_{C.F} = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{2x}$$

حيث c_1 ،c_2 ،c_3 ثوابت إختيارية.

٦-٤ إيجاد الحل الخاص:

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية

$$f(D)y = X \tag{11}$$

ليكن

$$\frac{1}{f(D)}X \tag{12}$$

يرمز لدالة فى x حيث إذا أثرنا عليها بالمؤثر $f(D)$ تنتج X. ومن الواضح (1) تكون متحققة إذا أخذنا

$$y = \frac{1}{f(D)} X$$

ومن التعريف السابق يكون

$$f(D) \left\{ \frac{1}{f(D)} X \right\} = X$$

والذى يبين أن $\frac{1}{f(D)}$ هو معكوس المؤثر $f(D)$

أ - طريقة عامة للحصول على الحل الخاص

نظرية (٢): إذا كان $X = X(x)$ فإن

$$\frac{1}{D - \alpha} X = e^{\alpha x} \int X e^{-\alpha x} dx$$

البرهان: ليكن $y = \frac{1}{D - \alpha} X$. بالتأثير بالمؤثر $(D - \alpha) y = X$

أى $\frac{dy}{dx} - \alpha y = X \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d}{dx} - \alpha \right) y = X$

وهى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى وعامل المكاملة

$$I.F = e^{-\int \alpha dx} = e^{-\alpha x}$$

ويكون حلها هو

$$y e^{-\alpha x} = \int X e^{-\alpha x} dx$$

ولم نضف ثابت التكامل وعلى ذلك يكون التكامل الخاص

$$y_{P.I} = e^{\alpha x} \int X e^{-\alpha x} dx$$

ملحوظة (١): نتذكر

$$\frac{1}{D-\alpha}X = e^{\alpha x}\int Xe^{-\alpha x}dx \quad , \quad \frac{1}{D+\alpha}X = e^{-\alpha x}\int Xe^{\alpha x}dx$$

ملحوظة (٢): الحل الخاص $y_{P.I}$ لايحتوى على ثوابت اختيارية.

ملحوظة (٣): يستخدم هذا القانون على درجة الخصوص إذا كانت X على الصورة $\sec \alpha x$، $\operatorname{cosec} \alpha x$، $\tan \alpha x$، $\cot \alpha x$ أو أى دالة أخرى لم نتعرض لدراستها. وفيما بعد سنعطى طرقاً مختصرة لحساب $y_{P.I}$.

أمثلة:

مثال (١): أوجد حل المعادلة

$$(D^2+\alpha^2)y = \tan \alpha x$$

الحل: المعادلة المساعدة هى $m^2+\alpha^2=0$

وعلى ذلك $m = \pm \alpha i$ ويكون الدالة المتممة هى

$$y_{C.F} = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x$$

$$y_{P.I} = \frac{1}{D^2+\alpha^2}\tan \alpha x = \frac{1}{(D+\alpha i)(D-\alpha i)}\tan \alpha x$$

$$= \frac{1}{2i\alpha}\left\{\frac{1}{D-\alpha i}-\frac{1}{D+\alpha i}\right\}\tan \alpha x \qquad (1)$$

حيث أن

$$\frac{1}{D-i\alpha}\tan \alpha x = e^{i\alpha x}\int e^{-i\alpha x}\tan \alpha x dx$$

$$= e^{i\alpha x}\int (\cos \alpha x - i\sin \alpha x)\frac{\sin \alpha x}{\cos \alpha x}dx$$

$$= e^{i\alpha x}\int \left[\sin \alpha x - \frac{i(1-\cos^2 \alpha x)}{\cos \alpha x}\right]dx$$

$$=e^{i\alpha x}\int [\sin\alpha x - i(\sec\alpha x - \cos\alpha x)]dx$$

$$=e^{i\alpha x}\left[-\frac{\cos\alpha x}{\alpha} - \frac{i}{\alpha}\ln\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha x}{2}\right) + \frac{i\sin\alpha x}{\alpha}\right]$$

$$=-\frac{e^{i\alpha x}}{\alpha}\left[(\cos\alpha x - i\sin\alpha x) + i\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha x}{2}\right)\right]$$

$$=-\frac{e^{i\alpha x}}{\alpha}\left[e^{-i\alpha x} + i\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha x}{2}\right)\right]$$

وبالتالى

$$\frac{1}{D-i\alpha}\tan\alpha x = -\frac{1}{\alpha}\left[1 + ie^{i\alpha x}\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha x}{2}\right)\right] \qquad (2)$$

بوضع $-i$ بدلا من i فى (2) نحصل على

$$\frac{1}{D+i\alpha}\tan\alpha x = -\frac{1}{\alpha}\left[1 - ie^{-i\alpha x}\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha x}{2}\right)\right] \qquad (3)$$

من (1) ، (2)، (3) نحصل على

$$y_{P.I} = \frac{1}{2i\alpha}\left[\frac{-i}{\alpha}\left(e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}\right)\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha x}{2}\right)\right]$$

$$= -\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)\cos\alpha x\ \ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha x}{2}\right)$$

ويكون الحل العام هو

$$y = y_{C.F} + y_{P.I}$$

أى

$$= c_1\cos\alpha x + c_2\sin\alpha x - \frac{1}{\alpha^2}\cos\alpha x\ \ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\alpha x\right)$$

مثال (٢): حل المعادلة

$$(D^2+\alpha^2)y=\sec\alpha x$$

الحل: المعادلة المساعدة هى

$$m^2+\alpha^2=0 \quad \Rightarrow \quad m=\pm i\alpha$$

ويكون حل الدالة المتممة هو

$$y_{C.F}=c_1\cos\alpha x+c_2\sin\alpha x$$

ويكون الحل (التكامل) الخاص هو

$$y_{P.I}=\frac{1}{D^2+\alpha^2}\sec\alpha x=\frac{1}{2i\alpha}\left\{\frac{1}{D-i\alpha}-\frac{1}{D+i\alpha}\right\}\sec\alpha x \qquad (1)$$

والآن

$$\frac{1}{D-i\alpha}\sec\alpha x=e^{i\alpha x}\int e^{-i\alpha x}\sec\alpha x dx$$

$$=e^{i\alpha x}\int(\cos\alpha x-i\sin\alpha x)\frac{1}{\cos\alpha x}dx$$

$$=e^{i\alpha x}\int(1-i\tan\alpha x)dx$$

$$=e^{i\alpha x}\left[x+\frac{i}{a}\ln\cos\alpha x\right] \qquad (2)$$

بوضع i- بدلا من i فى (2) نحصل على

$$\frac{1}{D+i\alpha}\sec\alpha x=e^{-i\alpha x}\left[x-\frac{i}{a}\ln\cos\alpha x\right] \qquad (3)$$

من (1) ، (2)، (3) نجد أن

$$y_{P.I}=\frac{1}{2i\alpha}\left[e^{i\alpha x}\left(x+\frac{i}{\alpha}\ln\cos\alpha x\right)-e^{-i\alpha x}\left\{x-\frac{i}{\alpha}\ln\cos\alpha x\right\}\right]$$

$$=x\,\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{2i\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}(\ln\cos\alpha x)\left(\frac{e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}}{2}\right)$$

$$y_{P.I}=\frac{x}{\alpha}\sin\alpha x+\frac{1}{\alpha^2}\cos\alpha x\,\ln\cos\alpha x$$

ويكون الحل العام

$$y=y_{C.F}+y_{P.I}$$

ب- طرق مختصرة لحساب التكامل (الحل) الخاص

سوف نستعرض طرق مختصرة لحساب التكامل الخاص والتى هى عموما أكثر اختصارا من الطريقة السابقة. سوف نعطى بعض الصيغ بدون إثباتات.

الصيغة الأولى: عندما يكون $X=e^{\alpha x}$ فيكون

$$y_{P.I}=\frac{1}{f(\alpha)}e^{\alpha x},f(\alpha)\neq 0 \qquad \text{(I)}$$

ومثال ذلك

$$\frac{1}{D^2+D+5}e^{-2x}=\frac{1}{(-2)^2-2+5}e^{-2x}=\frac{1}{7}e^{-2x}$$

ملحوظة: إذا كان $f(a)=0$ فإننا نحلل $f(D)$ إلى عواملها على الصورة $(D-a)^r$ وفى هذه الحالة نستخدم القانون

$$\frac{1}{(D-a)^r}e^{ax}=\frac{x^r}{r!}e^{ax}\quad,\quad r=1,2,.... \qquad \text{(II)}$$

ومثال ذلك

$$y_{P.I}=\frac{1}{D^3+D^2-D-1}e^x=\frac{1}{(D-1)^2(D+1)}e^x=\frac{1}{(D-1)^2}\left[\frac{1}{D+1}e^x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{(D-1)^2}e^x$$

وباستخدام العلاقة II نجد أن

$$y_{P.I}=\frac{1}{2}\frac{x^2}{2!}e^x=\frac{x^2}{4}e^x$$

وعلى ذلك إذا كانت $f(a)=0$ فإننا نحلل $f(D)$ إلى عوامل ونؤثر على e^{ax} بالعامل الذى لايتلاشى بوضع a بدلا من D ونستخدم (I) ثم نستخدم II على العامل الآخر.

ملحوظة: إذا كان X ثابتا b ، مثلا، فإننا نلاحظ أن $b=be^{0x}$ وباستخدام العلاقة I ومثال ذلك

$$y_{P.I}=\frac{1}{D^2+D+1}5=\frac{1}{D^2+D+1}5e^{0x}=5\frac{1}{0+0+1}e^{0x}=5$$

وكذلك

$$y_{P.I}=\frac{1}{D^4+D^2}k=\frac{1}{D^4+D^2}ke^{0x}=k\frac{1}{D^4+D^2}e^{0x}$$

$$=k\frac{1}{D^2(D^2+1)}e^{0x}=k\frac{1}{D^2}\frac{1}{(0-1)}e^{0x}=\frac{k}{D^2}1$$

$$=k\frac{x^2}{2!}$$ (باستخدام I)

أى $\frac{1}{D^2}.1$ تمثل تكامل 1 مرتين.

مثال (١): حل المعادلة

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=e^x$$

الحل: لدينا

$$(D^2-3D+2)y=e^x$$

وتكون المعادلة المساعدة

$$(m^2-3m+2)=0 \Rightarrow (m-1)(m-2)\Rightarrow m=1,2$$

وتكون الدالة المتممة

$$y_{C.F}=c_1e^x+c_2e^{2x}$$

ويكون التكامل الخاص

$$y_{P.I}=\frac{1}{(D-1)(D-2)}e^x=\frac{1}{(D-1)}\frac{1}{(1-2)}e^x=-\frac{1}{D-1}e^x$$

$$=\frac{-x}{1!}e^x=-xe^x$$

ويكون الحل العام

$$y_G=y_{C.F}+y_{P.I}=c_1e^x+c_2e^{2x}-xe^x$$

مثال (٢): حل المعادلة

$$(D^3-5D^2+7D-3)y=e^{2\alpha}\cosh x$$

الحل: المعادلة المساعدة

$$m^3-5m^2+7m-3=0 \Rightarrow m^2(m-1)-4m(m-1)+3(m-1)=0$$

$$(m-1)(m^2-4m+3)=0 \Rightarrow (m-1)(m-1)(m-3)=0\Rightarrow m=1,1,3$$

وتكون الدالة المتممة

$$y_{C.F}=(c_1+c_2x)e^x+c_3e^{3x}$$

ويكون التكامل الخاص

$$y_{P.I}=\frac{1}{(D-1)^2(D-3)}\left\{e^{2x}\cosh x\right\}=\frac{1}{(D-1)^2(D-3)}e^{2x}.\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$$=\frac{1}{(D-1)^2(D-3)}\left\{\frac{1}{2}e^{3x}+\frac{1}{2}e^{x}\right\}$$

يكون لدينا جزئين : الجزء الأول

$$y_1=\frac{1}{(D-1)^2(D-3)}\frac{e^{x}}{2}=\frac{1}{2}\frac{1}{(D-1)^2}\frac{1}{(1-3)}e^{x}$$

$$=\frac{1}{2(-2)}\frac{1}{(D-1)^2}e^{x}=-\frac{1}{4}\frac{x^2}{2!}e^{x}=-\frac{x^2}{8}e^{x}$$

وأيضاً الجزء الثانى

$$y_2=\frac{1}{2}\frac{1}{(D-3)(D-1)^2}e^{3x}=\frac{1}{2}\frac{1}{(D-3)(3-1)^2}e^{3x}$$

$$=\frac{1}{2(D-3)}\frac{1}{4}e^{3x}=\frac{1}{8}\frac{x}{1!}e^{3x}=\frac{x}{8}e^{3x}$$

ويكون $y_{P.I}=y_1+y_2$

ويكون الحل العام

$$y_G=(c_1+c_2x)e^{x}+c_3e^{3x}-\frac{1}{8}x^2e^{x}+\frac{1}{8}xe^{3x}$$

الصيغة III: $\frac{1}{\varphi(D^2)}\begin{cases}\sin x\\ \cos\alpha x\end{cases}=\frac{1}{\varphi(-\alpha^2)}\begin{cases}\sin\alpha x\\ \cos\alpha x\end{cases}\ ,\ \varphi(-\alpha^2)\neq 0$

ومثال ذلك

(i) $\frac{1}{D^4+D^2+1}\cos 2x = \frac{1}{(D^2)^2+D^2+1}\cos 2x = \frac{1}{(-2^2)^2-2^2+1}\cos 2x$

$$= \frac{\cos 2x}{13}$$

(ii) $\frac{1}{D^2-2D+1}\cos 3x = \frac{1}{-(3)^2-2D+1}\cos 3x = -\frac{1}{2}\frac{1}{D+4}\cos 3x$

بالضرب فى المرافق

$$= -\frac{1}{2}\frac{(D-4)}{(D+4)(D-4)}\cos 3x = -\frac{1}{2}\frac{D-4}{D^2-16}\cos 3x$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(D-4)}{-3^2-16}\cos 3x = \frac{1}{50}(D-4)\cos 3x$$

$$= \frac{1}{50}[-3\sin 3x - 4\cos 3x]$$

الصيغة IV

$$\frac{1}{f(D)}e^{\alpha x}V = e^{\alpha x}\frac{1}{f(D+\alpha)}V, \qquad V = V(x)$$

ومثال ذلك

$$y_{P.I} = \frac{1}{D^2+3D+2}e^{2x}\sin x$$

$$= e^{2x}\frac{1}{(D+2)^2+3(D+2)+2}\sin x$$

$$= e^{2x}\frac{1}{D^2+7D+12}\sin x = e^{2x}\frac{1}{-1+7D+12}\sin x$$

$$= e^{2x}\frac{(11-7D)}{(11+7D)(11-7D)}\sin x = e^{2x}\frac{(11-7D)}{121+49}\sin x$$

$$= e^{2x}\frac{(11-7D)}{170}\sin x = \frac{e^{2x}}{170}(11\sin x - 7\cos x)$$

ملحوظة (١): يستخدم هذا القانون إذا فشل القانون (I) والقانون (III).

ملحوظة (٢): عندما $\varphi(-\alpha^2)=0$ نستخدم الصيغة (IV) وذلك بأخذ $V(x)=1$.

ملحوظة (٣): نعرف أن

(الجزء الحقيقى فى $e^{i\alpha x}$) ، $\cos\alpha x = R(e^{i\alpha x})$

(الجزء التخيلى فى $e^{i\alpha x}$) ، $\sin\alpha x = I(e^{i\alpha x})$

والمثال التالى يوضح ذلك

$$y_{P.I} = \frac{1}{D^2+a^2}\sin ax$$

$$= \frac{1}{D^2+a^2} Ie^{iax} = Ie^{iax}\frac{1}{(D+ia)^2+a^2}.1$$

$$= Ie^{iax}\frac{1}{D^2+2iDa-a^2+a^2}.1 = Ie^{iax}\frac{1}{D(D+2ia)}1$$

$$= Ie^{iax}\frac{1}{D.2ia\left(\dfrac{D}{2ia}+1\right)}.1 = Ie^{iax}\frac{1}{2iD}\left[1+\frac{D}{2ia}\right]^{-1}.1$$

وباستخدام مفكوك $\left[1+\dfrac{D}{2ia}\right]^{-1}$ فى قوى $\left(\dfrac{D}{2ia}\right)$ نحصل على

$$= I\left(-\frac{ie^{iax}}{2aD}\right) = I\left(-\frac{ie^{iax}}{2a}\right)x$$

$$= I\left[\frac{-ix}{2a}(\cos ax + i\sin ax)\right]$$

ونحسب الجزء التخيلى لهذا المقدار فنجد

$$y_{PI} = -\frac{x}{2a}\cos ax$$

يجب التذكر أن

$$\frac{1}{D^2+a^2}\sin ax = -\frac{x}{2a}\cos ax$$

$$\frac{1}{D^2+a^2}\cos ax = \frac{x}{2a}\sin ax$$

وذلك من تطبيق الصيغة (IV)

والمثال التالى يوضح ذلك

مثال (٣): حل المعادلة

$$(D^2+4)y = \sin^2 x$$

الحل: المعادلة المساعدة $m^2+4=0 \Leftarrow m = \pm 2i$

وتكون الدالة المتممة

$$y_{C.F} = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

$$y_{P.I} = \frac{1}{D^2+4}\sin^2 x = \frac{1}{D^2+4}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{D^2+4}e^{0x} - \frac{1}{D^2+4}\cos 2x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{0+4} - \frac{x}{2.2}\sin 2x\right]$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}x \sin 2x$$

ويكون الحل العام

$y_G = y_{C.F} = y_{P.I}$

$$= c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} x \sin 2x$$

الصيغة (V):

إذا كان $f(D)y = x^m$ ، حيث $f(D)$ كثيرة حدود من درجة m ، $m > 0$
مع ملاحظة أن

$$\frac{1}{1-p} = 1 + p + p^2 + p^3 + ...$$

$$\frac{1}{1+p} = 1 - p + p^2 - p^3 + ...$$

والمثال التالى يوضح الطريقة:

مثال (٤): حل المعادلة

$$(D^3 - D^2 - 6D)y = x^2 + 1$$

الحل: المعادلة المساعدة هى

$$m^3 - m^2 - 6m = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (m)(m^2 - m - 6) = 0$$

$$m(m-3)(m+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0, 3, -2$$

وتكون الدالة المتممة هى

$$y_{C F} = c_1 e^{0x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x} = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x}$$

ويكون التكامل (الحل) الخاص هو

$$y_{P I} = \frac{1}{(D^3 - D^2 - 6D)}(x^2 + 1) = \frac{1}{-6D\left(1 + \frac{D}{6} - \frac{D^2}{6}\right)}(x^2 + 1)$$

$$=-\frac{1}{6D}\left[1+\left(\frac{D}{6}-\frac{D^2}{6}\right)\right]^{-1}(x^2+1)$$

$$=-\frac{1}{6D}\left[1-\left(\frac{D}{6}-\frac{D^2}{6}\right)+\left(\frac{D}{6}-\frac{D^2}{6}\right)^2-\ldots\right](x^2+1)$$

$$=-\frac{1}{6D}\left[1-\frac{D}{6}+\frac{7}{36}D^2+\ldots\right](x^2+1)$$

$$=-\frac{1}{6D}\left[x^2+1-\frac{1}{6}D(x^2+1)+\frac{7}{36}D^2(x^2+1)+\ldots\right]$$

$$=-\frac{1}{6D}\left[x^2+1-\frac{1}{6}(2x+0)+\frac{7}{36}(2+0)+\ldots\right]$$

$$=-\frac{1}{6D}\left[x^2-\frac{1}{3}x+\frac{25}{18}\right]=-\frac{1}{6}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{6}+\frac{25}{18}x\right]$$

ويكون الحل العام هو

$$y_G=y_{C.F}+y_{P.I}=c_1+c_2e^{3x}+c_3e^{-2x}-\frac{1}{18}\left(x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{25}{6}x\right)$$

مثال (٥): حل المعادلة

$$(D^3+8)y=x^4+2x+1$$

$$m^3+8=0 \quad \Rightarrow \quad m=-2,1\pm i\sqrt{3}$$

وتكون الدالة المتممة

$$y_{C.F}=c_1e^{-2x}+c_2e^{x}\cos(x\sqrt{3}+c_3)$$

والحل الخاص

$$y_{P.I}=\frac{1}{D^3+8}(x^2+2x+1)=\frac{1}{8}\left(1+\frac{D^3}{8}\right)^{-1}(x^4+2x+1)$$

$$=\frac{1}{8}(1-\frac{1}{8}D^3+\ldots)(x^4+2x+1)$$

$$=\frac{1}{8}[(x^4+2x+1)-3x]=\frac{1}{8}(x^4-x+1)$$

والحل العام هو

$$y_G=y_{C.F}+y_{P.I}=c_1e^{-2x}+c_2e^x(\cos x\sqrt{3}+c_3)+\frac{1}{8}\left(x^4-x+1\right)$$

مثال (٦): حل المعادلة

$$(D^2-1)y=\cosh x\cos x$$

الحل: المعادلة المساعدة هى

$$m^2-1=0 \quad\Rightarrow\quad m=1,-1$$

وتكون الدالة المتممة هى

$$y_{C.F}=c_1e^x+c_2e^{-x}$$

والحل الخاص

$$y_{P.I}=\frac{1}{D^2-1}\left(\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right)\cos x=y_1+y_2$$

$$y_1=\frac{1}{2}\frac{1}{D^2-1}e^x\cos x=\frac{1}{2}e^x\frac{1}{(D+1)^2-1}\cos x$$

$$=\frac{1}{2}e^x\frac{1}{D^2+2D}\cos x=\frac{1}{2}e^x\frac{1}{-1+2D}\cos x$$

$$=\frac{1}{2}e^x\frac{(2D+1)}{(2D-1)(2D+1)}\cos x=\frac{1}{2}e^x\frac{(2D+1)}{4D^2-1}\cos x$$

$$=\frac{1}{2}e^{x}\frac{(2D+1)}{-4-1}\cos x=\frac{-e^{x}}{10}(-2\sin x+\cos x)$$

وبالمثل

$$y_2=\frac{1}{2}\frac{1}{D^2-1}e^{-x}\cos x$$

$$=\frac{e^{-x}}{10}(-2\sin x-\cos x)$$

وعلى ذلك يكون

$$y_{P.I}=y_1+y_2=\frac{e^{-x}}{10}(-2\sin x+\cos x)+$$

$$+\frac{e^{-x}}{10}(-2\sin x-\cos x)+$$

والحل العام هو

$$y_G=y_{C.F}+y_{P.I}$$

مثال(٧): حل المعادلة

$$(D^2+2D+1)y=x\cos x$$

الحل: المعادلة المساعدة هى

$$m^2+2m+1=(m+1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad m=-1,-1$$

وتكون الدالة المتممة

$$y_{C.F}=(c_1+c_2x)e^{-x}$$

ويكون التكامل الخاص

$$y_{P.I}=\frac{1}{(D+1)^2}x\cos x=R\frac{1}{(D+1)^2}xe^{ix}$$

$$=Re^{ix}\frac{1}{(D+i+1)^2}x=\frac{e^{ix}}{(1+i)^2}\frac{1}{\left[1+\frac{D}{1+i}\right]^2}x$$

$$=R\frac{e^{ix}}{2i}\left[1+\frac{D}{1+i}\right]^{-2}x=\frac{e^{ix}}{2i}\left[1-\frac{2D}{1+i}+\ldots\right]x$$

$$=R\left(\frac{-i}{2}e^{ix}\right)\left[x-\frac{1-i}{2}.2\right]$$

(وحيث أن $\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{2}$)

$$=R\left(-\frac{1}{2}ie^{ix}\right)(x-1)+i]=-\frac{R}{2}e^{ix}[(x-1)i-1]$$

$$=-\frac{R}{2}(\cos x+i\sin x)((x-1)i-1)$$

وبحساب الجزء الحقيقى يكون التكامل الخاص هو

$$y_{P.I}=-\frac{1}{2}[-\cos x-(x-1)\sin x]$$

والحل العام هو

$$y=y_{CF}+y_{IP}$$

الصيغة (VI)

$$\frac{1}{F(D)}(xy)=x\frac{1}{F(D)}v-\frac{F'(D)}{[F(D)]^2}V$$

والمثال التالى يوضح هذه العلاقة

مثال (٨): حل المعادلة

$$(D^2-2D+1)y=x\sin x$$

الحل: المعادلة المساعدة هى

$$(m-1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad m=+1,+1$$

ويكون الدالة المتممة

$$y_{C.F}=(c_1+c_2x)e^x$$

ويكون التكامل الخاص هو

$$y_{P.I}=\frac{1}{D^2-2D+1}x\sin x$$

باستخدام العلاقة السابقة نجد أن

$$y_{P.I}=x\frac{1}{D^2-2D+1}\sin x-\frac{2D-2}{(D^2-2D+1)^2}\sin x$$

$$=x\frac{1}{-1-2D+1}\sin x-\frac{2D-2}{(-1-2D+1)^2}\sin x$$

$$=-\frac{1}{2}x.\frac{1}{D}\sin x-\frac{1}{2}\frac{1}{D^2}(D-1)\sin x$$

$$=\frac{1}{2}x\cos x-\frac{1}{2}\frac{1}{D^2}(\cos x-\sin x)$$

$$=\frac{1}{2}x\cos x-\frac{1}{2D}(\sin x+\cos x)$$

$$y_{P.I}=\frac{1}{2}x\cos x-\frac{1}{2}(-\cos x+\sin x)$$

$$y_G=y_{C.F}+y_{P.I}$$

$$=(c_1+c_2x)e^x+\frac{1}{2}x\cos x+\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)$$

تمرين: يترك للطالب حل المسألة باستخدام الصيغه (IV)

مثال (٩): حل المعادلة

$$(D^2-2D+1)y=xe^x\sin x$$

الحل: المعادلة المساعدة هى

$$(m-1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad m=1,1$$

ويكون الدالة المتممة

$$y_{C.F}=(c_1+c_2x)e^x$$

ويكون التكامل الخاص هو

$$y_{P.I}=\frac{1}{(D-1)^2}e^x x\sin x=e^x\frac{1}{(D+1-1)^2}x\sin x$$

$$=e^x\frac{1}{D^2}x\sin x=e^x\frac{1}{D}\int x\sin x dx$$

(بالتكامل بالتجزئ)

$$=e^x\frac{1}{D}[-x\cos x-\int 1.(-\cos x)dx]$$

$$=e^x\frac{1}{D}(\sin x-x\cos x)$$

$$=e^x\int(\sin x-x\cos x)dx$$

$$=e^x[-\cos x-x\sin x+\int 1.\sin x dx]$$

$$=e^x(-\cos x-x\sin x-\cos x)$$

$$=-e^x(x\sin x+2\cos x)$$

$$y_G=(c_1+c_2x)e^x-e^x(x\sin x+2\cos x)$$

مثال (١٠): اوجد حل المعادلة التفاضلية $(D^2-1)y=1$ الذى يتلاشى عندما $x=0$ ويؤول إلى نهاية منتهية عندما $x\to-\infty$.

الحل: المعادلة المساعدة $m^2-1=0 \Leftarrow m=1,-1$

وتكون الدالة المتممة

$$y_{C.F}=c_1e^x+c_2e^{-x}$$

ويكون التكامل الخاص

$$y_{P.I}=\frac{1}{D^2-1}1=\frac{-1}{(1-D^2)}1=-(1-D^2)^{-1}.1$$

$$=-(1+D^2+...).1=-1$$

ويكون الحل العام هو

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}-1$$

عندما $x=0$ فإن $y=0$

$$0=c_1+c_2-1 \Rightarrow c_1+c_2=1$$

بضرب الطرفين فى e^x فنحصل على

$$y\,e^x=c_1(e^x)^2+c_2-e^x$$

ولكن $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ من المعطيات. وبأخذ نهاية الطرفين عندما $x\to-\infty$

$0=c_1.0+c_2-0 \Rightarrow c_2=0 \Rightarrow c_1=1$. (كمية منتهية)

ويكون الحل هو

$$y=e^x-1$$

٦-٥ طريقة المعاملات غير المعينة

تكون هذه الطريقة مفيدة لايجاد التكامل الخاص إذا احتوى الطرف الايمن من المعادلة التفاضلية على حدود لها صيغ خاصة حيث يمكن استنتاج التكامل الخاص من صيغة الطرف الأيمن. وهذا مبين فى الجدول التالى حيث نقترح محاولة لشكل الحل

	الصورة الخاصة للطرف الايمن	صورة الحل المقترح y^*
1	$x^n, a_n x^n$	$A_0 + A_1 x + .. A_n x^n$
2	e^{ax}, pe^{ax}	Ae^{ax}
3	$a_n x^n e^{ax}$	$e^{ax}(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + .. A_n x^n)$
4	$p\sin ax, p\cos ax$	$A\sin ax + B\cos ax$
5	$pe^{bx}\sin ax, pe^{bx}\cos ax$	$e^{bx}(A\sin ax + B\cos ax)$
6	$x^n \sin ax, x^n \cos ax$	$(A_0 + A_1 x + ... A_n x^n)\sin ax +$ $(B_0 + B_1 x + ... B_n x^n)\cos ax$

حيث n عدد صحيح موجب $A, a, b, A_0, A_1, ..., B_0, B_1, ... B_n$ ثوابت. الثوابت في العمود الثاني معلومة والتي في العمود الثالث مجهولة.

ملحوظة ١: إذا احتوى الطرف الأيمن من المعادلة $f(D)y = X$ على تركيبة خطية من هذه الصور الخاصة في الجدول السابق فإن شكل الحل المقترح y^* يجب أن يحتوى على حاصل جمع هذه الحدود مع مقترحات مناسبة.

ملحوظة ٢: إذا كان أحد حدود X وليكن u مثلاً هو أيضاً حد في الدالة المتممة مرفوعا لقوى m فان الحل المقترح y^* في الجدول السابق نقترح أن يكون $x^m u$ بالاضافة إلى الحدود الناتجة من اشتقاقه.

فمثلا : ليكن لدينا $(D-2)^2(D+3)y = e^{2x} + x^2$

وتكون الدالة المتممة $y_H = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + c_3 e^{-3x}$

نلاحظ أن x^2 ليست حداً في الدالة المتممة ولذلك يكون $(A_1 + A_2 x + A_3 x^2)$ حداً في الحل المقترح y^*. ونلاحظ أيضاً أن e^{2x} حداً في الطرف الأيمن وحل الدالة المتممة مكرر مرتين لذلك يكون الحد $x^2 \ e^{2x}$ ومشتقاته حدود في الحل المقترح y^* أي

$$y^* = A_4 e^{2x} + A_5 x e^{2x} + A_6 x^2 e^{2x}$$

ولذلك يكون الحل المقترح هو

$$y^* = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 e^{2x} + A_5 x e^{2x} + A_6 x^2 e^{2x}$$

ملحوظة ٣: إذا كان الحد $x^r u$ فى أحد حدود الطرف الأيمن $f(D)y = X$ وكان أيضاً حلاً مكرر s من المرات فى الدالة المتممة فإن الحد $x^{r+s}u$ ومشتقاته يكون فى الحل المقترح y^* ومثال ذلك المعادلة

$$(D-2)^3(D+3)y = x^2 e^{2x} + x^2$$

وتكون الدالة المتممة هى

$$y_{C.F} = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{2x} + c_4 e^{-3x}$$

ولذلك يكون الحل المقترح

$$y^* = A_1 e^{2x} + A_2 x e^{2x} + A_3 x^2 e^{2x} + A_4 x^3 e^{2x} + A_5 x^4 e^{2x} + A_6 x^5 e^{x} + \\ + A_7 + A_8 x + A_9 x^2$$

تنتج الحدود الستة الأولى من أن e^{2x} هو جزء من الدالة المتممة طبقاً للجذر المكرر $(m=2)$ ثلاث مرات والامثلة التالية توضح الطريقة.

ملحوظة ٤: لا داعى لكتابة الحدود $A_1 e^{2x}$، $A_2 x e^{2x}$، $A_3 x^2 e^{2x}$ لظهورها فى الدالة المتممة وعلى ذلك يكون

$$y^* = A_4 x^3 e^{2x} + A_5 x^4 e^{2x} + A_6 x^5 e^{x} + A_7 + A_8 x + A_9 x^2$$

ويطبق ذلك فى جميع المسائل التالية

مثال (١): حل المعادلة

$$(D^2 + 2D + 4)y = 111 e^{2x} \cos 3x$$

الحل: المعادلة المساعدة هى $m^2 + 2D + 4 = 0$

أى $m = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\times4}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$

وتكون الدالة المتممة

$$y_{C.F} = e^{-x}(c_1 \cos\sqrt{3}x = c_2 \sin\sqrt{3}x) \qquad (1)$$

حيث أن الطرف الأيمن من المعادلة التفاضلية يحتوى على الحد $111e^{2x}\cos 3x$ يكون الحل المقترح هو

$$y^* = e^{2x}(A_1 \cos 3x + A_2 \sin 3x) \qquad (2)$$

وهذا الحل يحقق المعادلة التفاضلية

$$(D^2 + 2D + 4)y^* = 111e^{2x}\cos 3x \qquad (3)$$

وعلى ذلك يكون لدينا

$$Dy^* = A_1(2e^{2x}\cos 3x - 3e^{2x}\sin 3x) + A_2(2e^{2x}\sin 3x + 3e^{2x}\cos 3x)$$

$$= (2A_1 + 3A_2)e^{2x}\cos 3x + (2A_2 - 3A_1)e^{2x}\sin 3x \qquad (4)$$

$$D^2y^* = (2A_1 + 3A_2)(2e^{2x}\cos 3x - 3e^{2x}\sin 3x) +$$
$$+ (2A_2 - 3A_1)(2e^{2x}\sin 3x + 3e^{2x}\cos 3x)$$

$$= (12A_2 - 5A_1)e^{2x}\cos 3x - (12A_1 + 5A_2)e^{2x}\sin 3x \qquad (5)$$

باستخدام (5)، (4) ، (2) فإن (3) تؤول إلى

$$(3A_1 + 18A_2)e^{2x}\cos 3x + (3A_2 - 18A_1)e^{2x}\sin 3x = 111e^{2x}\cos 3x$$

وبمقارنة المعاملات نحصل على

$$3A_1 + 18A_2 = 111\ ,\ \ 3A_2 - 18A_1 = 0$$

ومنها نجد أن

$$A_1 = 1\ ,\ A_2 = 6$$

وعلى ذلك يكون الحل الخاص هو

$$y_{P.I}=e^{2x}(\cos 3x+6\sin 3x)$$

مثال (٢): حل المعادلة

$$(D^2-9)y=x+e^{2x}-\sin 2x$$

الحل: تكون المعادلة المساعدة

$$m^2-9=0 \quad \Rightarrow \quad m=+3,-3$$

وتكون الدالة المتممة

$$y_{C.F}=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}$$

وحيث أن الطرف الأيمن من المعادلة التفاضلية يحتوى على الحد x فإن الحل المقترح لابد وأن يحتوى على A_0+A_1x. وكذلك حيث أن e^{2x} حدا فى الطرف الأيمن فلابد أن يحتوى الحل المقترح على A_2e^{2x} وأيضا حيث أن $\sin 2x$ حدا فى الطرف الأيمن فى الحل لابد أن يحتوى على

$$A_3\cos 2x+A_4\sin 2x$$

وعلى ذلك يأخذ الحل المقترح الصورة

$$y^*=A_0+A_1x+A_2e^{2x}+A_3\cos 2x+A_4\sin 2x$$

وحيث أن y^x يحقق المعادلة المعطاة فإن

$$D^2y^*-9y^*=x+e^{2x}-\sin 2x \qquad (1)$$

وعلى ذلك

$$Dy^*=A_1+2A_2e^{2x}-2A_3\sin 2x+2A_4\cos 2x \qquad (2)$$

$$D^2y^*=4A_2e^{2x}-4A_3\cos 2x-4A_4\sin 2x \qquad (3)$$

وبتعويض (2)، (3) فى (1) نجد أن

$$-9A_0 - 9A_1x - 5A_2e^{2x} - 13A_3\cos 2x - 13A_4\sin 2x = x + e^{2x} - \sin 2x$$

وبمساواة المعاملات فى الطرفين نحصل على

$$-9A_0 = 0, -9A_1 = 1, -5A_2 = 1, -13A_3 = 0, -13A_4 = -1$$

وعلى ذلك يكون الحل الخاص

$$y_{P.I} = -\frac{1}{9}x - \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{1}{13}\sin 2x$$

تمرين: نترك للقارئ حل هذه المسألة باستخدام طرق أخرى.

مثال (٣): حل المعادلة

$$(D^2 - 2D + 3)y = x^3 + \sin x$$

الحل: المعادلة المساعدة هى

$$m^2 - 2m + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = (2 \pm \sqrt{-8})/2 = 1 \pm i\sqrt{2}$$

وتكون الدالى المتممة هى

$$y_{C.F} = e^x(c_1\cos\sqrt{2}x + c_2\sin\sqrt{2}x)$$

وحيث أن الطرف الأيمن فى المعادلة التفاضلية يحتوى على x^3 فإن y^* لابد أن تحتوى على $A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3$ وكذلك يحتوى الطرف الأيمن على $\sin x$ فلابد أن يحتوى الحل المقترح على $\sin x$، $\cos x$ أى أن

$$y^* = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4\cos x + A_5\sin x \qquad (1)$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة ومساواة المعاملات فى الطرفين نحصل على

$$y_{P.I} = -\frac{8}{27} + \frac{2}{9}x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}(\sin x + \cos x)$$

تمرين: نترك للقارئ حل هذه المثال بطرق أخرى.

مثال (٤): حل المعادلة

$$(D^2-4D+4)y=x^3e^{2x}+xe^{2x}$$

الحل: المعادلة المساعدة هى

$$m^2-4m+4=0 \quad\Rightarrow\quad (m-2)(m-2) \quad\Rightarrow\quad m=2,2$$

وتكون الدالى المتممة هى

$$y_{C.F}=(c_1+c_2x)e^{2x}$$

وحيث أن e^{2x} التى فى الطرف الأيمن من المعادلة التفاضلية ظهرت فى حل الدالة المتممة مرتين فلابد أن يحتوى الحل المقترح

$$y^*=A_1x^5e^{2x}+A_2x^4e^{2x}+A_3x^3e^{2x}+A_4x^2e^{2x}$$

حيث لم تكتب الحد e^{2x}، xe^{2x} لانها ظهرت فى الدالة المتممة.

وبالتعويض فى المعادلة المعطاه

$$(D^2-4D+4)y^*=x^3e^{2x}+xe^{2x}$$

وبمساواة المعاملات فى الطرفين نحصل على الخل الخاص

$$y_{P.I}=\frac{1}{20}x^5e^{2x}+\frac{1}{6}x^3e^{2x}$$

تمرين: نترك للطالب حل هذه المثال بطرق أخرى.

مثال (٥): حل المعادلة

$$(D^3+2D^2-D-2)y=e^x+x^2$$

الحل: المعادلة المساعدة هى

$$m^3+2m^2-m-2=0 \quad\Rightarrow\quad m^2(m+2)-(m+2)=0$$

$$(m+2)(m^2-1)=0\Rightarrow m=-2,-1,1$$

وتكون الدالة المتممة هى

$$y_{C.F}=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{-2x}$$

وحيث أن x^2 حدا فى الطرف الأيمن من المعادلة فلابد أن يحتوى الحل المقترح على $A_0+A_1x+A_2x^2$، وحيث e^x أيضاً حدا فى الطرف الأيمن وأيضاً حدا غير مكرر فى الدالة المتممة فلابد أن يحتوى على A_3xe^x (لاحظ أننا لم نقترح الحد e^x لأنه أيضاً موجود فى للدالة المتممة وعلى ذلك يكون الحل المقترح هو

$$y^*=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3xe^x$$

وبالتعويض فى المعادلة المعطاه ومساوات المعاملات فى الطرفين نحصل على

$$A_2=-\frac{1}{2},\ A_1=\frac{1}{2},\ A_0=-\frac{5}{24},\ A_3=\frac{1}{6}$$

ويكون الحل الخاص هو

$$y_{P.I}=-\frac{5}{4}=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+xe^x/6$$

تمرين: يترك للقارئ محاولة حل المثال بطرق أخرى.

مثال (٦): حل المعادلة

$$(D^2+4)y=x^2\sin 2x$$

الحل: المعادلة المساعدة هى

$$m=\pm 2i \quad \Leftarrow \quad m^2+4=0$$

وتكون الدالى المتممة هى

$$y_{C.F}=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$$

وحيث أن $x^2\sin 2x$ ظهرت فى الطرف الأيمن للمعادلة التفاضلية وأن $\sin 2x$ هى جزء من الدالة المتممة فإن الحل المقترح y^* يكون الصورة

$$y^* = A_1 x^3 \cos 2x + A_2 x^3 \sin 2x + A_3 x^2 \cos 2x + A_4 x^2 \sin 2x$$
$$+ A_5 x \cos 2x + A_6 x \sin 2x$$

ويلاحظ أن هذا الحل لم يحتوى $A_7 xos 2x + A_8 \sin 2x$ لانهما ظهرتا فى الدالة المتممة. بالتعويض فى المعادلة المعطاه ومساواة المعاملات نحصل على

$$A_0 = 0, A_1 = \frac{-1}{12}, A_2 = 0, A_3 = 0, A_4 = \frac{1}{16}. A_5 = 1/32, A_6 = 0$$

ويكون الحل الخاص هو

$$y_{P.I} = \frac{-1}{12} x^3 \cos 2x + \frac{1}{16} x^2 \sin 2x + \frac{1}{32} x \cos 2x$$

تمرين: ليحاول القارىء حل المثال بطريقة اخرى.

تمارين

١–حل المعادلات التفاضلية التالية

(i) $(D^2+1)y = \operatorname{cosec} x$, (ii) $(D^2+a^2)y = \operatorname{cosec} \alpha x$,

(iii) $(D^2+1)y = \sec x$ (iv) $(D^2+9) = \operatorname{cosec} 3x$

٢– حل المعادلات التفاضلية التالية

1- $(D+2)(D-1)^3 y = e^x$, 2- $(D^2+D-2)y = e^x$,

3- $(D^2-3D+2)y = \sin 3x$ 4- $(D^2+4)y = a\sin x \cos x$,

5- $(D^2-4)y = x^2$, 6- $(D^2-1)y = e^x \cos x$,

7- $(D^3-3D+3D-1)y = (x+1)e^x$, 8- $(D^2+9)y = \cos 3x$,

9- $(D^2-1)y = x^2 \cos x$, 10- $(D^4-1)y = x \sin x$,

11- $(D^2+D)y = x \cos x$, 12- $(D^2+4)y = \sin 2x$,

٣– حل المعادلات التالية بطريقة المعاملات غير المعينة

(1) $(D^2+2)y = e^x + 2$, (2) $(D^2-1)y = e^x \sin 2x$,

(3) $(D^2-2D+1)y = x^2 e^x$, (4) $y'' + y = 2\cos$,

(5) $(D^3+D)y = 2x^2 + 4\sin x$, (6) $(D^3+1)y = 4x\cos x + 2\sin x$,

٤– حل المعادلات التالية

(i) $(D^2+2)y = e^x + 2x$, (ii) $(D^2-1)y = e^x \sin 2x$,

(iii) $(D^2-2D+1)y = x^2 e^x$ (iv) $y'' + y = 2\cos x$

(v) $(D^3+D)y=2x^2+\sin x$, (vi) $(D^2+1)y=4x\cos x-2\sin x$,

(vii) $(D+2)(D-1)^3y=e^x+\sin x-x+4$ (viii) $(D^2-1)y=x^2\cos x$

(ix) $(D^3-3D^2+3D-1)y=(x+1)e^x$ (x) $(D^4-1)y=x\sin x$

(xi) $(D^3+D)y=x\cos x$

٥- اثبت مايلى

(i) $D^n(xV(x)=xD^nV+nD^{n-1}V$

(ii) $\frac{1}{F(D)}(xV)=\{x-\frac{1}{F(D)}F'(D)\}\frac{1}{F(D)}V$

(iii) $\frac{1}{F(D)}\{x^nV\}=\{x-\frac{1}{F(D)}F'(D)\}^n\frac{1}{F(D)}V$

(٦) بكتابة $F(D)$ في صورة كسور جزيئية اثبت ان حل المعادلة $F(D)y=u$ يمكن ان يكتب على الصورة $\sum_s \frac{1}{F'(a_s)}e^{a_s x}\int ue^{-a_s x}dx$ بافتراض أن كل الجذور a_s مختلفة. ماهو الحل عندما تكون بعض الجذور مكررة ؟

(٧) اثبت أن $y=\frac{1}{p}\int_k^x f(x)\sin p(x-t)dt$ حيث k ثابت حل خاص للمعادلة $y''+p^2y=f(x)$ ومن ثم اوجد حل $(D^2+1)y=\cos x$

(٨) اوجد الحل العام للمعادلات التالية

(i) $y''-y'-2y=\sin 2x$, (ii) $(D^2+9)y=\cos 3x+5$

(iii) $x''-3x'+4x=\cos 2x$, (iv) $(D^2+4)y=\sin 2x+3x$

(v) $y''+\frac{1}{2}y=0, y(\pi)=1, y(\pi)=-1$, (vi) $y''-3y'+2y=e^x\sin x$

(٩) استخدم طريقة المعاملات غير المعينة لاثبات أن الحل الخاص للمعادلة

$$y'' + 2ay' + b^2 y = A \sin wx, \qquad (a, w > 0)$$

يعطى العلاقة

$$y = \frac{A \sin(wx - \alpha)}{\sqrt{(b^2 - w^2)^2 + 4w^2 a^2}}$$

حيث

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{2aw}{(b^2 - w^2)}, \qquad (0 < \alpha < \pi)$$

(١٠) حل المعادلات التفاضلية التالية

(i) $(D^2 + 2D + 1)y = e^{2x} \cos x$,

(ii) $(D^2 + a)y = e^x \cos 3x$,

(iii) $(D^2 - 2D + 1)y = x \sin x$,

(iv) $(D^2 - 2D + 1)y = x \cos x$,

(v) $D(D^2 - 1)y = \sin 2x$,

(vi) $D^2(D^3 - 1) = \cos 2x$

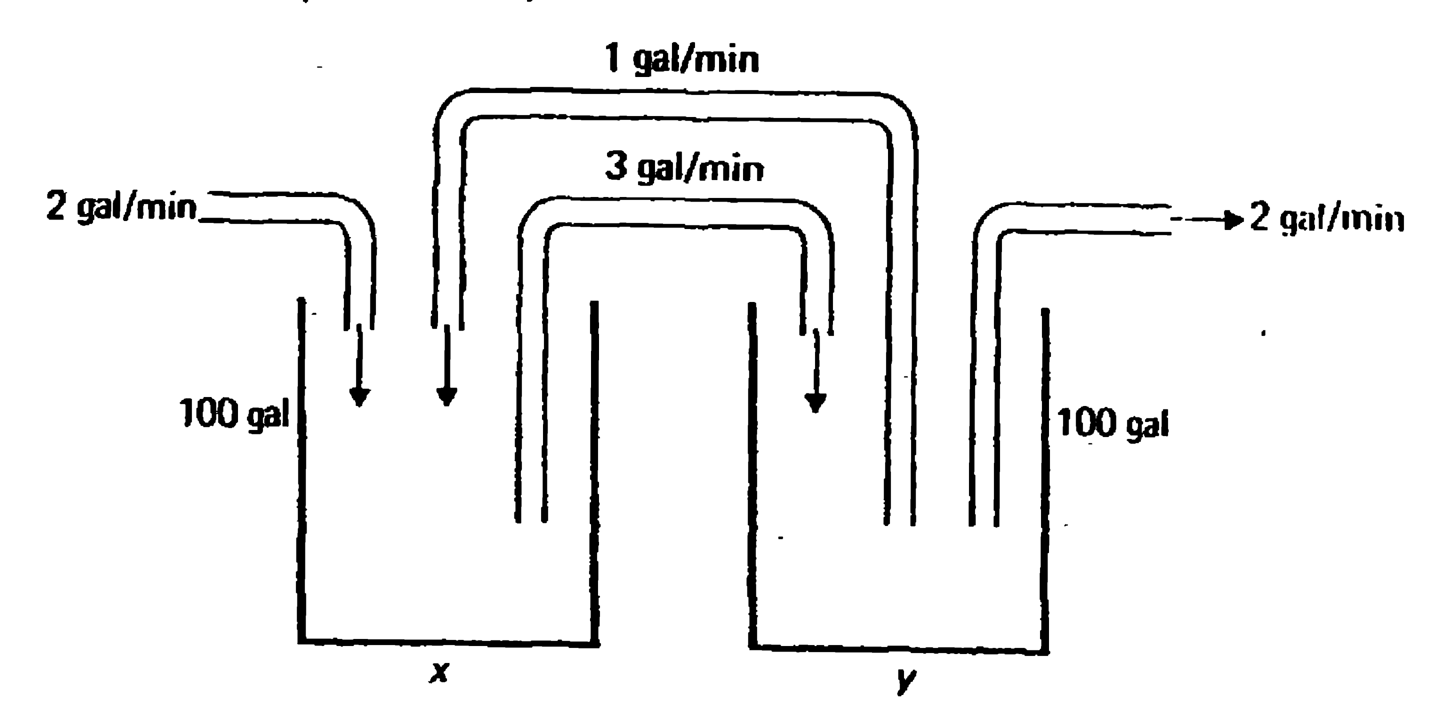
الباب السابع

تطبيقات على معادلات خطية من الرتبة الثانية

Applications on second order differential equations

٧-١ تركيز السوائل: يستخدم المعادلات التفاضلية لدراسة مسائل تركيز السوائل والمثال التالى يوضح ذلك

مثال (١): يحتوى خزان X على 100 جالون من ملح مشبع مذاب فيه 100 رطل من الملح وخزان Y يحتوى على 100 جالون من الماء. نفترض أن الماء ينساب إلى الخزان X بمعدل 2 جالون فى الدقيقة وينساب المزيج من X إلى Y بمعدل 3 جالون فى الدقيقة. ويضخ جالون من المزيج من Y ثانياً إلى الخزان X بينما جالونين يتدفقان من الخزان Y إلى الخارج. لوجد كمية الملح فى كل من الخزانين X ، Y عند أى زمن t (انظر الشكل).



الحل: ليكن x، y يمثلان عدد ارطال الملح فى الخزانين X ، Y عند الزمن t ويلاحظ ان التغير فى الوزن يساوى الفرق بين المدخل والمخرج. ويمكننا تمثيل ذلك بمعادلات تفاضلية من الرتبة الأولى. الخزانان X ، Y مبدئياً يحتويان $x(0) = 100$ ، $y(0) = 0$ من الملح على الترتيب عندما $t = 0$. الكميات $x/100$ ، $y/100$ يمثلان على الترتيب كمية الملح فى كل جالون من المياه المأخوذة من X ومن Y عند الزمن t.

أخذت 3 جالونات من الخزان X وأضيفت إلى الخزان Y، بينما واحد من الثلاث جالونات إخذت من Y وأضيفت إلى X. وبالتالى يكون لدينا النظام

$$\frac{dx}{dt} = -3\frac{x}{100} + \frac{y}{100}\ , \quad x(0) = 100$$

$$\frac{dy}{dt} = 3\frac{x}{100} - 3\frac{y}{100}\ , \quad y(0) = 0 \qquad (1)$$

وحيث أن كل من المعادلتين فى (1) يحتويان على x، y فلا يمكننا أن نحلهما مباشرة. وعلى ذلك نحل لأحد المتغيرات. سنبدأ بالحل بالنسبة إلى المتغير x بدلالة المتغير y ومشتقاته. فنحصل على

$$x = y + \frac{100}{3}\frac{dy}{dx} \qquad (2)$$

باشتقاق (2) ومساواة الطرف الأيسر بالطرف الأيمن للمعادلة الأولى فى (1) نحصل على

$$\frac{-3x}{100} + \frac{y}{100} = \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} + \frac{100}{3}\frac{d^2y}{dt^2} \qquad (3)$$

من (2)، (3) نجد أن

$$\frac{100}{3}\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + \frac{2y}{100} = 0 \qquad (4)$$

والشروط الابتدائية للمعادلة (4) نحصل مباشرة من النظام حيث $y(0) = 0$، $x(0) = 100$ فنجد أن

$$y'(0) = 3\frac{x(0)}{100} - 3\frac{y(0)}{100} = 3 \qquad (5)$$

بضرب طرفى (4) فى $\frac{3}{100}$ فنحصل على مسألة القيمة الابتدائية

$$y'' + \frac{6}{100}y' + \frac{6}{(100)^2}y = 0\ , \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3 \qquad (6)$$

وتكون المعادلة المميزة للمعادلة (6) لها الجذرين

$$\lambda_1 = \frac{-3+\sqrt{3}}{100}, \qquad \lambda_2 = \frac{-3-\sqrt{3}}{100}$$

وبذلك يكون الحل العام هو

$$y(t)=c_1e^{[(-3+\sqrt{3})t]/100}+c_2e^{[(-3-\sqrt{3})t]/100}$$

وباستخدام الشروط الابتدائية $y(0)=0,\ y'(0)=3$ نجد أن

$$c_1+c_2=0$$

$$\frac{-3+\sqrt{3}}{100}c_1-\frac{3+\sqrt{3}}{100}c_2=3$$

ومن ذلك نجد أن $c_1=-c_2=50\sqrt{3}$ وبالتالى

$$y=50\sqrt{3}[e^{[(-3+\sqrt{3})t]/100}-e^{[(-3-\sqrt{3})t]/100}]$$

وبتعويض هذه الدالة y فى الطرف الأيمن من (2) نحصل على

$$x(t)=50[e^{[(-3+\sqrt{3})t]/100}+e^{[(-3-\sqrt{3})t]/100}]$$

وتلاحظ ان كمية الملح فى الخزانين يؤول إلى الصفر عندما $t\to\infty$.

ملحوظة: يسمى النظام المكون من خزان واحد أو أكثر بالكيموستات الذى يستبدل فيه الملح بالكائنات الدقيقة ومواد التغذية ونلاحظ فيه معدل الادخال يساوى معدل الاخراج.

تمرين: (أ) فى المثال السابق متى يحتوى الخزان Y لكبر كمية من الملح وكم كمية الملح فى Y فى ذلك الوقت.

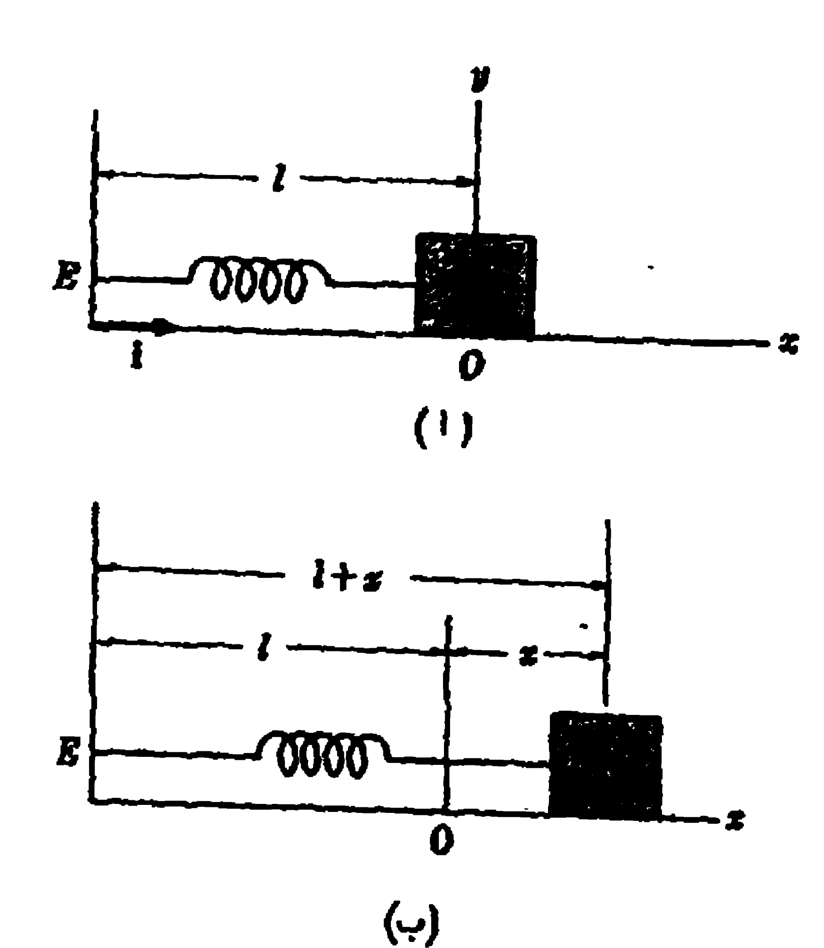
(ب) افترض فى المثال السابق أن معدل السريان من الخزان Y إلى الخزان X هو 2 جالون / دقيقة بدلا من جالون واحد فى الدقيقة. وباقى المعطيات كما هى. اوجد المعادلات المعبرة عن كمية الملح فى كل منهما فى جميع الأزمنة.

٧-٢ تطبيقات فى الميكانيكا:

أ – الحركة الاهتزازية: vibration motion

لقد استخدمت المعادلة التفاضلية لوصف حركة جسيمات (particles) وكمثال بسيط على ذلك. ليكن لدينا كتلة m موضوعة على منضدة أفقية ملساء ممثلة

بالمحور x (كما فى شكل أ)



ومثبتة فى أحد طرفى زنبرك (spring) بينما طرفه الأخر مثبت عند E. الطول الطبيعى للزنبرك هو ℓ وكتلته يمكن اهمالها. إذا ازيحت الكتلة m على طول المحور x كما فى شكل (ب) ثم تركت فانها سوف تهتز أو تتذبذب إلى الأمام وإلى الخلف حول موضع الاتزان O.
لايجاد معادلة الحركة، لاحظ أنه عند أى لحظة يكون طول الزنبرك هو $\ell+x$ (شكل ب) وتوجد قوة تحاول ارجاع الكتلة m إلى موضع إتزانها وطبقا لقانون هوك، تسمى هذه القوة قوة الاسترداد (restorting force) وتتناسب مع الاستطالة x وتعطى بالعلاقة

$$\underline{F}_R = -Kx\,\underline{i}$$

حيث ثابت التناسب K يسمى بثابت الزنبرك أو معامل الصلابة (stiffness) أو معامل المرونة (elasticity) وباستخدام قانون نيوتن الثانى يكون لدينا.

$$m\frac{d^2(x\,\underline{i})}{dt^2} = -Kx\,\underline{i} \qquad \text{أى} \qquad m\ddot{x} + Kx = 0$$

وهذه المنظومة الإهتزازية تسمى الحركة التوافقية البسيطة

(simple harmonic motion) أو المتذبذب التوافقى البسيط.

يمكن كتابة المعادلة (2) وبمعرفة الشروط الابتدائية $x = A,\ \frac{dx}{dt} = 0$ عند $t = 0$

فنجد أن $x = A\cos wt$ حيث $w = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

ب – **تعريف:**

(أ) سعة الحركة Amplitude: هى المسافة A وتكون أكبر إزاحة من موضع الاتزان.

(ب) الزمن الدورى Period للحركة: هو زمن نبذبة كاملة (دورة كاملة) أى إذا رمزنا للزمن الدورى بالرمز T فإن

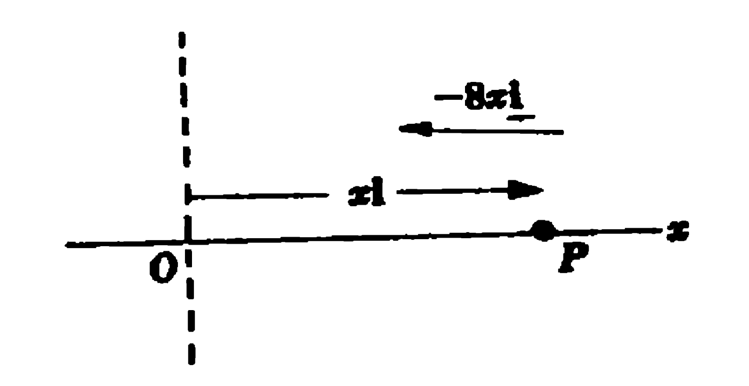
$$T=\frac{2\pi}{w}=2\pi\sqrt{m/K}$$

(جـ) تردد الحركة Frequency: هو عدد الذبذبات أو الدورات الكاملة فى وحدة الزمن ويرمز له بالرمز f وعليه فإن

$$f=\frac{1}{T}=\frac{w}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{K/m}$$

ملحوظة: السعة قد تتغير طبقا للشروط الابتدائية بينما الزمن الدورى والتردد لايتغيران وتسمى φ بزاوية الطور.

مثال (١): جسيم P *كتلته* 2gm يتحرك على المحور x ثم جذب من على بعد 20 وحدة نحو نقطة الأصل بقوة مقدارها $8x$ (كما فى الشكل) إذا كان الجسيم ساكنا عند $x=20$ اوجد



(أ) المعادلة التفاضلية والشروط الابتدائية التى تصف الحركة

(ب) موضع الجسيم عند أى لحظة

(جـ) السرعة عند أى لحظة

(د) السعة والزمن الدورى والتردد

الحل: (أ) عند $\underline{r}=x\,\underline{i}$ متجه موضع P ومن قانون نيوتن الثانى

$$2\frac{d^2x}{dt^2}\underline{i}=-8x\,\underline{i}\quad\Rightarrow\quad\frac{d^2x}{dt}+4x=0\qquad\text{(i)}$$

وهى المعادلة التفاضلية المطلوبة والشروط الابتدائية هى $x = 20$ ، $\frac{dx}{dt} = 0$ عند $t = 0$.

(ب) الحل العام للمعادلة (i) هو

$$x = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

وباستخدام الشروط المعطاه نجد أن

$$x = 20 \cos 2t \qquad \text{(ii)}$$

(جـ) حيث أن $\frac{dx}{dt} = -40 \sin 2t$ فتكون هى السرعة عند أى لحظة

(د) السعة = 20 ، الزمن الدورى $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ والتردد = $\frac{1}{\pi}$

مثال (٢): (أ) اثبت أن الدالة $x(t) = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt$ يمكن كتابتها على الصورة $c \cos(wt - \varphi)$ حيث $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ ، $\varphi = \tan^{-1}(c_2 / c_1)$

(ب) اوجد السعة والزمن الدورى والتردد للدالة فى (أ).

الحل:

$$x(t) = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos wt + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin wt \right)$$

$$= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} (\cos \varphi \cos wt + \sin \varphi \sin wt)$$

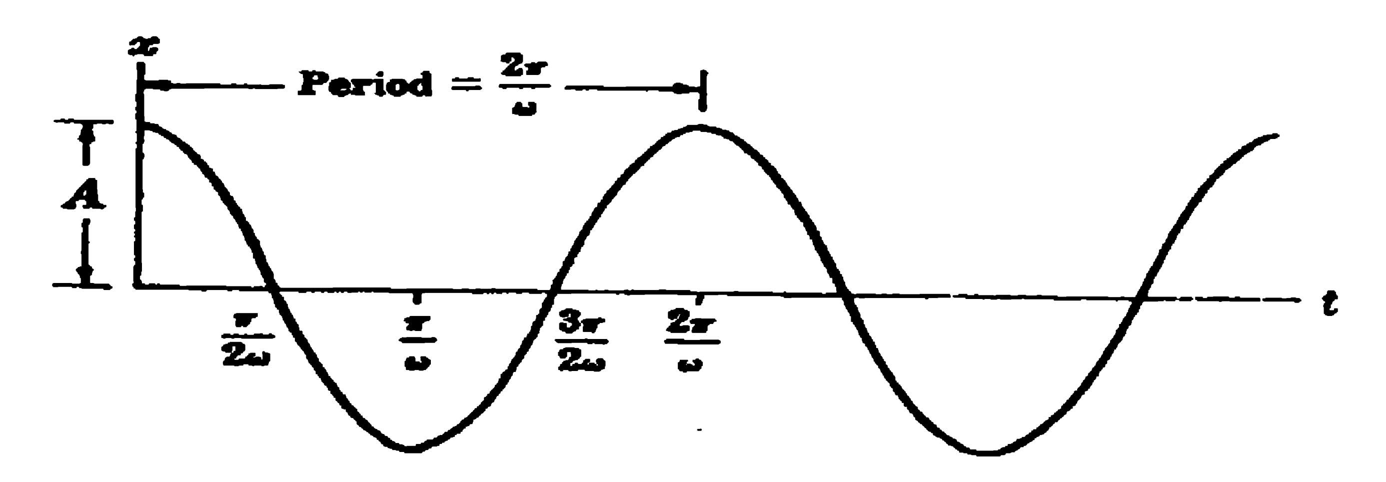
$$= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos(wt - \varphi) = c \cos(wt - \varphi)$$

حيث $\tan \varphi = c_2 / c_1$ ، $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$.

وسوف نختار قيمة φ الواقعة بين $0 \le \varphi \le \pi$.

(ب) السعة هى c ، الزمن الدورى $\frac{2\pi}{w}$ ، التردد $\frac{w}{2\pi}$.

ملحوظة: بالرجوع إلى مثال (1) حيث $c = 20$، $m = 2$، $k = 8$ وحيث أن $\cos wt$ تتغير من $+1$ ، -1 فان الكتلة تذبذب من $x = -c$ إلى $x = c$ والشكل يوضح العلاقة بين x و t



جـ- طاقة المتذبذب التوافقى البسيط:

إذا كانت P هى طاقة الحركة Kinetic energy ، V طاقة الجهد Potential energy فإن الطاقة الكلية $E = P + V$ وعلى ذلك يكون لدينا

$$V = \frac{1}{2}kx^2 \ , \ P = \frac{1}{2}mv^2$$

وعلى ذلك يكون

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mw^2c^2\sin^2(wx - \varphi) + \frac{1}{2}kc^2(wx - \varphi) = mw^2c^2$$

د – المتذبذب التوافقى المخمد (damped harmonic oscillator)

من الناحية العملية، يمكن أن تؤثر قوى مختلفة على متذبذب توافقى بحيث تقلل من مقدار الذبذبات المتتابعة حول موضع الاتزان. مثل هذه القوى تسمى قوة المضاعلة أو الاخماد وهى تتناسب مع السرعة، ويمكن استخدامها كنموذج تقريبى وتعطى بالعلاقة

$$F_D = -\beta v = -\beta\frac{dx}{dt} \qquad (3)$$

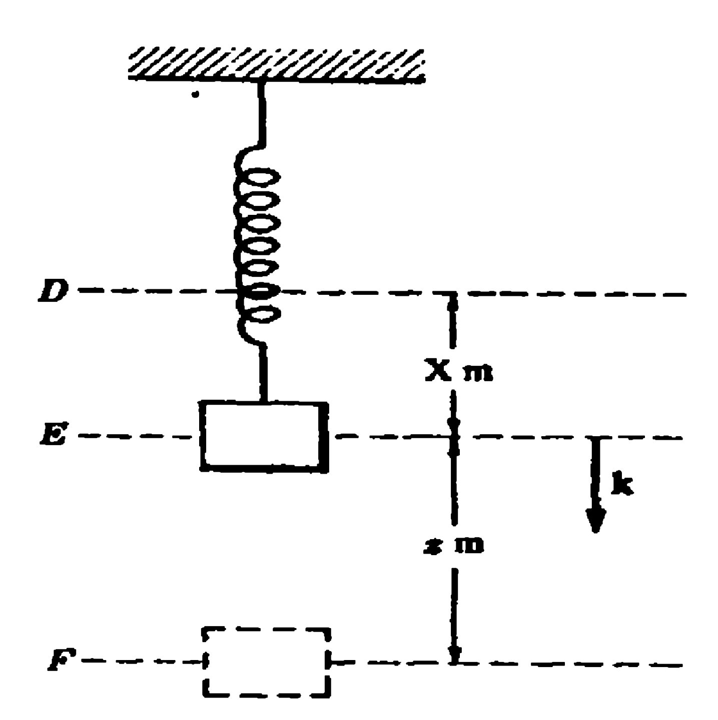
حيث يرمز F_D إلى قوة المضاعلة (الاخماد) ، β ثابت موجب يسمى معامل الاخماد. إذا اعتبرنا قوة الاخماد بالاضافة إلى قوة الاسترداد فإننا نحصل على المتذبذب التوافقى المتضاعل (المخمد) وتكون معادلة حركته هى

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=0 \qquad (4)$$

وذلك بتطبيق قانون نيوتن الثانى ويمكن كتابة المعادلة (4) على الصورة $\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+w^2x=0$ حيث $\beta/m=2\gamma$ ، $k/m=w^2$.

مثال (٣): علق جسيم يزن 6kg من نهاية زنبرك رأسى خفيف فأحدث استطالة 40 cm

(i) اوجد موضع الجسم عند أى لحظة إذا كان فى البداية شد 25 cm إلى أسفل ثم ترك



(ii) لوجد السعه والزمن الدورى والتردد.

الحل: (i) نفترض D، E تمثلان موضع نهاية الزنبرك قبل وبعد تعليق الجسيم فى الزنبرك. الموضع E موضع الاتزان. سوف نختار مجموعة الاحداثيات الموضحة فى الشكل بحيث يكون الاتجاه الموجب للمحور z إلى أسفل وتكون نقطة الأصل عند الاتزان. باستخدام قانون هوك إذا كان الوزن 6 kg يحدث استطالة 40 cm فان الوزن 15 kg يعطى استطالة 1 m.

عندما يكون الجسيم عند الموضع F فانه يقع تحت تأثير قوة إلى أعلى مقدارها 15(0.4+z)kg وقوة وزنه إلى اسفل 6 kg. وبتطبيق قانون نيوتن الثانى نحصل على

$$\frac{6}{10}\frac{d^2z}{dt^2}\underline{k}=6\underline{k}-15(0.4+z)\underline{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2z}{dt^2}+25z=0$$

والذى يكون حلها هو

$$x=c_1\cos 5t+c_2\sin 5t$$

وباستخدام الشروط المعطاه عند $t = 0$ ، وهى $z = 1/4$ ، $\frac{dz}{dt} = 0$ فيكون $c_1 = 1/4$ ، $c_2 = 0$ ويكون الحل هو

$$z = (1/4)\cos 5t$$

(ii) من الحل فى (i) نرى ان السعة $\frac{1}{4}m$ ، والزمن الدورى هو $\frac{2\pi}{5}$ ثانيه والتردد هو $\frac{5}{5\pi}$ نبذبه / ثانية .

مثال (٤): فى المثال (١)، افترض ان الجسيم P يتعرض كذلك لقوة مضاعلة (اخماد) مقدارها يساوى 8 أضعاف السرعة اللحظية.

أوجد: (i) الموضع (ii) السرعه عند أى لحظة (iii) ارسم العلاقة البيانية للموضع كدالة فى الزمن t

الحل: بتطبيق قانون نيوتن الثانى نحصل على

$$2\frac{d^2x}{dt^2}\underline{i} = -8x\,\underline{i} - 8\frac{dx}{dt}\underline{i} \;\Rightarrow\; \frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0 \qquad (4)$$

والتى حلها هو

$$x = e^{-2t}(c_1 + tc_2)$$

عندما يكون $t = 0$، $x = 20$، $\frac{dx}{dt} = 0$ فإن $c_1 = 20$، $c_2 = 40$

ويأخذ الحل الصورة

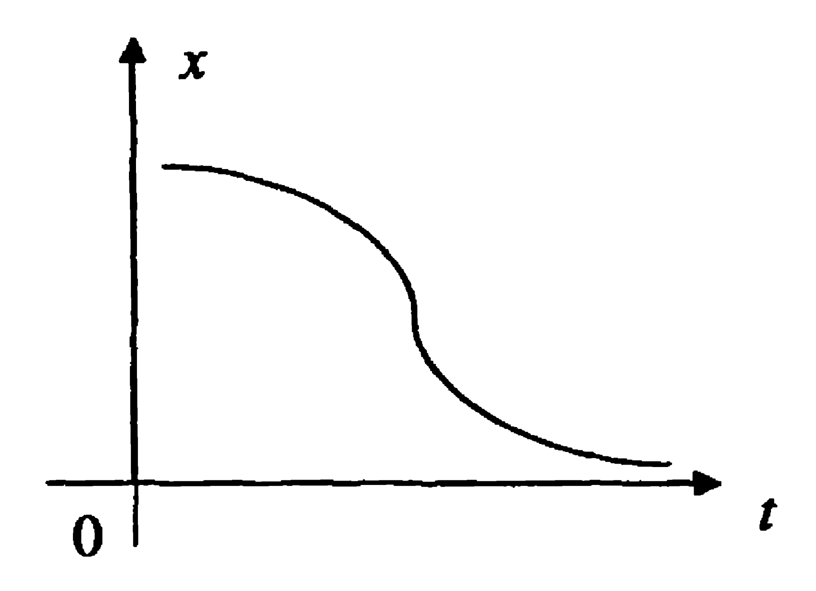
$$x = 20e^{-2t}(1 + 2t)$$

وهى معادلة الموضع عند اى لحظة

(ii) تعطى السرعة من العلاقة

$$\underline{v} = \frac{dx}{dt}\underline{i} = -80te^{-2t}\,\underline{i}$$

(iii) يوضح الشكل تغير x كدالة فى الزمن وواضح ان الحركة ليست تذبذبية: الجسيم يقترب ببطئ من نقطة الصفر لكنه لايصل إليها . وهذا يعتبر مثالا للحركة "حرجة الاخماد كما فى الشكل



مثال (٥): جسيم كتلته 5g يتحرك على المحور x تحت تأثير قونين: (1) قوة جذب نحو نقطة الأصل O تساوى بالداين عدديا 40 مرة قدر الازاحة اللحظية من O، (2) قوة لخماد تتناسب مع السرعة اللحظية بحيث تكون قوة الاخماد المناظرة لسرعة 10 cm/sec هى 200 داين. إذا افترضنا ان الجسم بدأ حركته من السكون عند نقطة تبعد 20 cm من نقطة الأصل.

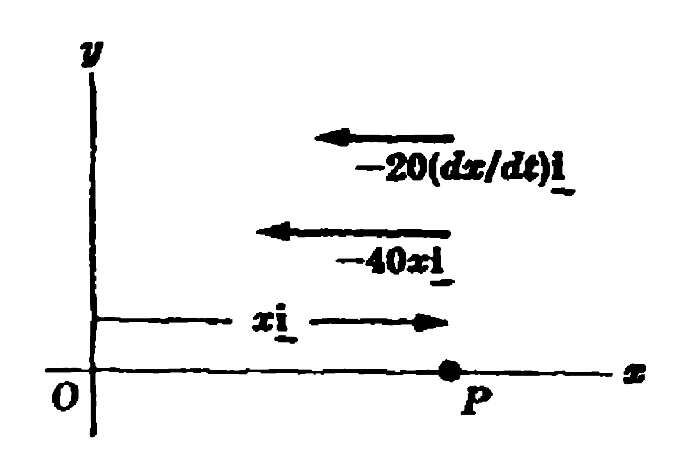
(i) اوجد المعادلة التفاضلية والشروط التى تصف الحركة

(ii) اوجد موضع الجسيم عند أى لحظة

(iii) عين السرعة والزمن الدورى والتردد للذبذبات المتضائلة

(iv) ارسم الحركة بيانياً.

الحل: ليكن $\underline{r} = x\,\underline{i}$ موضع الجسيم كما فى الشكل عندئذ تكون قوة الجذب (متجهة نحو O) هى $-40x\,\underline{i}$.
ومقدار قوة الاخماد f يتناسب مع



السرعة أى $f = \beta \frac{dx}{dt}$ حيث β مقدار ثابت وبما أن $f = 200$ عندما يكون $\frac{dx}{dt} = 10$ فإن $\beta = 20$، $f = 20\frac{dx}{dt}$. لاحظ أنه عندما يكون $\frac{dx}{dt} > 0$، $x > 0$ فإن الجسم يكون على محور x الموجب ويتحرك إلى اليمين.

بناء على ذلك فان قوة المقاومة يجب أن تكون متجه نحو اليسار. وهذا يتم فقط إذا كان

$$\underline{f} = -20\frac{dx}{dt}\underline{i}$$

وهذه الصورة بالنسبة إلى $\underline{f}$ يمكن اثبات صحتها إذا كان $x > 0$، $\frac{dx}{dt} < 0$ و $x < 0$، $\frac{dx}{dt} > 0$ و $x < 0$، $\frac{dx}{dt} < 0$.

وباستخدام قانون نيوتن الثانى يكون لدينا.

$$5\frac{d^2x}{dt^2}\underline{i} = -20\frac{dx}{dt}\underline{i} - 40x\,\underline{i} \quad \Rightarrow \quad x'' + 4x' + 8x = 0$$

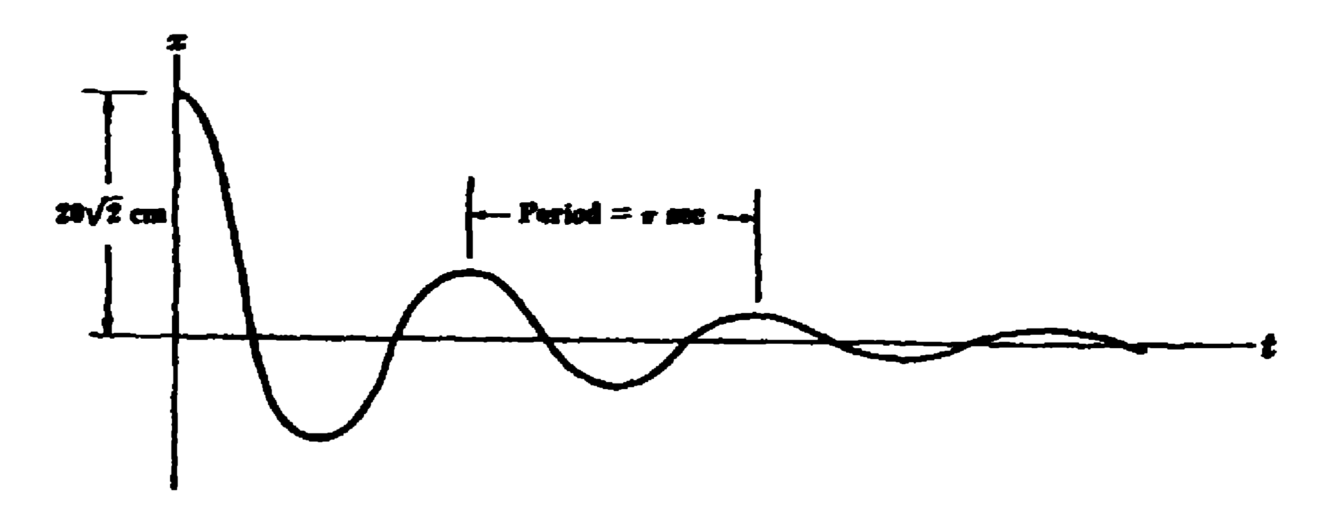
(ii) وحيث أن الجسيم يبدأ من السكون عند مسافة 20 cm من O فإن $t = 0$ عند $\frac{dx}{dt} = 0$، $x = 20$، وباستخدام الشروط المعطاه يكون الحل العام على الصورة

$$x = 20e^{-2t}(\cos 2t + \sin 2t) = 20\sqrt{2}e^{-2t}\cos(2t - \frac{\pi}{4})$$

(iii) السعة تساوى $20\sqrt{2}e^{-2t}cm$ ، الزمن الدورى هو $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ،

التردد = $\frac{1}{\pi}$

(iv) المنحنى الذى يمثل تغير x كدالة فى الزمن t كما هو فى الشكل مع ملاحظة أن سعة التذبذب تتناقص إلى الصفر كلما زادت t



(هـ) الحركة زائدة المضاءلة (الاخماد) وحرجه المضاءلة وناقصة المضاءلة (الاخماد)

عندما حصلنا على حلول المعادلة التفاضلية

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+w^{2}x=0 \qquad (1)$$

توجد لدينا ثلاث حالات:

(i) حركة زائدة المضاءلة Over damped: حيث $\gamma^2>w^2$ أى $\beta^2>4km$
وفى هذه الحالة يكون الحل للمعادلة (1) هو

$$x=e^{-\gamma t}(c_1e^{\alpha t}+c_2e^{-\alpha t}),\alpha=\sqrt{\gamma^2-w^2}$$

ويمكن تعيين c_1، c_2 من الشروط الابتدائية

(ii) حركة حرجة المضاءلة critical damped: حيث $\gamma^2=w^2$ أى $\beta^2=4km$

ويكون حل المعادلة (1) هو

$$x=e^{-\gamma t}(c_1+c_2t)$$

حيث c_1 ، c_2 يعينان من الشروط الابتدائية

(iii) حركة ناقصة المضاءلة (حركة تذبذبية مخمدة): under damped

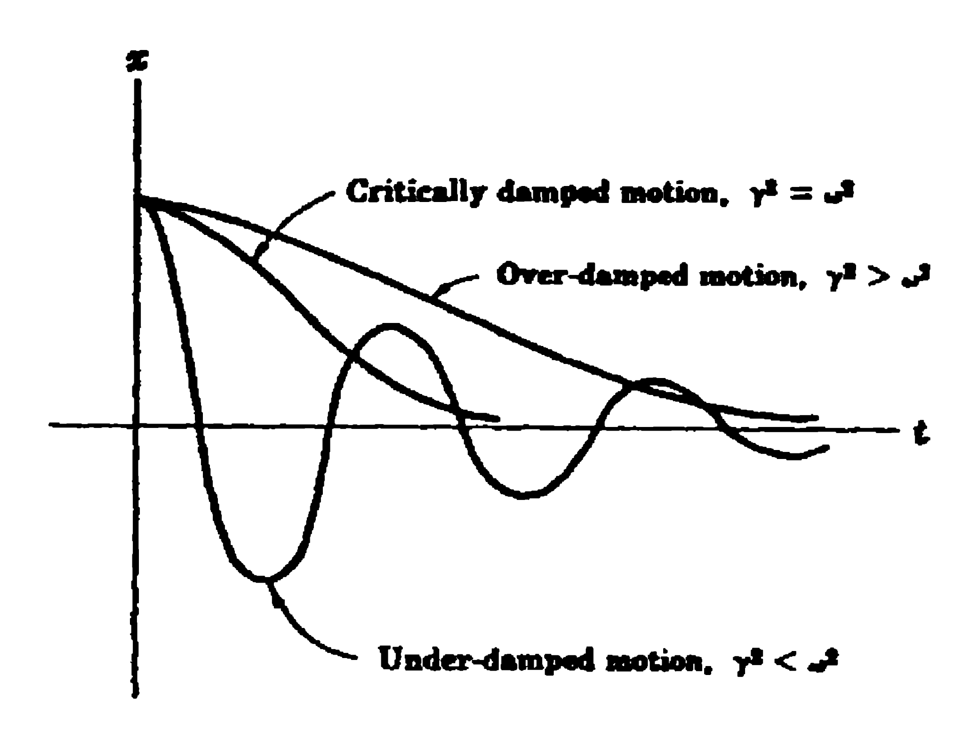
حيث $\gamma^2<w^2$ أى $\beta^2<4km$

ويكون الحل العام للمعادلة (1) هو

$$\text{(i)}\ x = e^{-\gamma t}(c_1 \sin\lambda t + c_2 \cos\lambda t) = ce^{-\lambda t}\cos(\lambda t - \phi)$$

حيث $c=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$، $\lambda=\sqrt{w^2-\gamma^2}$ وزاوية الطور ϕ يمكن تعيينهما من الشروط الابتدائية.

فى الحالتين (i)، (ii) يكون التضاعل كبيراً لدرجة لايحدث معها تذبذب وتعود الكتلة m تدريجيا إلى موضع الاتزان $x=20$ كما فى الشكل، حيث أننا اعتبرنا ان الشرطين الابتدائيين هما $x=x_0$، $\frac{dx}{dt}=0$.



لاحظ ان الكتلة m تعود إلى موضع الاتزان فى حالة الحركة حرجة المضاعلة أسرع منها فى حالة الحركة زائدة المضاعلة.

فى الحالة الثالثة (iii) تقل درجة التضاعل (الاخماد) إلى حد يسمح بحدوث ذبذبات حول موضع الاتزان، على الرغم من أن سعة هذه الذبذبات تتناقص مع الزمن كما هو فى الشكل. الفرق فى الزمن الذى يفصل قمتين (أو قاعين) فى الحركة ناقصة الاخماد الموضحة بالشكل يسمى بالزمن الدورى للحركة ويساوى

$$\text{(ii)}\ T = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{w^2-\gamma^2}} = \frac{4\pi m}{\sqrt{4km-\beta^2}}$$

والتردد هو مقلوب الزمن الدورى أى

$$\text{(iii)}\quad f=\frac{1}{T}=\frac{\lambda}{2\pi}=\frac{\sqrt{w^2-\gamma^2}}{2\pi}=\frac{\sqrt{4km-\beta}}{4\pi m}$$

لاحظ أنه فى حالة ما إذا كان $\beta=0$ فإن المعادلتين (ii)، (iii) تؤلان إلى

$$T=\frac{2\pi}{w}=2\pi\sqrt{m\backslash k}\ ,\ f=\frac{1}{T}=\frac{w}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

على الترتيب. والزمن الدورى والتردد المناظرين للحالة $\beta=0$ يسميان فى بعض الأحيان "الفترة الطبيعية" و"التردد الطبيعى" للتذبذب على الترتيب.

الزمن الدورى T المعطى من المعادلة (i) هو أيضاً يساوى الفرق بين القيمتين المتتاليين للزمن T عندما يكون $\cos(\lambda t-\phi)=1$ [أو $\cos(\lambda t-\phi)=-1$] كما هو مبين بالمعادلة (i). نفترض أن قيمتى x المناظرتين لقيمتى الزمن المتتاليتين t_n، $t_{n+1}=t_n+T$ هما x_n، x_{n+1} على الترتيب. عندئذ يكون

$$x_n/x_{n+1}=e^{\lambda t_n}/e^{\lambda t_{n+1}+T}=e^{\lambda T}$$

تسمى الكمية الثابتة $\delta=\ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)=\lambda T$ بالتناقص اللوغاريتمى.

مثال (٦): احسب الفترة الطبيعية والتردد الطبيعى للتذبذب للجسيم فى مثال (٥).

الحل: الفترة الطبيعية هى الزمن الدورى عندما لايوجد إخماد وتعطى الحركة فى مثل هذه الحالة بإزالة الحد $\frac{dx}{dt}$ من المعادلة وعلى ذلك يكون

$$\frac{d^2x}{dt^2}+8x=0\Rightarrow x=c_1\cos 2\sqrt{2}t+c_2\sin 2\sqrt{2}t$$

وبذلك تكون الفترة الطبيعية هى $\frac{2\pi}{2\sqrt{2}}=(\pi/\sqrt{2})\sec$ والتردد الطبيعى يساوى $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ نبذبة / ثانية.

مثال(٧): ماهو المدى الذى تترلوح فيه قيمة ثابت التضاعل فى المثال (٥) بالنسبة للحركة (i) زائدة المضاعلة (ii) ناقصة المضاعلة أو التذبذبية المخمدة (iii) حرجة المضاعلة ؟.

الحل: إذا كان β هو معامل التضاعل (الاخماد) فإنه يمكن كتابة المعادلة على الصورة

$$5\frac{d^2x}{dt^2}\underline{i} = -\beta\frac{dx}{dt}\underline{i} - 40x\,\underline{i} \;\Rightarrow\; \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{5}\frac{dx}{dt} + 8x = 0$$

عندئذ تكون الحركة:

(i) زائدة المضاعلة إذا كان $(\beta/5)^2 > 32 \;\Rightarrow\; \beta > 20\sqrt{2}$

(ii) ناقصة المضاعلة إذا كان $(\beta/5)^2 < 32 \;\Rightarrow\; \beta < 20\sqrt{2}$

(ii) حركة المضاعلة إذا كان $(\beta/5)^2 = 32 \;\Rightarrow\; \beta = 20\sqrt{2}$

مثال (٨): حل مثال (٥) أخذا فى الاعتبار قوة إخماد خارجية تعطى عدديا بالوزن كجم من βv، حيث v هى السرعة اللحظية بالمتر/ثانية

(i) $\beta = 4.8$ ، (ii) $\beta = 6$ ، (iii) $\beta = \frac{78}{5}$

الحل: معادلة الحركة هى:

$$\frac{6}{10}\frac{d^2z}{dt^2}\underline{k} = 6\underline{k} - 15(0.4 + z)\underline{k} - \beta\frac{dz}{dt}\underline{k}$$

$$\Rightarrow\; \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{5}{3}\beta\frac{dz}{dt} + 25z = 0$$

(i) عندما يكون $\beta = 4.8$ فإن المعادلة تؤول إلى

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 8\frac{dz}{dt} + 25z = 0$$

ويكون حلها هو

$$z = e^{-4t}(c_1\cos 3t + c_2\sin 3t)$$

باستخدام الشروط الابتدائية: $t=0$ ، $\frac{dz}{dt}=0$، $z=\frac{1}{4}$ نجد أن $c_1=\frac{1}{4}$، $c_2=\frac{1}{3}$ ويكون الحل على الصورة

$$z=\frac{1}{12}e^{-4t}(3\cos 3t+4\sin 3t)=\frac{5}{12}e^{-4t}\cos(3t-53^{\circ}8')$$

والحركة تذبذبية مخمدة وزمنها الدورى $\frac{2\pi}{3}$ ثانية

(ii) عندما يكون $\beta=6$ فإن $\frac{d^2z}{dt^2}+10\frac{dz}{dt}+25z=0$ يكون حلها

$$z=e^{-5t}(a+bt)$$

وباستخدام الشروط الابتدائية يكون الحل على الصورة

$$z=\frac{1}{4}e^{-5t}(1+5t)$$

والحركة هى حرجه المضاءلة حيث ان أى نقص فى β عن هذه القيمة سوف يحدث حركة تذبذبيه

(iii) عندما يكون $\beta=\frac{78}{5}$ تكون المعادلة هى

$$\frac{d^2z}{dt^2}+26\frac{dz}{dt}+25z=0$$

ويكون حلها هو

$$z=c_1e^{-t}+c_2e^{-25t}$$

وباستخدام الشروط الابتدائية نحصل على الحل وهو

$$z=\frac{25}{96}e^{-t}-\frac{1}{96}e^{-25t}$$

أى أن الحركة تكون زائدة المضاءلة (الاخماد).

ز – الاهتزازات القسرية: Forced vibrations

إذا طبقنا على الكتلة m بالاضافة إلى قوة الاسترداد $-kx\underline{i}$ وقوة المضاءلة $-\beta v\underline{i}$ قوى أخرى $F(t)\underline{i}$ تذبذبية على الصورة $F(t)=F_0\cos\alpha t$

فإن المعادلة التفاضلية للحركة تكون على الصورة

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-\beta\frac{dx}{dt}+F_0\cos\alpha t$$

أى

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+w^2x=f_0\cos\alpha t \qquad \text{(i)}$$

حيث $f_0=F_0/m$ ، $w^2=k/m$ ، $\gamma=\dfrac{\beta}{2m}$

ويكون الحل الخاص لهذه المعادلة هو

$$x=(f_0/\sqrt{(\alpha^2-w^2)^2+4\gamma^2\alpha^2})\cos(\alpha t-\varphi) \qquad \text{(ii)}$$

حيث

$$\tan\varphi=2\gamma\alpha(w^2-\alpha^2)\ ,\ 0\le\varphi\le\pi$$

أما حل الدالة المتممة فهو معروف.

وكما رأينا ان الحل العام للمعادلة (i) من الصفر خلال فترة زمنية قصيرة ولذلك فاننا نسميه الحل العابر (transient) بعد انقضاء فترة قصيرة. تعطينا العلاقة (ii) بصفة اساسية حركة الكتلة m ولذلك تسمى حل حالة الثبات (أو الاستقرار) (steady state solution). والاهتزازات أو الذبذبات التى تحدث تسمى الاهتزازات أو الذبذبات القسرية (الجبرية) ويكون ترددها مساويا لتردد القوة (الذبذبية) ولكنها تختلف بمقدار زاوية الطور.

ح – الرنين: (Resonance)

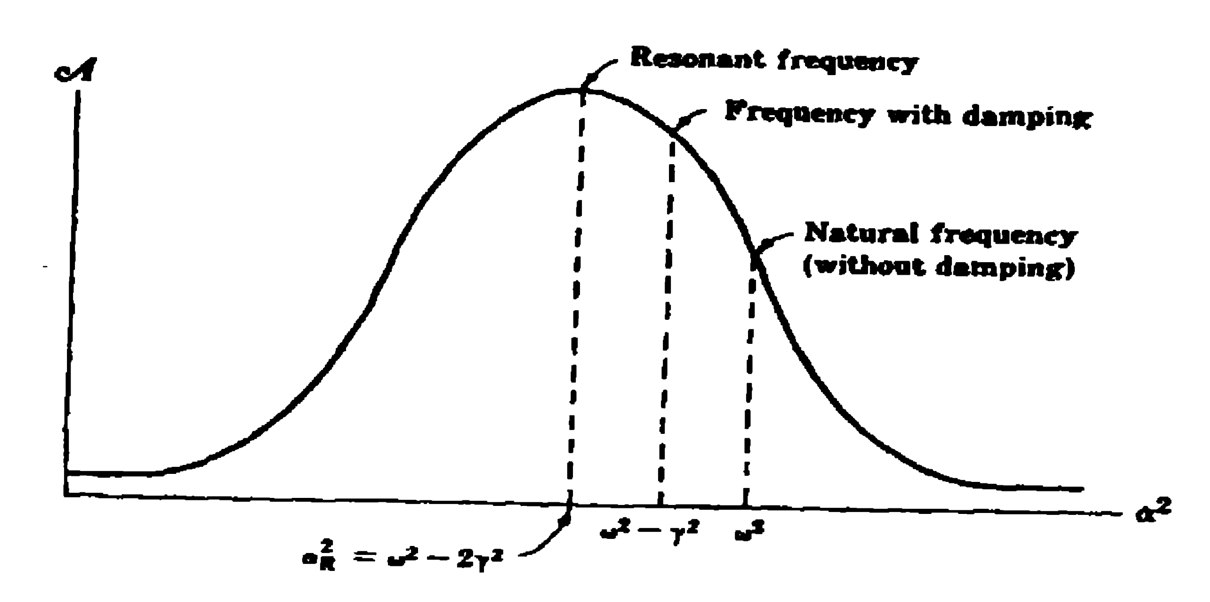
سعة الذبذبات القسرية فى (i) تعطى بالعلاقة

$$A=f_0/\sqrt{(\alpha^2-w^2)^2+4\gamma^2\alpha^2} \qquad \text{(ii)}$$

إذا افترضنا $\gamma \neq 0$ أى أن $\beta \neq 0$ فان هذا يعنى وجود المضاعلة. اكبر قيمة للسعة A فى هذه الحالة تحدث عند قيمة $\alpha/2\pi$ لتردد القوة التذبذبية بحيث

$$\alpha^2 = \alpha_R^2 = w^2 - 2\gamma^2$$

وهذا بافتراض أن $\gamma^2 < \frac{1}{2}w^2$. بالقرب من هذا التردد يمكن حدوث تذبذبات عالية جداً، تسبب فى بعض الاحيان إتلافا للمنظومة. تسمى هذه الظاهرة بالرنين ويسمى التردد $\gamma^2 = \frac{1}{2}w^2$ بتردد الرنين أو التردد الرنان



مثال (٩): معامل الصلابة لزنبرك رأسى هو $4.8 kgwt$ لكل متر. علقت كتلة 3 kg من نهاية الزنبرك وكانت المجموعة فى حالة إتزان. عند $t = 0$ أثرت القوة $F(t) = 24\sin wt$، $t \geq 0$ بالوزن كجم. باهمال التضاعل، اوجد موضع الكتلة عند أى لحظة.

الحل: بنفس الطريقة السابقة طبقا لقانون نيوتن الثانى يكون لدينا

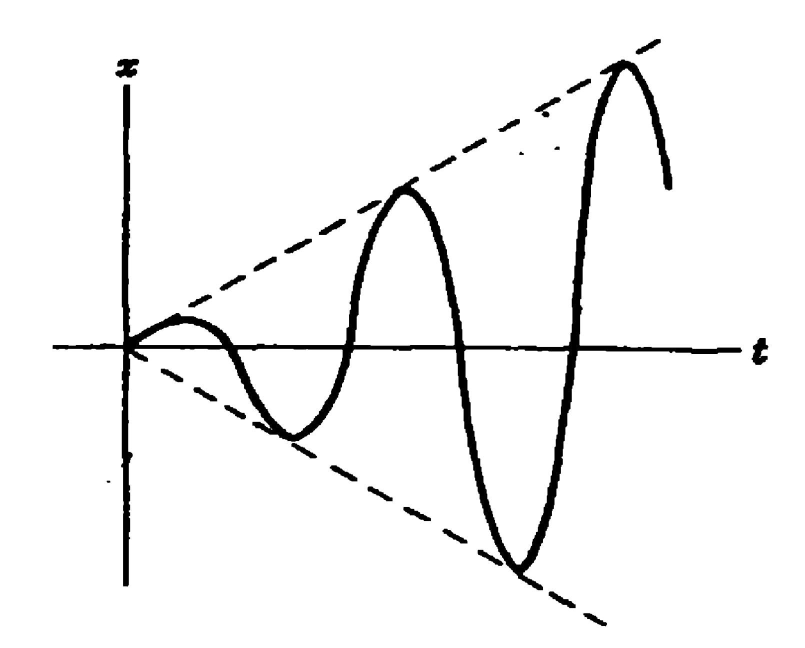
$$\frac{3}{10}\frac{d^2 z}{dt^2} = -4.8z + 24\sin 4t \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 z}{dt^2} + 16z = 80\sin 4t$$

وتحت الشروط $t = 0$ ، $z = 0$ ، $\frac{dz}{dt} = 0$ فان الحل يكون على الصورة

$$z = 2.5\sin 4t - 10t\cos 4t$$

كلما زادت t فإن الحد $-10t\cos 4t$ يزداد تدريجياً بدون قيد ومن الناحية الفيزيائية يحدث ان ينكسر الزنبرك فى النهاية وهذا مثال يوضح ظاهرة الرنين.

لاحظ ان معامل الصلابة التردد الطبيعى للزنبرك يساوى $\alpha^2=4$ فى القوة التذبذبية



ومنحنى الحد الأخير كما فى الشكل ويبين طريقة تكبير سعة الذبذبات مع الزمن

٧-٣ الدوائر الكهربائية Electric circuits

سوف نستخدم المفاهيم السابق ذكرها وسندرس دائرة كهربية تحتوى على مقاومة R وملف حثه L ومكثف سعته C جميعها متصلة على التوالى مع قوة دافعة كهربية E (ق. د. ك) ليكن R,L,C,E ثوابت وبتطبيق قاعدة كريشوف نحصل على

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{Q}{C}=E \qquad (1)$$

وحيث أن $\frac{dQ}{dt}=I$ ، I هو التيار، Q هى الشحنة. وبالتعويض فى المعادلة (1) نحصل على معادلة من الرتبة الثانية على الصورة

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{LC}=E \qquad (2)$$

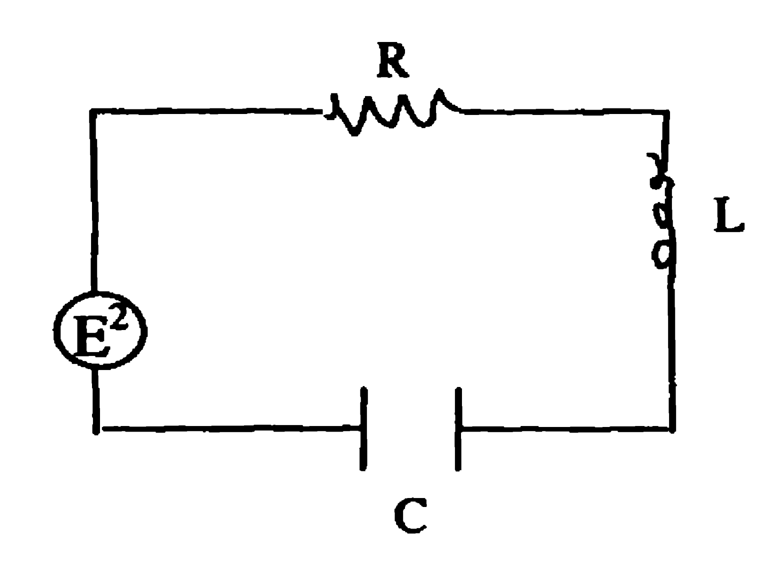
لحل هذه المعادلة تكون المعادلة الذاتية المناظرة للمعادلة المتجانسة هى

$$L\lambda^2+R\lambda+\frac{Q}{C}=0$$

ويكون جذراها هى

$$\lambda = \frac{R}{2L}\left[-1+\sqrt{1-\frac{4L}{CR^2}}\right], \lambda_2 = \frac{R}{2L}\left[-1-\sqrt{1-\frac{4L}{CR^2}}\right] \qquad (3)$$

مثال (١): ليكن Henry $L = 1(h)$ ، $R = 100\ ohms(\Omega)$ ،
$C = 10^{-4}\ farads(f)$ ، $E = 10^2\ volts(v)$ فى دائرة كما فى الشكل



الحل: نفترض عدم وجود الشحنة وعدم سريان التيار عند الزمن $t = 0$ عند تطبيق E. ومن المعادلة (3) نجد أن

$$\lambda_1 = -50 + 50\sqrt{3}i \quad ، \quad \lambda_2 = -50 - 50\sqrt{3}i$$

وعلى ذلك يكون

$$Q(t) = e^{-50t}(c_1 \cos 50\sqrt{3}t + c_2 \sin 50\sqrt{3}t) + 10^{-2}$$

حيث 10^{-2} تمثل الحل الخاص للمعادلة المعطاه. بوضع $Q(0) = 0$ نحصل على $c_1 = 10^{-2}$ وبوضع $I(0) = \frac{dQ}{dt}|_{t=0} = 0$ نحصل على $\sqrt{3}c_2 = c_1$

أى أن $c_2 = -\frac{\sqrt{3}}{300}$

وعلى ذلك نحصل على مقدار الشحنة فى الصورة

$$Q(t) = \frac{1}{100} - \frac{1}{300}e^{-50t}(3\cos 50\sqrt{3}\ t + \sqrt{3}\sin 50\sqrt{3}\ t)$$

ويكون التيار على الصورة

$$I(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-50t}\sin 50\sqrt{3}t$$

ويلاحظ ان التيار يخمد (يتضاءل) بسرعة وأن الشحنه تقترب بسرعة من قيمة حالة الاستقرار وهى $Q(\infty)\to\frac{1}{100}$.

مثال (٢): ليكن الحث والمقاومة والسعة كما فى مثال (١) تبقى كما هى ولكن $E=962\sin 60t$ أوجد الشحنه والتيار علما بانهما يتلاشيان عند $t=0$.

الحل: من المعادلة (1)

$$\frac{dI}{dt}+100I+10^4Q=962\sin 60t \tag{4}$$

ونحول المعادلة (4) بحيث أن جميع التعبيرات تكون بدلالة $Q(t)$ ونحصل على

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+100\frac{dQ}{dt}+10^4Q=962\sin 60t \tag{5}$$

ويكون الحل الخاص للمعادلة (4) هو

$$Q_p(t)=c_1\sin 60t+c_2\cos 60t \tag{6}$$

ولتحديد c_1، c_2 نعوض المعادلة (6) فى المعادلة (4) ونحصل على معادلتين آنيتين

$$6400c_1-6000c_2=962$$

$$6000c_1-6400c_2=0$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على $c_1=\frac{1}{125}$، $c_2=\frac{-3}{400}$ وحيث أن الحل العام للمعادلة المتجانسة كما هو للمعادلة (2) بوضع $E=0$ وبذلك يكون الحل العام للمعادلة (1) (أى (4)) هو

$$Q(t)=e^{-50t}(c_1\cos 50\sqrt{3}t+c_2\sin 50\sqrt{3}t)+\frac{1}{125}\sin 60t-\frac{3}{400}\cos 60t \tag{7}$$

وباشتقاق (7) نحصل على

$$I(t)=50e^{-50t}[(\sqrt{3}c_2-c_1)\cos 50\sqrt{3}t-(c_2+\sqrt{3}c_1)\sin 50\sqrt{3}t]$$
$$+\frac{12}{25}\cos 60t+\frac{9}{20}\sin 60t$$

بوضع $t=0$ واستخدام الشروط الابتدائية $Q(0)=0,\ I(0)=0$ نحصل على المعادلتين الآتيتين

$$c_1=3/400\quad,\qquad 50(\sqrt{3}c_2-c_1)=-\frac{12}{25}$$

وبحلهما نجد أن

$$c_1=\frac{3}{400},c_2=-7\sqrt{3}/10000$$

وعلى ذلك يكون

$$Q(t)=\frac{e^{-50t}}{10000}(75\cos 50\sqrt{3}t-7\sqrt{3}\sin 50\sqrt{3})+\frac{80\sin 60t-75\cos 60t}{10000}$$

$$I(t)=\frac{-e^{-50t}}{100}(48\cos 50\sqrt{3}t+34\sqrt{3}\sin 50\sqrt{3})+\frac{48\cos 60t+45\sin 60t}{100}$$

ملحوظة عامة: تحكم اهتزازات الزنبركات والدوائر الكهربية البسيطة بمعادلات تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة على الصورة

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_2x=f(t) \qquad (1)$$

تقسم الحركة أو التيار فى هذه النظم إلى حرة أو غير متضائلة (غير مخمدة) عندما $f(t)\equiv 0$، $a_1=0$. وهى توصف كحركة متضاءلة عندما تكون $f(t)$ صفراً تطابقياً ولكن $a_1\neq 0$. ويكون للحركة المتضاءلة ثلاث حالات منفصلة طبقاً لجذور المعادلة المميزة وهى (i) حقيقية ومختلفه (ii) متساوية، (iii) مركبة مترافقة. وتقسم هذه الحالات على الترتيب كما يلى (i) زائد المضاءلة (الاخماد) (ii) مضاءلة حرجة (iii) تذبذبية مخمدة (ناقصة المضاءلة فى المسائل الكهربية) وإذا كان $f(t)\neq 0$ فإن الحركة أو التيار يوصف بأنه قسرى (جبرى).

وتكون الحركة أو التيار عابراً إذا اختفى (أو يؤول إلى الصفر) عندما $t \to \infty$ وتكون حركة حالة الاستقرار أو تيار حالة الاستقرار هى التى ليست عابرة ولا تصبح غير محدودة. تنتج حركات عابرة عن النظم المتضاعلة الحرة بينما تنتج حركات عابرة وحالة الاستقرار عن النظم المتضاعلة القسرية (بافتراض ان القوى الخارجية جبريه)

الحركة الحرة غير المتضاعلة (غير المخمدة) يكون لها دائماً حل على الصورة

$$x(t) = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt$$

تمارين

١- يحتوى الخزان X على 500 جالون من ملح مشبع المذاب فيه 100 رطل من الملح. يحتوى الخزان Y على 100 جالون من الماء . تنساب المياه إلى الخزان X بمعدل 30 gal/min والخليط ينساب إلى Y بمعدل 40 gal/min. ويضخ الخليط فى Y إلى X مرة أخرى بمعدل 10 gal/min وأيضاً إلى خزان ثالث بمعدل 30 gal/min. أوجد اكبر تركيز من الملح فى Y ومتى يحدث هذا التركيز.

٢- فى دراسة تهتم بتوزيع ملح البوتاسيوم المشع بين خلايا الدم الحمراء أو بلازما إلى الخلايا الحمراء. وبالتالى تكون المادة الاشعاعية إنتقلت من البلازما إلى الخلايا الحمراء. وبالتالى يكون سلوك الاشعاعية كما فى السلوك فى خزانين (وعائين). إذا كان معامل التحويل الجزئى من البلازما إلى الخلايا هو $K_{12}=30.1\%$ لكل ساعه بينما $K_{21}=1.7\%$ لكل ساعه وكانت فى بداية التجربة $(t=0)$ المادة الإشعاعية 800 مقيسة فى الدقيقة فى البلازما ، 25 مقيسة فى الدقيقة فى الخلايا الحمراء. فما هو العدد المقيس فى الدقيقة فى الخلايا الحمراء بعد 300 دقيقة. هذا مع العلم بأن الكمية الكلية للبوتاسيوم (مستقرة ومشعه) فى الخلايا الحمراء والبلازما تبقى ثابته خلال التجربة.

٣- يحوى خزان X فى لحظة البدء 100 لتر من ماء مالح يحوى 100 كجم من الماء ويحوى خزان آخر Y فى اللحظة نفسها 100 لتر من الماء الصافى. فإذا افترضنا أن الماء ينساب من الخزان X إلى الخزان Y بسرعة 12 lit/min وأنه ينساب من الخزان Y إلى X بمعدل 8lit/min فإذا إفترضنا كذلك أن الماء فى كل خزان يبقى باستمرار متجانساً فكم يحوى الخزان X من الملح بعـــد 20 min.

٤- جسيم كتلته 12 gm يتحرك على المحور x ، تم جذبه نحو القطب O بقوة يعطى مقدارها بالداين ويساوى عدديا 60 مرة قدر البعد اللحظى x cm للجسيم O. إذا كان الجسيم قد بدأ حركته من السكون عند $x=10$ فاوجد:

(أ) السعه، (ب) الزمن الدورى (جـ) التردد.

٥- (أ) إذا كان الجسيم المذكور فى المسألة ٤ يبدأ الحركة من الموضع عند $x = 10$ بسرعة نحو O مقدارها 20 cm/sec فأوجد السعة والزمن الدورى والتردد فى هذه الحالة. (ب) احسب متى يصل الجسيم إلى O لأول مرة.

٦- جسم يتحرك على المحور x ثم جذب نحو نقطة الأصل O *على المحور بقوة تتناسب مع بعده اللحظى عن* O. إذا كان الجسيم قد بدأ من السكون عند $x = 5$ cm ووصل لأول مرة عند $x = 2.5$ cm بعد ثانيتين، اوجد

(أ) الموضع عند أى لحظة t، (ب) مقدار السرعه عند $x = 0$،

(جـ) السعة والزمن الدورى والتردد للتذبذب. (د) العجلة القصوى.

(هـ) السرعه القصوى.

٧- يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة على طول المحور x. اثبت أن:

(أ) العجلة تكون عدديا أكبر مايمكن عند نهايتى المسار، (ب) السرعة تكون عدديا أكبر مايمكن عند منتصف المسار، (جـ) العجلة تساوى الصفر عند منتصف المسار (د) السرعة تساوى الصفر عند نهايتى المسار.

٨- وضع وزن 8 kg على زنبرك رأسى فاحدث فيه استطالة 20 cm. شد الوزن إلى أسفل مسافة 40 cm ثم ترك.

(أ) أوجد سعة الذبذبات والزمن الدورى والتردد، (ب) عين الموضع والسرعة عند أى لحظة.

٩- وضعت كتلة 200 kg عند الطرف الأسفل لزنبرك رأسى فاحدثت استطالة 20 cm. دفعت الكتلة وهى فى وضع الاتزان فتحركت إلى أسفل مسافة 8cm وبدأت فى التذبذب. أوجد

(أ) مقدار السرعة التى اعطيت للكتلة عند دفعها

(ب) الزمن الدورى للحركة.

١٠- وضعت كتلة 8 kg عند طرف زنبرك وتركت لتتحرك حركة توافقية بسيطة على خط مستقيم. إذا كان الزمن الدورى 3 sec والسعة 2 m:

(أ) عين ثابت الزنبرك (ب) ماهى القوة القصوى التى تؤثر على الزنبرك؟

١١- علقت كتلة M من الطرف السفلى لزنبرك رأسى ثم تركت لتتذبذب بزمن دورى P. اثبت أن الزمن الدورى بعد إضافة كتلة m يصبح $P\sqrt{1+(m/M)}$.

١٢- علقت كتلة تزن 5 kg wt وزن من طرف زنبرك رأسى فأحدثت استطالة 62.5 cm، ثم شدت بعد ذلك إلى أسفل مسافة 3 cm وتركت.

(أ) عين موضع الكتلة عند أى لحظة، إذا تعرضت لقوة اخماد تساوى عدديا ٤ مرات قدر السرعة اللحظية.

(ب) هل الحركة تذبذبية مخمدة، أو زائدة الاخماد أو حرجة الاخماد.

١٣- فى المسألة ١٢ افرض أن قوة الاخماد تساوى عدديا 7.5 مرة قدر السرعة اللحظية

(أ) اثبت أن الحركة هى تذبذبية مخمدة (ب) أوجد سعة الذبذبات وزمنها الدورى وترددها (جـ) أوجد التناقص اللوغاريتمى

١٤- المعادلة $(d^2x/dt^2)+(4dx/dt)+8x=20\cos 2t$ تحدد موضع جسيم يتحرك على المحور x. إذا كان الجسيم يبدأ حركته من السكون عند $x=0$، أوجد: (أ) x كدالة فى الزمن t (ب) السعة والزمن الدورى والتردد بعد انقضاء فترة طويلة من الزمن.

١٥- (أ) ماهو التفسير الفيزيائى فى المسألة ١٤ إذا تضمنت وضع كتلة عند نهاية زنبرك رأسى (ب) ماهو التردد الطبيعى لهذا الزنبرك المتذبذب

(جـ) ماهو تردد القوة التذبذبية

١٦- تعانى كتلة موضوعة على زنبرك رأسى من ذبذبات قسرية طبقا للمعادلة $d^2x/dt^2+4x=8\sin wt$، حيث x تمثل الازاحة من موضع الاتزان و $w>0$ مقدارا ثابتا. إذا كان $x=0$ ، $dx/dt=0$ عند $t=0$ فأوجد:

(أ) تغير x كدالة فى الزمن t (ب) الزمن الدورى للقوة الخارجية المناظرة لحدوث الرنين.

١٧- علقت كتلة تزن 10 kg فى زنبرك رأسى ثابته 17 kg/m. طبقت قوة خارجية على الصورة $F(t)=65\sin 4t, t\geq 0$. تقع الكتلة كذلك تحت تأثير قوة

اخماد تساوى $2v$ وتقاس بوزن الجرام، حيث v هى السرعة اللحظية للكتلة بالسم / ث. فى لحظة البداية كانت الكتلة ساكنة عند موضع الاتزان.

(أ) أوجد موضع الكتلة عند أى لحظة

(ب) بين الحل العابر وحل حالة الاستقرار وأعط تفسيراً فيزيائياً لكل منهما

(جـ) أوجد السعة والزمن الدورى والتردد بالنسبة لحل حالة الاستقرار.

(استخدم $g = 980\ cmsec^2$).

١٨- أثرت قوة مقدارها 50 داين على زنبرك فاستطال مقدار 5 cm. وضعت كتلة 10 gm عند النهاية السفلى للزنبرك. بعد الوصول إلى حالة الاستقرار، حرك الطرف العلوى للزنبرك إلى أعلا وإلى أسفل فأصبحت القوة الخارجية المؤثرة على الكتلة هى $t \geq 0$ ، $F(t) = 20\cos wt$.

(أ) أوجد موضع الكتلة عند أى لحظة (مقاسا بالنسبة لموضع الاتزان).
(ب) أوجد مقدار w التى يحدث عندها رنين.

١٩- تؤثر قوة خارجية دورية على كتلة ٦ كجم معلقة من الطرف الأسفل لزنبرك ثابته 150 Nt/m. قوة الاخماد تتناسب مع السرعة اللحظية وتكون 80 نيوتنا عندما تكون السرعة 2m/scc. أوجد التردد الذى يحدث عنده رنين.

٢٠- وصلت دائرة RCL على التوالى بمقاومة 1000 ohm ومكثف سعته 4×10^{-6} farad وملف حثه 1 henry ولها قوة دافعة كهربية مؤثرة $E(t) = 24$ Volt. بافتراض عدم وجود تيار ابتدائى وعدم وجود شحنة ابتدائية Q_0 على المكثف، أوجد تعبيراً للتيار المار خلال الدائرة عند أى لحظة t.

٢١- وصلت دائرة RCL على التوالى بمقاومة 4 ohm ومكثف سعته 1/26 farad ملف حثه 1/2 henry ولها جهد مؤثر $E(t) = 16\cos 2t$. بافتراض عدم وجود تيار ابتدائى وشحنة ابتدائية على المكثف، أوجد تعبيراً للتيار المار خلال الدائرة عند أى لحظة t.

٢٢- وصلت دائرة RCL على التوالى بمقاومة 16 ohm ومكثف سعته

$E(t) = 100 \sin 3t$ ولها جهد مؤثر 2 henries وملف حثه 0.02 farad بافتراض عدم وجود تيار ابتدائي وشحنة ابتدائية على المكثف، أوجد تعبيراً للتيار المار خلال الدائرة عند أي لحظة t.

٢٣- عين تيار حالة الاستقرار في الدائرة المبينة في المسألة ٢٢.

٢٤- وصلت دائرة RCL على التوالي بمقاومة 20 ohm ومكثف سعته

$E(t) = 100 \cos 200t$ ولها جهد مؤثر 0.05 henry وملف حثه 10^4 farad بافتراض عدم وجود تيار ابتدائي وشحنة ابتدائية على المكثف، أوجد تعبيراً للتيار المار خلال الدائرة عند أي لحظة t.

٢٥- وصلت دائرة RCL على التوالي بمقاومة 2 ohm ومكثف

$E(t) = 100 \sin 60t$ ولها جهد مؤثر 0.1 henry وملف حثه 1/260 farad بافتراض عدم وجود تيار ابتدائي وشحنة ابتدائية على المكثف، أوجد تعبيراً للتيار المار خلال الدائرة عند أي لحظة t.

٢٦- وصلت دائرة RCL على التوالي لها

$L = \frac{1}{8}\text{henry}, C = 10^{-2}\text{farad}, R = 5\text{ ohms}$ وليس لها جهد مؤثر. اوجد تيار حالة الثبات في الدائرة. (تنويه: الشروط الابتدائية غير مطلوبة).

٢٧- وصلت دائرة RCL على التوالي حيث

$L = 0.1\text{ henry}, C = 0.02\text{ farad}, R = 6\text{ ohms}$ ولها جهد مؤثر $E(t) = 6\text{ volts}$. بافتراض عدم وجود تيار ابتدائي وشحنة ابتدائية عند $t = 0$، وذلك عند تأثير الجهد أولاً. أوجد الشحنة على المكثف والتيار في الدائرة.

٢٨- وصلت دائرة RCL على التوالي بمقاومة 5 ohms و مكثف سعته $4\times10^{-4}\text{farad}$ وملف حثه 0,05 henry ولها قوة دافعة كهربية مؤثرة $E(t) = 110\text{ volts}$. بافتراض عدم وجود تيار ابتدائي وشحنه ابتدائية اوجد الشحنه عند أي لحظة $t > 0$.

٢٩- وصلت دائرة RCL على التوالي حيث

$L = 0.1\text{ henry}, C = 0.02\text{ farad}, R = 6\text{ ohms}$ وليس لها جهد مؤثر. أوجد التيار التالي في الدائرة إذا كانت الشحنة الابتدائية على المكثف هي $\frac{1}{10}\text{coulomb}$ والتيار الابتدائي صفراً.

الباب الثامن

معادلات تفاضلية خطية ذات معاملات متغيرة من الرتبة الثانية

Second order linear differential equations with variable coefficients

٨-١ مقدمة: ليكن لدينا معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية على الصورة

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R \qquad (1)$$

حيث R, Q, P دوال فى x فقط. وسبق أن درسنا مثل هذه المعادلات عندما تكون R, Q, P ثوابت فى الابواب السابقة.

٨-٢ طرق الحل: توجد عدة طرق لدراسة مثل هذه المعادلات نذكر منها:-

أ - عند معرفة أحد حلول الدالة المتممة:

ليكن لدينا المعادلة

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R \qquad (1)$$

ونعتبر $y = u(x)$ أحد حلول الدالة المتممة. وبذلك يكون u هو حل المعادلة (1) عندما $R = 0$ ، أى أن $y = u$ هى حل المعادلة

$$u'' + P(x)u' + Q(x)u = 0 \qquad (2)$$

نفترض أن حل المعادلة (1) على الصورة

$$y = u\,v \qquad (3)$$

حيث v دالة فى x يراد تعيينها. ومن (3) يكون لدينا

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= v\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + u\frac{d^2v}{dx^2} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

باستخدام (3)، (4) فإن (1) تؤول إلى

$$\left(v\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+u\frac{d^2v}{dx^2}\right)+P\left(v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}\right)+Quv=R$$

أو

$$v\left(\frac{d^2u}{dx^2}+P\frac{du}{dx}+Qu\right)+u\left(\frac{d^2v}{dx^2}+P\frac{dv}{dx}\right)+2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}=R$$

باستخدام (2) نحصل على

$$u\left(\frac{d^2v}{dx^2}+P\frac{dv}{dx}\right)+2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}=R$$

أو

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\left[P+\frac{2}{u}\frac{du}{dx}\right]\frac{dv}{dx}=\frac{R}{u} \qquad (5)$$

بوضع $\frac{dv}{dx}=q$ وبالتالى $\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{dq}{dx}$

وبذلك تؤول (5) إلى

$$\frac{dq}{dx}+\left[P+\frac{2}{u}\frac{du}{dx}\right]q=\frac{R}{u} \qquad (6)$$

وهى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى فى $x\,,\,q$. ويكون عامل التكامل

$$e^{\int\left(P+\frac{2}{u}\frac{du}{dx}\right)dx}=\int e^{\int Pdx+2\ln u}=u^2e^{\int Pdx}$$

ويكون حل المعادلة (6) هو

$$qu^2e^{\int Pdx}=\int \frac{R}{u}u^2e^{\int Pdx}dx+c_1$$

أو

$$q=\frac{dv}{dx}=\frac{e^{-\int Pdx}}{u^2}\int Rue^{\int Pdx}+\frac{c_1e^{-\int Pdx}}{u^2}$$

وبالتكامل نحصل على

$$v=\int\left\{\frac{e^{-\int Pdx}}{u^2}\int Ru\,e^{\int Pdx}\right\}dx+c_1\int\frac{e^{-\int Pdx}}{u^2}dx+c_2$$

وبوضع هذه القيمة فى (3) نحصل على

$$y=uv=c_2u+c_1u\int\frac{e^{-\int Pdx}}{u^2}dx+u\int\left\{\frac{e^{-\int Pdx}}{u^2}\int Rue^{\int Pdx}\right\}dx$$

والتى تحتوى على الحل $y=u$ وحيث أنه يحتوى على ثابتين اختياريين فيكون هو الحل التام.

مثال (١): حل المعادلة

$$x^2y''-2x(1+x)y'+2(1+x)y=x^3$$

إذا كان $y=x$ هو أحد حلول الدالة المتممة.

الحل: بالقسمة على x^2

$$y''-\frac{2(1+x)}{x}y'+\frac{2(1+x)}{x^2}y=x \qquad (1)$$

تضع الحل المعلوم $y=u=x$ ونكون $P=-\frac{2(1+x)}{X}$ و $P=x$

وعلى ذلك يكون $y=u\,v=x\,v$ حلا للمعادلة (1).

وعلى ذلك تعطى v من العلاقة

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\left(P+\frac{2}{u}\frac{du}{dx}\right)\frac{dv}{dx}=\frac{R}{u}$$

أى

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\left[-\frac{2(1+x)}{x}+\frac{2}{x}.\frac{dx}{dx}\right]\frac{dv}{dx}=\frac{x}{x}=1$$

أى

$$\frac{d^2v}{dx^2}-2\frac{dv}{dx}=1 \qquad (5)$$

بوضع $q=\frac{dv}{dx}$, $\frac{dq}{dx}=\frac{d^2v}{dx^2}$ فإن (5) تؤول إلى

$$\frac{dq}{dx}-2q=1$$

وهى معادلة خطية من الرتبة الأولى فى q, x ويكون عامل المكاملة $e^{\int -2dx}=e^{-2x}$ وعلى ذلك يكون حل المعادلة هو

$$qe^{-2x}=\int 1e^{-2x}dx+c_1=-\frac{1}{2}e^{-2x}+c_1$$

$$\frac{dv}{dx}=q=-\frac{1}{2}+c_1e^{2x}$$

$$v=\int\left(-\frac{1}{2}+c_1e^{2x}\right)dx=\frac{-x}{2}+\frac{c_1}{2}e^{2x}+c_2 \qquad (7)$$

ويكون الحل العام هو

$$y=xv=x\left[-\frac{x}{2}+\frac{c_1}{2}e^{2x}+c_2\right]=-\frac{x^2}{2}+c_1'xe^{2x}+c_2x\ .$$

مثال (٢): حل المعادلة

$$(x+1)y''-2(x+3)y'+(x+5)y=e^x$$

حيث e^x احد حلول الدالة المتممة.

الحل: بالقسمة على $(x+1)$ نحصل على

$$y'' - \frac{2(x+3)}{x+1} y' + \frac{x+5}{x+1} y = \frac{e^x}{x+1} \qquad (1)$$

نضع $y = uv = e^x v$

باستخدام المعادلة

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \left(P + \frac{2}{u} \frac{du}{dx} \right) \frac{dv}{dx} = \frac{R}{u}$$

يكون لدينا

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \left(-\frac{2x+6}{x+1} + \frac{2}{e^x} \frac{de^x}{dx} \right) \frac{dv}{dx} = \frac{e^x}{(1+x)e^x}$$

أى

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \left(2 - \frac{2x+6}{x+1} \right) \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x+1}$$

أى

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - \left(\frac{4}{x+1} \right) \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x+1} \qquad (2)$$

بوضع $q = \frac{dv}{dx}$ فيكون $\frac{dq}{dx} = \frac{d^2 v}{dx^2}$ وعلى ذلك تؤول المعادلة (2) إلى

$$\frac{dq}{dx} - \frac{4}{x+1} q = \frac{1}{1+x} \qquad (3)$$

وهى معادلة خطية من الرتبة الاولى فى q، x ويكون عامل المكاملة

$$e^{-\int \frac{4}{x+1} dx} = e^{-4\ln(x+1)} = (x+1)^{-4}$$

ويكون حل المعادلة (3) هو

$$q(x+1)^{-4}=\int \frac{1}{x+1}(x+1)^{-4}dx+c_1=\int (x+1)^{-5}dx+c_1$$
$$=-\frac{1}{4}(x+1)^{-4}+c_1$$

أى

$$\frac{dv}{dx}=q=-\frac{1}{4}+c_1(x+1)^{+4}$$

وبالتكامل

$$v=-\frac{1}{4}x+\frac{c_1}{5}(x+1)^5+c_2$$

ويكون الحل التام هو

$$y=uv=e^x\left[-\frac{1}{4}x+\frac{c_1}{5}(x+1)^5+c_2\right]=-\frac{1}{4}xe^x+c_1'(x+1)^2e^x+c_2e^x$$

ب- الاختزال إلى الصورة العمودية

نريد اختزال المعادلة التفاضلية $y''+Py'+Qy=R$ حيث $P(x)$ و $Q(x)$ و $R(x)$ دوال متصلة إلى الصورة $\frac{d^2v}{dx^2}+Iv=s$ والتى تعرف بالصورة العمودية (normal form)

ليكن لدينا

$$y''+Py'+Qy=R \qquad (1)$$

كما فى الطريقة الأولى ليكن $y=uv$ حل المعادلة (1) حيث v, u دالتان قابلتان للاشتقاق مرتين. باشتقاق $y=uv$ مرتين نحصل على

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}\ ,\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2u}{dx^2}v+2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+u\frac{d^2v}{dx^2}$$

وبالتعويض فى المعادلة (1) نحصل على

$$u\frac{d^2v}{dx^2}+\left(Pu+2\frac{du}{dx}\right)\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{d^2u}{dx^2}+P\frac{du}{dx}+Qu\right)=R$$

أى

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\left(P+\frac{2}{u}\frac{du}{dx}\right)\frac{dv}{dx}+\frac{1}{u}\left(\frac{d^2u}{dx^2}+P\frac{du}{dx}+Qu\right)v=\frac{R}{u} \qquad (2)$$

لحذف المشتقة الأولى $\frac{dv}{dx}$ من (2) نأخذ

$$P+\frac{2}{u}\frac{du}{dx}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u}=-\frac{1}{2}Pdx \qquad (3)$$

وبالتكامل

$$\ln u=-\frac{1}{2}\int Pdx \quad \Rightarrow \quad u=e^{-\frac{1}{2}\int Pdx} \qquad (4)$$

وبالتالى يكون التعويض المناسب للمتغير التابع $y = u\,v$ حيث u معطاه بالعلاقة (4). ومن (3) نحصل على

$$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{2}Pu \Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2}=-\frac{1}{2}P\frac{du}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}u$$

أى

$$\frac{d^2u}{dx^2}=-\frac{1}{2}P\left(-\frac{1}{2}Pu\right)-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}u=\frac{1}{4}P^2u-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}u \qquad (5)$$

وعلى ذلك

$$\frac{1}{u}\left(\frac{d^2u}{dx^2}+P\frac{du}{dx}+Qu\right)=\frac{1}{u}\left(\frac{1}{4}P^2u-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}u-\frac{1}{2}P^2u+Qu\right)$$

$$=Q-\frac{1}{4}P^2-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}$$

(وذلك باستخدام (5)). ليكن

$$Q-\frac{1}{4}P^2-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}=I\ . \qquad \text{(مثلا)} \qquad (6)$$

$$S = R/u \qquad (7)$$

وباستخدام (3)، (4)، (6) ، (7) فإن (2) تؤول إلى

$$d^2v\,/dx^2+Iv=S$$

حيث I، S معطاه بالعلاقتين (6)، (7)

ملحوظة: قبل حل هذا النوع من المسائل يجب علينا:

أ) أن يكون معامل y'' هو الوحدة (انظر المعادلة (1))

ب) نختار $u=e^{-\frac{1}{2}\int Pdx}$

جـ) نفترض أن $y=u\,v$ حلا للمعادلة (1). وبهذا تختزل المعادلة إلى

$$\frac{d^2v}{dx^2}+Iv=S\ ,$$

حيث

$$I=Q-\frac{1}{4}P^2-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}\quad . \quad S=\frac{R}{u}$$

مثال (١): حل المعادلة

$$y''-2(\tan x)y'+5y=0$$

الحل: بالمقارنة مع المعادلة $y''+Py'+Qy=R$

نجد أن

$$P=-2\tan x\ ,\ Q=5\ .\ R=0$$

لحذف المشتقة الأولى نختار

$$u=e^{-\frac{1}{2}\int Pdx}=e^{\frac{1}{2}\int 2\tan x\,dx}=e^{\ln\sec x}=\sec x$$

ليكن الحل المطلوب هو $y = u v$

فتؤول المعادلة الأصلية إلى الصورة العمودية

$$(d^2 v / dx^2) + I v = S \qquad (2)$$

حيث

$$I = Q - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}\frac{dP}{dx}$$

$$= 5 - \frac{1}{4}(4\tan^2 x) - \frac{1}{2}(-2\sec^2 x)$$

$$= 5 - \tan^2 x + \sec^2 x = 5 - \tan^2 x + 1 + \tan^2 x = 6$$

$$S = R / u = 0 / u = 0$$

وعلى ذلك تأخذ المعادلة (2) الصورة

$$d^2 v / dx^2 + 6v = 0$$

وتكون المعادلة المساعدة

$$m^2 + 6 = 0 \Rightarrow m = \pm i\sqrt{6},$$

ويكون الحل هو

$$v = c_1 \cos\sqrt{6} + c_2 \sin\sqrt{6}x$$

ويكون حل المعادلة (1) هو

$$y = uv = \sec x\,[c_1 \cos x\sqrt{6} + c_2 \sin x\sqrt{6}]$$

مثال (٢): حل المعادلة

$$y'' - 2\tan x y' + 5y = \sec x\, e^x \qquad (1)$$

الحل: بالمقارنة مع المعادلة

$$y'' + Py' + Qy = R$$

نجد أن

$P=-2\tan x\ ,\ Q=5\ ,\ R=\sec x\, e^{x}$

لحذف المشتقة الأولى من (1) نختار

$$u=e^{-\frac{1}{2}\int P dx}=e^{-\frac{1}{2}\int -2\tan x dx}=\sec x$$

نفترض $y=u\,v$ حلا المعادلة (1). وعلى ذلك تكون v فى الصورة العمودية.

$$\frac{d^2v}{dx^2}+Iv=S \qquad (2)$$

حيث

$$I=Q-\frac{1}{4}P^2-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}$$

$$=5-\frac{1}{4}(4\tan^2 x)-\frac{1}{2}(-2\sec^2 x)=5-\tan^2 x+\sec^2 x$$

$$=5-\tan^2 x+\tan^2 x+1=6$$

$$S=R/u=\sec x e^{x}/\sec x=e^{x}$$

وعلى ذلك تؤول (2) إلى

$$\frac{d^2v}{dx^2}+6v=e^{x}\Rightarrow(D^2+6)v=e^{x}$$

وتحل بالطرق السابقة فيكون الحل

$$v=c_1\cos x\sqrt{6}+c_2\sin x\sqrt{6}+\frac{e^{x}}{7}$$

ويكون الحل العام للمعادلة (1) هو

$$y=uv=\sec x\,(c_1\cos x\sqrt{6}+c_2\sin x\sqrt{6}+\frac{e^{x}}{7})$$

جـ- طريقة تغير البارامترات (الوسائط)

هذه الطريقة عامة كما بين ذلك لاجرانج (١٧٣٦-١٨١٣) لإيجاد حل خاص لأى معادلة خطية غير متجانسة

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \qquad (1)$$

حيث P، Q، R دوال متصلة. ولاستخدام هذه الطريقة يكون من الضرورى معرفة حل المعادلة المتجانسة

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \qquad (2)$$

إذا كان كل من a، b ثابتاً فيمكن ليجاد حل المعادلة (2) كما سبق. وإذا كان $P(x)$، $Q(x)$ ليس كليهما ثابتاً، يكون من الصعب ليجاد حل هذه المعادلة. وإذا أمكن إيجاد حل $y_1(x)$ للمعادلة (2) باستخدام الطريقة المبينة فى البند ٢-أ يمكن إيجاد الحل الثانى للمعادلة (2).

لاحظ لاجرانج أن أى حل خاص y_p للمعادلة (1) يكون له الخاصية أن كل من y_p/y_1 ، y_p/y_2 لايساوى ثابتاً، مقترحاً أننا نبحث عن حل للمعادلة (1) على الصورة

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \qquad (3)$$

ومن خلال احلال البارامترات بدلاً من الثوابت سميت الطريقة بتغير الثوابت . باشتقاق المعادلة (3) نحصل على

$$y'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_1'(x)y_1(x) + c_2(x)y_2'(x) + c_2'(x)y_2(x)$$

لتبسيط هذا التعبير يكون من المناسب بأن نضع

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \qquad (4)$$

وبالتالى يكون

$$y'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)$$

باشتقاق المعادلة الاخيرة نحصل على

$$y''(x) = c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x)$$

بالتعويض عن $y(x)$، $y'(x)$ ، $y''(x)$ في المعادلة (1) نحصل على

$$y''+a(x)y'+b(x)y=c_1(x)[y_1''+a_1y_1'+a_2y]+c_2(x)[y_1'+a_1y_2'+a_2y_2]$$
$$+c_1'y_1'+c_2'y_2'=R(x)$$

ولكن كلا من y_1 ، y_2 حل للمعادلة المتجانسة وبالتالي تختزل المعادلة السابقة إلى

$$c_1'y_1'+c_2'y_2'=R(x) \qquad (5)$$

والمعادلتان (5)، (6) تحدد بقيم وحيدة للمتغيرين c_1' ، c_2' ولحل المعادلتين (5)، (6) نضرب الأولى في y_2' والثانية y_2 والطرح لنحصل على $c_1'(x)$ وبالمثل يمكن الحصول على $c_2'(x)$ ويكون الحلان هما

$$c_1'(x)=\frac{-R(x)y_2(x)}{y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)}=\frac{-R(x)y_2(x)}{W(y_1,y_2)}$$

$$c_2'(x)=\frac{R(x)y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)}=\frac{R(x)y_1(x)}{W(y_1,y_2)}$$

نلاحظ أن المقام (الرونسكى) $W(y_1,y_2)$ لايساوى الصفر لأن الحلين $y_1(x)$، $y_2(x)$ مستقلان خطياً.

نظرية (١): إذا كان $y_p(x)$ هو حل يحقق المعادلة

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=R(x) \qquad (1)$$

وكان $u(x)$، $v(x)$ حلين للمعادلة المتجانسة

$$a_0y''+a_1y'+a_2y=0 \qquad (2)$$

فإن الحل العام للمعادلة يعطى بالعلاقة

$$c_1u+c_2v+y_p$$

البرهان: ليكن $y(x)$ حلا آخر للمعادلة (1) ونعتبر الدالة $Y(x)=y(x)-y_p(x)$ وعلى ذلك يكون

$$a_0y''(x)+a_1y'(x)+a_2y(x)=R(x)$$

$$a_0 y_p''(x) + a_1 y_p'(x) + a_2 y_p(x) = R(x)$$

وبالطرح نجد أن

$$a_0(y - y_p)'' + a_1(y - y_p)' + a_2(y - y_p) = 0$$

وبالتالى فإن $Y(x) = y(x) - y_p(x)$ هو حل للمعادلة (2) والذى يمكن كتابته على الصورة

$$Y(x) = c_1 u(x) + c_2 v(x)$$

وبالتالى فإن

$$y(x) = y_p(x) + c_1 u(x) + c_2 v(x)$$

وهذا يتمم البرهان.

ملحوظة: يمكن كتابة الحل الخاص y_p على الصورة

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} \begin{vmatrix} y(t) & v(t) \\ u(x) & v(x) \end{vmatrix} \frac{R(t)}{a_0(t) w(t)} dt$$

مثال (١): حل المعادلة

$$y'' + n^2 y = \sec nx$$

باستخدام طريقة تغير البارامترات

الحل: لدينا

$$y'' + n^2 y = \sec nx \qquad (1)$$

أى

$$(D^2 + n^2) y = 0 \qquad (2)$$

وتكون المعادلة المساعدة

$$m^2 + n^2 = 0 \Rightarrow m = \pm ni$$

وتكون للدالة المتممة

$$y_{C.F} = a\cos nx + b\sin nx$$

ليكن

$$y = A\cos(nx) + B\sin(nx) \tag{3}$$

الحل التام للمعادلة (1). وبالتالى فإن A ، B دوال فى x بحيث تتحقق المعادلة (1). باشتقاق (3) بالنسبة إلى x يكون لدينا

$$y' = A'\cos(nx) - An\sin(nx) + B'\sin(nx) + Bn\cos(nx) \tag{4}$$

نختار A، B بحيث

$$A'\cos(nx) + B'\sin(nx) = 0 \tag{5}$$

وبالتالى تؤول (4) إلى

$$y' = -An\sin(nx) + Bn\cos(nx) \tag{6}$$

باشتقاق (6) بالنسبة إلى x نحصل على

$$y'' = -(A'n\sin nx + An^2\cos nx) + (B'n\cos nx - B^2 n\sin nx) \tag{7}$$

باستخدام (3)، (7) فإن (1) تختزل إلى

$$-A'n\sin nx + B'n\cos nx = \sec nx \tag{8}$$

والآن نحل (5)، (8) وذلك بضرب (5) فى $n\sin nx$ (8) فى $\cos nx$ والجمع فنحصل على

$$nB'(\cos^2 nx + \sin^2 nx) = \sec nx\cos nx = 1$$

أى

$$B' = \frac{dB}{dx} = \frac{1}{n}, \tag{9}$$

وبالتكامل نحصل على

$$B = \frac{x}{n} + c_1 \tag{10}$$

وباستخدام (9) فاننا من (5) نجد أن

$$A' = \frac{dA}{dx} = -\frac{1}{n}\tan nx \qquad (11)$$

وبالتكامل

$$A = \frac{1}{n^2}\ln\cos nx + c_2 \qquad (12)$$

وباستخدام (10)، (12) فى (3) نحصل على

$$y = c_1 \sin nx + c_2 \cos nx + \frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx \ln\cos nx$$

حيث c_1 ، c_2 ثابتان إختياريان

مثال (٢): حل المعادلة $y'' + y = \tan x$

الحل: حل المعادلة المتجانسة هى

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

نلاحظ أن $W(y_1, y_2) = 1$. ومن المعادلتين (5)، (6) يكون لدينا

$$c_1'(x) = -\tan x \sin x = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos x - \sec x$$

$$c_2'(x) = \tan x \cos x = \sin x$$

وبتكامل c_1' ، c_2' نحصل على

$$c_1(x) = \sin x - \ln|\sec x + \tan x|$$

$$c_2(x) = -\cos x$$

ويكون الحل الخاص

$$y_p = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

$$= \cos x \sin x - \cos x \ln|\sec x + \tan x| - \sin c \cos x$$

$$= -\cos x \ln|\sec x + \tan x|$$

ويكون الحل العام هو

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \ln|\sec x + \tan x|$$

ملحوظة:

(١) تستخدم هذه الطريقة إذا كانت معاملات المعادلة المتجانسة ثوابت.

(٢) نلاحظ هنا لايمكن استخدام طريقة المعاملات غير المعينة

(٣) تستخدم هذه الطريقة إذا كان الطرف الأيمن من المعادلة (1) على وجه الخصوص على الصورة $\tan x$ ، $\cos x$ ، $\sec x$ ، $\operatorname{cosec} x$ ، $\ln x$ ، $\frac{e^x}{1+e^x}$ ، ....

د – طريقة تحليل المؤثرات (operators)

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية

$$Sy'' + Py' + Qy = R \qquad (1)$$

حيث P, Q ، R, S دوال فى x.

يمكن صياغة المعادلة (1) على الصورة

$$[SD^2 + PD + Q]y = R \qquad (2)$$

وقد يمكن أحياناً تحليل الطرف الأيسر إلى مؤثرين خطيين يؤثران على y. وفى كل حالة يمكن تكامل المعادلة على مرحلتين. كما هو مبين بالأمثلة.

ملحوظة: تذكر أن العوامل ليست قابلة للتبديل لأنها تحتوى دوال فى x.

مثال (١): حل المعادلة

$$xy'' + (x-2)y' - 2y = x^3$$

الحل: لدينا

$$[xD^2+(x-2)D-2]y=x^2 \qquad (1)$$

ولكن

$$xD^2+(x-2)D-2=xD^2+xD-2D-2$$
$$=xD(D+1)-2(D+1)=(xD-2)(D+1)$$

أى أن (1) تأخذ الصورة

$$(xD-2)(D+1)y=x^3 \qquad (2)$$

ليكن

$$(D+1)y=v \qquad (3)$$

فإن (2) تعطى

$$(xD-2)v=x^3$$

$$x\frac{dv}{dx}-2v=x^3 \Rightarrow \frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v=x^2 \qquad (4)$$

وهى معادلة خطة من الرتبة الأولى يكون معامل التكامل لها

$$I.F=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=x^{-2}$$

وعلى ذلك يكون حل (4) هو

$$vx^{-2}=\int x^2x^{-2}dx+c_1 \Rightarrow vx^{-2}=x+c_1$$

أى أن

$$v=x^3+c_1x^2$$

باستخدام (5) فإن (3) تؤول إلى

$$\frac{dy}{dx}+y=x^3+c_1x^2 \qquad (6)$$

وهى معادلة خطية من الرتبة الأولى ايضا يكون عامل المكاملة

$$I.F = e^{\int P dx} = e^{x}$$

ويكون حل المعادلة (6) هو

$$ye^{x} = \int e^{x}(x^{3} + c_{1}x^{2})dx + c_{2}$$
$$= (x^{3} + c_{1}x^{2})e^{x} - (3x^{2} + 2c_{1}x)e^{x} + (6x + 2c_{1})e^{x} - 6e^{x} + c_{2}$$

(بالتكامل بالتجزىء) ومنها نجد الحل العام

$$y = x^{3} + c_{1}x^{2} - 3x^{2} - 2c_{1}x + 6x + 2c_{1} - 6 + c_{2}e^{-x}$$
$$= x^{3} + (c_{1} - 3)x^{2} + (6 - 2c_{1})x + 2(c_{1} - 3) + c_{2}e^{-x}$$

٣-٨ معادلات ذات معاملات متغيره تختزل إلى معادلات ذات معاملات ثابته

أ - معادلة أويلر - كوشى

١- مقدمة: تسمى المعادلة التفاضلية الخطية التى على الصورة

$$x^{n}\frac{d^{n}y}{dx^{n}} + a_{1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n}y = f(x)$$

أى

$$(x^{n}D^{n} + a_{1}x^{n-1}D^{n-1} + a_{n-2}x^{n}D^{n} + \ldots + a_{n-1}xD + a_{n})y = f(x) \qquad (1)$$

بمعادلة خطية من نوع كوشى ولويلر حيث $a_{i}, i = 1,2,\ldots n$ ثوابت و $f(x)$ إما ثابته أو دالة فى x فقط. يلاحظ أن رتبة المشتقة هى نفس قوة x فى التعبير.

طريقة الحل: لحل المعادلة (1) فإننا نستبدل بالمتغير x المتغير z المعطى من $x = e^{z}$ أى أن $z = \ln x$ وهذا يحول المعادلة (1) إلى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة وتحل بالطرق السابقة. سوف نحتاج إلى العلاقتين التاليتين

$$1\text{-}\ e^{m\ln x} = x^{m}, e^{mz} = x^{m}$$

$$2\text{-}\ z = \ln x \Rightarrow dz/dx = 1/x \qquad (2)$$

والآن

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dz} \tag{3}$$

أى

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\Rightarrow xD=x\frac{d}{dx}=\frac{d}{dz}=D_1 \tag{4}$$

وأيضاً

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)$$

$$=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2}$$

$$x^2D^2y=x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}=(D_1^2-D_1)y$$

وهكذا أى أن

$$x\frac{dy}{dx}=D_1y\Rightarrow xD=D_1$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=D_1(D_1-1)y\Rightarrow x^2D^2=D_1(D_1-1)$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}=D_1(D_1-1)(D_1-2)y\Rightarrow x^3D^3=D_1(D_1-1)(D_1-2)$$

....

$$x^nD^n=D_1(D_1-1)(D_1-2)...[D_1-(n-1)]$$

فباستخدام هذه العلاقات فإن (1) تؤول إلى $f(D_1)y=g(z)$ حيث $g(z)$ دالة فى z فقط، وهى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة وتحل بالطرق السابقة. والأمثلة التالية توضح ذلك

مثال (١): حل المعادلة

$$(x^2D^2 - xD + 2)y = x \ln x$$

الحل: نضع $x = e^z$ وبالتالى $z = \ln x$ ، $D_1 = \frac{d}{dz}$

$$xD = D_1, \quad x^2D^2 = D_1(D_1 - 1)$$

وتؤول المعادلة المعطاة إلى

$$[D_1(D_1 - 1) - D_1 - 2]y = ze^z$$

أى

$$(D_1^2 - 2D_1 + 2)y = ze^z$$

وهى معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة وتكون المعادلة المساعدة هى

$$m^2 - 2m + 2 = 0 \Rightarrow m = 1 \pm i$$

وتكون الدالة المتممة هى

$$\begin{aligned} y_{C.F} &= e^z(c_1 \cos z + c_2 \sin z) \\ &= x[c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)] \end{aligned}$$

ويكون التكامل الخاص

$$\begin{aligned} y_{P.I} &= \frac{1}{D_1^2 - 2D_1 + 2} ze^z = e^z \frac{1}{(D_1 + 1)^2 - 2(D_1 + 1) + 2} z \\ &= e^z \frac{1}{D_1^2 + 1} z = e^z (1 + D_1^2)^{-1} z = e^z (1 - D_1^2 + \dots) z \\ &= e^z z = x \ln x \end{aligned}$$

ويكون الحل العام

$$y_G = y_{C.F} = y_{P.I} = x[c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x) + x \ln x$$

مثال (٢): حل المعادلة

$$(x^4D^3 + 2x^3D^2 - x^2D + x)y = 1$$

الحل: بقسمة المعادلة على x ، تؤول إلى صورة معادلة كوشى أو أويلر أى

$$(x^3D^3+2x^2D^2-xD+1)y=1/x$$

بوضع $x=e^z$ ، $xD=D_1$ و $x^2D^2=D_1(D_1-1)$ و

$$x^3D^3=D_1(D_1-1)(D_1-2)$$

فتؤول المعادلة إلى

$$[D_1(D_1-1)(D_1-2)+2D_1(D_1-1)-2D_1+1]y=e^{-z}$$

أى

$$(D_1^3-D_1^2-D_1+1)y=e^{-z}$$

وتكون المعادلة المساعدة هى

$$m^3-m^2-m+1=0 \quad \Rightarrow \quad m^2(m-1)-(m-1)=0$$

$$(m-1)^2(m+1)=0 \quad \Rightarrow \quad m=1,1,-1$$

وتكون الدالة المتممة

$$\begin{aligned} y_{C.F} &= (c_1+c_2z)e^z+c_3e^{-z} \\ &= (c_1+c_2\ln x)x+c_3x^{-1} \end{aligned}$$

ويكون التكامل الخاص

$$\begin{aligned} y_{P.I} &= \frac{1}{(D_1+1)(D_1-1)^2}e^{-z} = \frac{1}{(D_1+1)}.\frac{1}{(-1-1)^2}e^{-z} \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{D_1+1}e^{-z}.1=\frac{1}{4}e^{-z}\frac{1}{D_1-1+1}.1 \\ &= \frac{1}{4}e^{-z}z=\frac{1}{4}x^{-1}\ln x \end{aligned}$$

ويكون الحل العام هو

$$y=(c_1+c_2\ln x)x+x^{-1}+\frac{x^{-1}\ln x}{4}$$

مثال (٣): حل المعادلة

$$(D^3-(4/x)D^2+\frac{5}{x^2}D-2/x^3)y=1$$

لوضع المعادلة في صورة معادلة كوشى أويلر بضرب الطرفين في x^3 فتحصل على

$$(x^3D^3-4x^2D^2+5xD-2)y=x^3$$

ويكون حلها العام هو (متروك للقارئ لستنتاجه)

$$y_G=c_1x^2+c_2x^{(5+\sqrt{21})/2}+c_3x^{(5-\sqrt{21})/2}-x^3/5$$

مثال (٤): حل المعادلة

$$x^2D^2y-3xDy+5y=x^2\sin\ln x$$

الحل: لدينا

$$(x^2D^2-3xD+5)y=x^2\sin\ln x$$

ليكن $x=e^z$ أي $z=\ln x$ ، $D_1=\dfrac{d}{dz}$ ، $xD=D_1$ ، $x^2D^2=D(D-1)$

وتكون المعادلة على الصورة

$$(D_1^2-4D_1+5)y=e^{2z}\sin z$$

وتكون المعادلة المساعدة هي

$$m^2-4m+5=0$$

أى

$$m=(4\pm\sqrt{16-20})/2=2\pm i$$

وتكون الدالة المتممة .

$$y_{C.F}=e^{2z}(c_1\cos z+c_2\sin z)=x^2(c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x))]$$

ويكون التكامل الخاص

$$y_{P.I}=\frac{1}{D_1^2-4D_1+5}e^{2z}\sin z=e^{2z}\frac{1}{(D_1+2)^2-4(D_1+2)+5}\sin z$$

$$=e^{2z}\frac{1}{D_1^2+1}\sin z=e^{2z}\left(\frac{-z}{2}\cos z\right)$$

$$=-\frac{x^2}{2}\ln x\cos\ln x$$

ويكون الحل العام

$$y=x^2(c_1\cos\ln x+c_2\sin\ln x)-\frac{x^2}{2}\ln x\cos(\ln x)$$

مثال (٥): اختزل المعادلة

$$2x^2yy''+4y^2=x^2(y')^2+2xyy'$$

$$2x^2y(D^2y)+4y^2=x^2(Dy)^2+2xy(Dy)$$

إلى معادلة متجانسة باستخدام التعويض $y=z^2$ ثم أوجد حلها

الحل: لدينا

$$y=z^2\ ,\ \frac{dy}{dx}=2z\frac{dz}{dx}\ ,\ \frac{d^2y}{dx^2}=2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+2z\frac{d^2z}{dx^2}$$

بالتعويض فى المعادلة نحصل على

$$2x^2z^2\left[2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+2z\frac{d^2z}{dx^2}\right]+4z^4=x^2.4z^2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+2xz^2.2z\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

أى

$$x^2\frac{d^2z}{dx^2}-x\frac{dz}{dx}+z=0$$

$$(x^2D^2-xD+1)z=0$$

ليكن $x=e^t$ ، $t=\ln x$، $D_1=d/dt$ فيكون

$$xD = D_1 \ , \ x^2D^2 = D_1(D_1 - 1)$$

وعلى ذلك فإن

$$[D_1(D_1 - 1) - D_1 + 1]z = 0$$

أى أن

$$(D_1^2 - 2D_1 + 1)z = 0$$

وتكون المعادلة المساعدة

$$m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 1,1$$

وتكون الدالة المتممة (الحل العام)

$$\begin{aligned} z &= (c_1 + c_2 t)e^t \\ &= (c_1 + c_2 \ln x)x \end{aligned}$$

وبالتالى

$$y = z^2 = (c_1 + c_2 \ln x)^2 x^2$$

ملاحظة (١): ليكن $F(D_1)y = f(x)$

فإن النتيجتين التاليتين مهمتين

$$\frac{1}{D_1 - \alpha} f(x) = x^{\alpha} \int x^{-\alpha-1} f(x) dx$$

$$\frac{1}{D_1 + \alpha} f(x) = x^{-\alpha} \int x^{\alpha-1} f(x) dx$$

ملاحظة (٢): يمكن تحليل المؤثر $\frac{1}{F(D_1)}$ إلى كسور جزئيه لحساب التكامل الخاص أى

$$y_{P.I} = \frac{1}{F(D_1)} f(x) = \left[\frac{A_1}{D_1 - \alpha_1} + \frac{A_2}{D_1 - \alpha_2} + \dots \frac{A_n}{D_1 - \alpha_n} \right] f(x)$$

أو

$$y_{P.I} = \frac{1}{(D_1-\alpha_1)D_1-\alpha_2)...(D_1-\alpha_n)} f(x)$$

حيث تأثير كل عامل بالتتالى على $f(x)$. والأمثلة التالية توضح ذلك

مثال (٦): حل المعادلة

$$(x^2D^2+3xD+1)y = 1/(1-x)^2$$

الحل: ليكن $x = e^z$ أى $z = \ln x$ ، $d/dz = D_1$ وعلى ذلك

$$(D_1(D_1-1)+3D_1+1)y = 1/(1-e^z)^2$$

أى

$$(D_1+1)^2 y = 1/(1-e^z)^2$$

وتكون المعادلة المساعدة هى

$$(m+1)^2 = 0 \Rightarrow m = -1, -1$$

وتكون الدالة المتممة هى

$$y_{C.F} = (c_1+c_2 z)e^{-z} = (c_1+c_2\ln x)x^{-1}$$

ويكون التكامل الخاص

$$y_{P.I} = \frac{1}{D_1+1}.\frac{1}{D_1+1}(1-x)$$

وباستخدام الملاحظات السابقة نجد أن

$$= \frac{1}{D_1+1}x^{-1}\int x^{1-1}(1-x)^{-2}dx = \frac{1}{D_1+1}x^{-1}(1-x)^{-1}$$

$$= x^{-1}\int x^{1-1}x^{-1}(1-x)^{-1}dx$$

$$= x^{-1}\int \frac{dx}{x(1-x)} = x^{-1}\int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)dx$$

$$= x^{-1}[\ln x - \ln(1-x) = x^{-1}\ln(x / x - 1)$$

ويكون الحل العام

$$y_G = (c_1 + c_2 \ln x)x^{-1} + x^{-1}\ln\left[\left|\frac{x}{1+x}\right|\right]$$

مثال (٧): حل المعادلة

$$(x^2D^2 + 4xD + 2)y = x + \sin x$$

الحل: ليكن

$$x = e^z \Rightarrow z = \ln x \ , \ D_1 = \frac{d}{dz}$$

$$xD = D_1 \ , \ x^2D^2 = D_1(D_1 - 1)$$

وتؤول المعادلة إلى

$$(D_1(D_1 - 1) + 4D_1 + 2)y = e^z + \sin e^z$$

$$(D_1^2 + 3D_1 + 2)y = e^z + \sin e^z$$

وتكون المعادلة المساعدة

$$m^2 + 3m + 2 = (m+1)(m+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -1, -2$$

وتكون الدالة المتممة

$$y_{C.F} = c_1e^{-2z} + c_2e^{-z} = c_1x^{-2} + c_2x^{-1}$$

للحصول على الحل الخاص نحسب كل على حده

$$y_1 = \frac{1}{D_1^2 + 3D_1 + 2}e^z = \frac{1}{1+3+2}e^z = \frac{1}{6}x$$

$$y_2 = \frac{1}{D_1^2 + 3D_1 + 2}\sin e^z = \frac{1}{(D_1+2)(D_1+1)}\sin e^z$$

$$= \frac{1}{(D_1+2)(D_1+1)}\sin x \qquad ، \qquad \text{حيث} \quad e^z = x$$

باستخدام الملاحظات السابقة

$$= \frac{1}{D_1+2} x^{-1}\int x^{1-1}\sin x dx$$

$$= \frac{1}{D_1+2} x^{-1}(-\cos x) = x^{-2}\int x^{2-1}(-x^{-1}\cos x)dx$$

$$= \frac{-1}{x^2}\int \cos x dx = \frac{-\sin x}{x^2}$$

ويكون التكامل الخاص هو

$$y_{P.I} = y_1 + y_2 = \frac{1}{6}x - \frac{\sin x}{x^2}$$

تمرين: يترك للطالب التعبير عن

$$\frac{1}{(D_1+2)(D_1+1)} = \frac{1}{D_1+1} - \frac{1}{D_1+2}$$

ثم يواصل طريقة الحل.

ب- معادلات تختزل إلى معادلة أويلر

تسمى المعادلة التى على الصورة

$$((a+bx)^n D^n + a_1(a+bx)^{n-1}D^{n-1} + a_n(a+bx)D + a)y = f(x)$$

بمعادلة لاجرانج وكوشى

حيث a, b ، a_i ، $i = 1, 2, \dots n$ ثوابت ، $f(x)$ دالة فى x فقط.

لحل هذا النوع من المسائل ولإختزالها إلى معادلة أويلر نضع $a + bx = v$

فيكون $b = \frac{dv}{dx}$ ويكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = b\frac{dy}{dv} \Rightarrow \frac{d}{dx} = b\frac{d}{dv}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = b\frac{d}{dv}\left(b\frac{dy}{dv}\right) = b^2\left(d^2y/dv^2\right)$$

وبالمثل $d^ny/dx^n = b^n\left(d^ny/dv^n\right)$

وبالتعويض فى المعادلة المعطاه نحصل على

$$v^n\frac{d^ny}{dv^n} + \frac{a_1}{b}v^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dv^{n-1}} + \ldots \frac{a_n}{b^n}y = \frac{V}{b^n}$$

حيث V هى قيمة $f(x)$ بدلالة v، وهى فى صورة معادلة كوشى أويلر.

مثال: حل المعادلة

$$[(3x+2)^2D^2 + 3(3x+2)D - 36]y = 3x^2 + 4x + 1$$

الحل: ليكن $3x+2 = v$، $dy/dx = 3\frac{dy}{dv}$، $\frac{d^2y}{dx^2} = 3^2(d^2y/dv^2)$ وعلى ذلك

$$v^2.3^2.\left(\frac{d^2y}{dv^2}\right) + 3v.3\left(\frac{dy}{dv}\right) - 36y = 3\left(\frac{v-2}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{v-2}{3}\right) + 1$$

أى

$$v^2\frac{d^2y}{dv^2} + v\frac{dy}{dv} - 4y = \frac{1}{27}(v^2 - 1) \qquad (1)$$

وهى معادلة متجانسة فى y، v. ليكن $v = e^z$، $z = \ln v$ ، $D_1 = d/dz$

ومن المعادلة (1) نحصل على

$$[D_1(D_1 - 1) + D_1 - 4]y = (e^{2z} - 1)/27$$

أى

$$(D_1^2-4)y=(e^{2z}-1)/27$$

وتكون المعادلة المساعدة

$$m^2-4=0\ ,\quad m=2,-2$$

وتكون الدالة المتممة

$$y_{C.F}=c_1e^{2z}+c_2e^{-2z}=c_1v^2+c_2v^{-2}$$
$$=c_1(3x+2)^2+c_2(3x+2)^{-2}$$

ويكون الحل الخاص

$$y_{P.I}=\frac{1}{27}\frac{1}{D_1^2-4}(e^{2z}-1)=\frac{1}{27}\left[\frac{1}{(D_1-2)(D_1+2)}e^{2z}-\frac{1}{(D_1^2-4)}e^{0z}\right]$$

$$=\frac{1}{27}\left[\frac{1}{(D_1-2)(2+2)}e^{2z}-\frac{1}{0-4}e^{0z}\right]$$

$$=\frac{1}{27\times4}\left[\frac{1}{D_1-2}e^{2z}+1\right]=\frac{1}{108}\left[\frac{z}{1!}e^{2z}+1\right]$$

$$=\frac{1}{108}[ze^{2z}+1]=\frac{1}{108}\left[v^2\ln v+1\right]=\frac{1}{108}[(3x+2)^2\ln(3x+2)+1]$$

والحل العام هو

$$y=y_{C.F}+y_{P.I}$$

٨-٤ تخفيض رتبة المعادلة: Reduction of order

إذا علم الحل $y_1(x)$ للمعادلة التفاضلية الخطية

$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0\ ,\qquad a(x)>0 \qquad (1)$$

فإنه يمكن ايجاد الحل الثانى المستقل خطياً باستخدام التعويض

$$y(x) = y_1(x)v \qquad (2)$$

فإنه يؤدى إلى

$$ay_1 v'' + (2ay_1' + by_1)v' + (ay_1'' + ay_1' + cy_1)v = 0$$

أى أن

$$ay_1 P' + (2ay_1' + by)P = 0, \qquad P = v' \qquad (3)$$

وهى معادلة من الرتبة الأولى فى المتغير P ويكون حلها

$$P = v' = \frac{1}{y_1^2} \exp\left[-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx\right] \qquad (4)$$

ويكون الحل الثانى هو

$$y_2 = y_1(x) \int_0^x \frac{1}{y_1^2} \left\{ \exp\left[-\int_a^x \frac{b(x)}{a(x)} dx\right]\right\} dx$$

وقد توجد المشكلة فى صفر $y_1(x)$ فى الفترة (a,x) وفى هذه الحالة لاتستخدم هذه الطريقة ونلجأ إلى:

طريقة أخرى: يمكن كتابة المعادلة (1) فى الصورة المترافقة ذاتيا أى فى الصورة

$$(P(x)y')' + q(x)y = 1, \quad P > 0, \quad x \in [a,b] \qquad (5)$$

إذا كان $y_1 \neq 0$ هو حل المعادلة (5) فإنه يوجد حل y_2 مستقل خطياً الذى يحقق المعادلة (والتى تعرف بصيغة أبل)

$$P(x)[y_1 y_2' - y_1' y_2] = 1, \qquad (6)$$

حيث y_2 يكون حلا للمعادلة الخطية من الرتبة الاولى

ومنها نجد أن

$$y_2(x) \equiv y_1(x) \int_a^x \frac{dx}{P(x) y_1^2(x)}, \qquad (7)$$

ماعدا عند اصفار $y_1(x)$. والصعوبة فى اختيار $y_1(x)$ ظاهرية فقط. فإذا كان $y_1(x_0)=0$ وباستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to x_0} y_2(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{\int_a^x \frac{dx}{P(x)y_1^2(x)}}{\frac{1}{y_1(x)}}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{P(x)y_1^2(x)}}{\frac{-y_1'(x)}{y_1^2(x)}}$$

$$=-\frac{1}{P(x)y_1'(x_0)}\;,\; P(x_0)y_1'(x_0)\neq 0 \qquad (8)$$

حيث $y_1'(x_0)\neq 0$ وعلى ذلك تكون العلاقة (7) مع $y_2(x_0)$ معرفة بالعلاقة (8) تعطى حلا ثانياً للمعادلة (7) على الفترة $[a, b]$ وهو مستقل خطياً عن $y_1(x)$.

مثال (١): ليكن $y=x$ حلاً للمعادلة

$$(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0 \qquad (1)$$

أوجد الحل الثانى المستقل خطياً باستخدام تخفيض الرتبة

الحل: ليكن

$$y=xv \Rightarrow y'=xv'+v \Rightarrow y''=xv''+2v'$$

وبالتعويض فى المعادلة المعطاة نحصل على

$$(x^2+1)\left(x\frac{d^2v}{dx^2}+2\frac{dv}{dx}\right)-2x\left(x\frac{dv}{dx}+v\right)+2xv=0$$

$$\Rightarrow x(x^2+1)\frac{d^2v}{dx^2}+2\frac{dv}{dx}=0$$

وبوضع $\omega=\frac{dv}{dx}$ نحصل على

$$x(x^2+1)\frac{d\omega}{dx}+2\omega=0$$

وبفصل المتغيرات

$$\frac{d\omega}{\omega}=\left(-\frac{2}{x}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dv$$

وبالتكامل نحصل على

$$\omega=c(x^2+1)/x^2$$

وباختيار $c = 1$ ، وحيث أن $\omega=\frac{dv}{dx}$ فيكون لدينا

$$v(x)=x-\frac{1}{x}$$

وعلى ذلك يكون الحل الثانى

$$y_2(x)=xv=x(x-\frac{1}{x})=x^2-1$$

تمارين

١- حل المعادلات التفاضلية التالية

i) $xy'' - (2x-1)y' + (x-1)y = 0$

إذا كان $u = e^x$ أحد الحلول

ii) $y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{2}{1-x^2}y = 0$

إذا كان $u = x$ أحد الحلول

iii) $x^2y'' - 2x(1+x)y' + 2(1+x)y = x^3$

إذا كان $u = x$ أحد حلول المعادلة المتجانسة

iv) $(x+1)y'' - 2(x+3)y' + (x+5)y = e^x$

إذا كان $u = e^x$ أحد حلول المعادلة المتجانسة

v) $y' - \cot x y' - (1-\cot x)y = e^x \sin x$

إذا كان $u = e^x$ أحد حلول المعادلة المتجانسة

٢- حل المعادلات التفاضلية التالية باختزالها إلى الصورة العمودية

i) $(y''+y)\cot x + 2(y' + y\tan x) = \sec x$

ii) $y'' - 4xy' + (4x^2-1)y = -3e^{x^2}$

iii) $y'' + 2xy' + (x^2+1)y = x^3 + 3x$

iv) $xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = (x-2)e^x$

v) $x^2y'' - 2x(1+x)y' + 2(1+x)y = x^3 \ , \ x > 0$

٣- حل المعادلات التفاضلية التالية باستخدام طريقة تغيير البارلمترات

(i) $y'' + a^2y = \cos xax$, (ii) $y'' + y = x$

(iii) $y'' - y = 2/(1+e^x)$. (iv) $y'' - 4y' + 3y = e^x/(1+e^x)$

$(v)\ y'' - 3y' + 2y = e$ [illegible] $\qquad (vi)\ y'' - 2y' = e^{x}\sin x$

٤- حل المعادلات التفاضلية التالية بتحليل المؤثر

i) $[(x-2)D^2 - (2x+5)D + 2]y = (x+1)e^x$

ii) $[xD^2 + (x-2)D - 2]y = x^2$

iii) $3x^2y'' + (2 + 6x + 6x^2)y' - 4y = 0$

iv) $[xD^2 + (x-1)D]y - 2y = 0$

v) $xy'' + (x^2+1)y' + 2xy = 2x$

vi) $xy'' + (x-1)y' - y = x^4$

٥- حل المعادلات التفاضلية التالية

1- $(x^3D^3 + 3x^2D^2 - 2xD + 2)y = 0$ ، 2- $x^2D^2 - xD + y = 2\ln x$,

3- $(x^2D^2 - 4xD + 6)y = x^4$, 4- $(x^2D^2 - xD - 1)y = y$,

5- $(x^3D^2 - xD - 4)y = x^2$. 6- $(x^2D^2 - xD - 1)y = x^2e^{2x}$.

7- $[(5+2x)^2D^2 - 6(5+2x)D + 8]y = 0$,

8- $((x+1)^2D^2 - 3(x+1)D + 4)y = x^2$,

9- $((x+3)^2D^2 - 4(x+3)D + 6)y = x$,

10- $[(1+2x)^2D^2 - 6(1+2x)D + 16]y = -8(1+2x)^2, y(0) = 0, y'(0) = 2$

٦- بافتراض ان $x = e^t$ ، $\dfrac{d}{dt} = D_1$ أثبت أن

i) $F(D_1)x^m = F(m)x^m$, ii) $\dfrac{1}{F(D_1)}x^m = \dfrac{x^m}{F(m)}$, $(F(m) \neq 0)$,

iii) $\dfrac{1}{F(D_1)}(x^m v) = x^m \dfrac{1}{F(D_1 + m)}v$

(٧) ليكن $y = x$ حلا للمعادلة $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 4y = 0$

اوجد الحل الثانى المستقل خطياً بتخفيض الرتبة

(٨) ليكن $y = x + 1$ حلا للمعادلة $(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' + 3y = 0$

اوجد الحل الثانى المستقل خطياً بتخفيض الرتبة

(٩) ليكن $y = x^2$ حلا للمعادلة

$$(x^3 - x^2)y'' - (x^3 + 3x^2 - 2x)y' + (2x^2 + 2x - 2)y = 0$$

اوجد الحل الثانى بتخفيض الرتبة

(١٠) ليكن $y = e^{2x}$ حلا للمعادلة

$$(2x+1)y'' - 4(x+1)y' + 4y) = 0$$

اوجد الحل الثانى المستقل خطياً بتخفيض الرتبة

(١١) ليكن $y = x$ حلا للمعادلة

$$(x^2 - x + 1)y'' - (x^2 + x)y' + (x+1)y = 0$$

اوجد الحل الثانى بتخفيض الرتبة

(١٢) اوجد الحل الخاص

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x^2 + x^3}, \quad x > 0$$

إذا علم أن $y_1 = x$ ، $y_2 = \frac{1}{x}$ حلان للمعادلة المتجانسة

(١٣) اوجد الحل الخاص للمعادلة $y'' - 2y' + y = e^{-2x} \sec x$

(١٤) اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية.

(i) $x^2 y'' - 6y = \ln x$,

(ii) $(x+1)^2 y'' - (x+1)y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(iii) $2x^2y'' + 6xy' + 2y = 1$, $y(-2) = 1$, $y'(-2) = 0$,

(iv) $x^2y'' + 2xy' + y = \ln x$, $y(1) = y'(1) = 0$

الباب التاسع

المعادلات التفاضلية الآنيه

Simultaneous Differential Equation

٩-١ مقدمة: سوف نعتبر فى هذا الباب معادلات تفاضلية تحتوى على متغيرين غير مستقلين أو اكثر. وسوف نرى أن طريقة حل هذه المعادلات مشابهة لطريقة حل المعادلات الآنية فى الجبر. وتستخدم طريقة الحذف للحصول على معادلة تحتوى على متغير واحد غير مستقل مع متغير مستقل واحد. وبعد حل المعادلات التفاضلية الناتجة نعوض مرة ثانية للحصول على المتغير غير المستقل الآخروسوف نستعرض طرق اخرى.

ليكن لدينا المعادلتان الاتيتان

$$\begin{aligned} f_1(D)x + f_2(D)y &= f(t) \\ g_1(D)x + g_2(D)y &= g(t) \end{aligned} \quad , \quad D = \frac{d}{dt} \qquad (1)$$

حيث كل من x، y دالة فى t، $f_1(D)$ ، $f_2(D)$ ، $g_1(D)$ ، $g_2(D)$ مؤثرات ذات معاملات ثابتة، f، g دوال فى المتغير المستقل t. ليكن Δ هو المحدد الذى نحصل عليه من (1) كما هو مبين بعد. ومن الواضح ان Δ يحتوى على مؤثرات (معاملات) للمتغيرين غير المستقلين x ، y فى (1).

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_1(D) & f_2(D) \\ g_1(D) & g_2(D) \end{vmatrix} \qquad (2)$$

ويكون عدد الثوابت الاختيارية فى الحل العام للنظام (1) مساويا لدرجة D فى المحدد Δ المعطى فى (2) شريطة أنه لا يساوى الصفر.

٩-٢ طرق حل المعادلات التفاضلية الانيه ذات المعاملات الثابتة

(أ) طريقة الحذف: تتضح الطريقة من الامثلة التالية وهى تتطلب حذف المتغيرات غير المستقلة ما عدا واحدا. ونوجد قيمة هذا المتغير الذى نستخدمه فى ايجاد المتغيرات الاخرى

مثال (١): حل النظام

$$\frac{dx}{dt} - 7x + y = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{dy}{dt} - 2x + 5y = 0 \qquad \text{(ii)}$$

الحل: (أ) الطريقة الأولى مستخدما D.

نكتب D بدلا من d/dt وتأخذ المعادلتان (i)، (ii) الصورة

$$(D-7)x + y = 0 \qquad (1)$$

$$-2x + (D-5)y = 0 \qquad (2)$$

لحذف x (مثلا) نضرب المعادلة (1) فى 2 ونؤثر على المعادلة (2) بالمؤثر $(D-7)$ فنحصل على

$$2(D-7)x + 2y = 0 \qquad (3)$$

$$-2(D-7)x + (D-7)(D-5)y = 0 \qquad (4)$$

بجمع (3)، (4) نحصل على

$$[(D-7)(D-5)+2]y = 0$$

أى أن

$$(D^2 - 12D + 37)y = 0$$

وهى معادلة خطية ذات معاملات ثابتة وتكون المعادلة المساعدة

$$m^2 - 12m + 37 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 6+i\,,\ 6-i$$

ويكون الحل هو

$$y = e^{6t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) \qquad (5)$$

للحصول على x نعوض فى (2) ولكن قبلها نشتق (5) بالنسبة الى t أولا للحصول

$$Dy = 6e^{6t}[c_1 \cos t + c_2 \sin t] + e^{6t}[-c_1 \sin t + c_2 \cos t]$$
$$= e^{6t}[(6c_1 + c_2)\cos t + (6c_2 - c_1)\sin t]$$

وبالتعويض فى (2) نحصل على

$$2x = Dy - 5y = e^{6t}[(c_1 + c_2)\cos t + (6c_2 - c_1)\sin t - 5(c_1 \cos t + c_2 \sin t)]$$
$$= e^{6t}[(c_1 + c_2)\cos t + (c_2 - c_1)\sin t]$$

أى

$$x = \frac{1}{2}e^{6t}[(c_1 + c_2)\cos t + (c_2 - c_1)\sin t] \qquad (6)$$

المعادلتان (5)، (6) يمثلان الحل المطلوب

(ب) طريقة ثانية (الاشتقاق).

لحذف x نشتق (ii) بالنسبة إلى t فنحصل على

$$D^2y - 2Dx - 5Dy = 0 \quad , \quad D = \frac{d}{dt} \qquad \text{(iii)}$$

ومن (ii) يكون لدينا

$$\frac{dx}{dt} = 7x - y$$
$$= \frac{7}{2}\left(\frac{dy}{dt} - 5y\right) - y = \frac{7}{2}\frac{dy}{dt} - \frac{37}{2}y$$

بالتعويض عن Dx فى (iii) نجد أن

$$D^2y - 7Dy + 37y - 5Dy = 0$$

أى

$$(D^2 - 12D + 37)y = 0$$

وهى معادلة تفاضلية خطية فى y وسبق حلها فى الطريقة (أ) وحصلنا على الحل y. ثم نوجد x كما فى الطريقة (أ).

مثال (٢): حل النظام

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3x-4y=0\ ,\ \frac{d^2y}{dt^2}+x+y=0$$

الحل: نكتب D بدلا من $\frac{d}{dt}$ فنحصل على

$$(D^2-3)x-4y=0 \qquad (1)$$

$$x+(D^2+1)y=0 \qquad (2)$$

نحذف y فنحصل على

$$[(D^2+1)(D^2-3)+4]x=0$$

$$(D^2-1)^2x=0 \qquad (3)$$

وتكون المعادلة المساعدة

$$(m^2-1)^2=0, \qquad \Rightarrow \qquad m=1,1,-1,-1$$

ويكون الحل هو

$$x=(c_1+c_2t)e^t+(c_3+c_4t)e^{-t} \qquad (4)$$

حيث c_1,c_2,c_3,c_4 ثوابت اختيارية. من (4) نحصل على

$$Dx=c_2e^t+(c_1+c_2t)e^t+c_4e^{-t}-(c_3+c_4t)e^{-t}$$
$$=(c_1+c_2+c_2t)e^t+(c_4-c_3-c_4t)e^{-t}$$

$$D^2x=(c_1+2c_2+c_2t)e^t-(2c_4-c_3-c_4t)e^{-t} \qquad (5)$$

من (1) نحصل على

$$4y=D^2x-3x \qquad (6)$$

وباستخدام (4)، (5) فى (6) نحصل على

$$4y=(c_1+c_2+2c_2t)e^t-(2c_4-c_3-c_4t)e^{-t}$$
$$-3[(c_1+c_2t)e^t+(c_3+c_4t)e^{-t}]$$
$$=2(c_2-c_1-c_2t)e^t-2(c_4+c_3+c_4t)e^{-t}$$

أى أن

$$y=\frac{1}{2}(c_2-c_1-c_2t)e^t-\frac{1}{2}(c_4+c_3+c_4t)e^{-t} \qquad (7)$$

المعادلتان (4)، (7) تمثلان الحل المطلوب.

مثال (٣): حل النظام

$$\frac{dy}{dx}+y=z+e^x\ ,\ \frac{dz}{dx}+z=y+e^x,$$

الحل: نكتب D بدلا من d/dx

$$(D+1)y-z=e^x \qquad (1)$$

$$-y+(D+1)z=e^x \qquad (2)$$

بالتأثير على (1) بالمؤثر $(D+1)$ فنحصل على

$$(D+1)^2y-(D+1)z=(D+1)e^x=e^x+e^x \qquad (3)$$

بجمع (2)، (3) نحصل على

$$[(D+1)^2-1]y=e^x+(e^x+e^x)$$
$$D(D+2)y=3e^x$$

وتكون المعادلة المساعدة

$$m(m+2)=0 \quad \Rightarrow \quad m=0,-2$$

وتكون الدالة المتممة هى

$$y_{C.F}=c_1+c_2e^{-2x}$$

ويكون الحل الخاص هو

$$y_{P.I}=3\frac{1}{D(D+2)}e^{x}=e^{x}$$

ويكون الحل هو

$$y=c_1+c_2e^{-2x}+e^{x} \qquad (4)$$

من (4) نجد أن

$$Dy=\frac{dy}{dx}=-2c_2e^{-2x}+e^{x}$$

ومن (1) نحصل على

$$z=Dy+y-e^{x}$$
$$=-2c_2e^{-2x}+e^{x}+c_1+c_2e^{-2x}+e^{x}-e^{x}$$
$$=c_1-c_2e^{-2x}+e^{x} \qquad (6)$$

ويكون الحل العام للنظام هو (4)، (6)

٩-٣ حل المعادلات التفاضلية الآتية التى تحتوى مؤثرات xd/dx ، td/dt

فى هذا النوع من المسائل تستخدم طريقة معادلة أويلر وتتضح الطريقة من الأمثلة التالية

مثال (١): حل النظام

$$t(dx/dt)+y=0$$
$$t(dy/dt)+x=0$$

الحل: ليكن $t=e^{z}$ ، $D_1=d/dz=td/dt$

فإن النظام يؤول إلى

$$D_1x+y=0 \qquad (1)$$
$$x+D_1y=0 \qquad (2)$$

بحذف y من (1) ، (2) يكون لدينا

$$D_1^2 x - x = 0 \quad \Rightarrow \quad (D_1^2 - 1)x = 0$$

وتكون المعادلة المساعدة

$$m^2 - 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad m = 1, -1$$

وتكون الدالة المتممة هى

$$x = c_1 e^z + c_2 e^{-z} = c_1 t + c_2 t^{-1} \qquad (3)$$

$$D_1 x = c_1 e^z - c_2 e^{-z}$$

ومن (1) نجد أن

$$y = -D_1 x = c_2 e^{-z} - c_1 e^{tz}$$

وحيث أن $t = e^z$ فان الحل للنظام من (3)، (4) هو

$$x = c_1 t + c_2 t^{-1}, \quad y = c_2 t^{-1} - c_1 t$$

مثال (٢): حل النظام

$$t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + t\frac{dx}{dt} + 2y = 0$$

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} - 2x = 0$$

الحل: ليكن $t = e^z$ ، $z = \ln t$ ،

$$D_1 = d/dz = t\ d/dt \quad , \quad t^2 d^2/dt^2 = D_1(D_1 - 1)$$

فيأخذ النظام الشكل

$$D_1^2 x + 2y = 0 \qquad (1)$$

$$-2x + D_1^2 y = 0 \qquad (2)$$

نحذف y من (1)، (2) فيكون لدينا

$$(D_1^4+4)x=0 \quad \Rightarrow \quad [(D_1^2+2)^2-4D_1^2]x=0$$

وتكون المعادلة المساعدة

$$(m^2-2m+2)(m^2+2m+2)=0$$

وتكون الجذور هى

$$m=1\pm i, -1\pm i$$

ويكون الحل العام

$$x=e^{z}(c_1\cos z+c_2\sin z)+e^{-z}(c_3\cos z+c_4\sin z) \qquad (3)$$

$$D_1x=e^{z}[(c_1+c_2)\cos z+(c_2-c_1)\sin z]$$
$$+e^{-z}[(c_4-c_3)\cos z-(c_3+c_4)\sin z]$$

$$D_1^2x=2e^{z}(c_2\cos z-c_1\sin z)+2e^{-z}(c_3\sin z-c_4\cos z)$$

بالتعويض عن D_1^2x فى (1) نحصل على

$$y=e^{z}(c_1\sin z-c_2\cos z)+e^{-z}(c_4\cos z-c_3\sin z) \qquad (4)$$

وحيث أن $t=e^{z}$، $\ln t=z$، ومن (3)، (4) نحصل على الحل وهو

$$x=t[c_1\cos\ln t+c_2\sin\ln t]+t^{-1}[c_3\cos\ln t+c_4\sin\ln t]$$

$$y=t[c_1\sin\ln t-c_2\cos\ln t]+t^{-1}[c_4\cos\ln t-c_3\sin\ln t]$$

مثال (٣): حل النظام

$$dx/dt=ny-mz \qquad (1)$$

$$dy/dt=\ell z-nx \qquad (2)$$

$$dz/dt=mx-\ell y \qquad (3)$$

بضرب (1) ، (2)، (3) فى x^2 و y^2 و z^2 على الترتيب والجمع

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}+2z\frac{dz}{dt}=0$$

$$\frac{d}{dt}(x^2+y^2+z^2)=0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=c_1 \qquad (4)$$

بضرب (1) ، (2) ، (3) فى $2\ell x$ ، $2my$ ، $2mz$ والجمع على الترتيب نحصل على

$$2\ell x\frac{dx}{dt}+2my\frac{dy}{dt}+2nz\frac{dz}{dt}=0$$

$$\frac{d}{dt}(\ell x^2+my^2+nz^2)=0$$

$$\ell x^2+my^2+nz^2=c_2 \qquad (5)$$

بضرب (1)، (2)، (3) لى ℓ , m , n على الترتيب والجمع

$$\ell\frac{dx}{dt}+m\frac{dy}{dt}+n\frac{dz}{dt}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\ell x+my+nz)=0$$

$$\ell x+my+nz=c_3 \qquad (6)$$

ويكون حل النظام معطى بالمعادلات (4)، (5)، (6) حيث c_1 ، c_2 ، c_3 ثوابت اختيارية.

٤-٩ طريقة المصفوفات:

ان طريقة الحذف السابق شرحها تصبح صعبة إذا زاد عدد المتغيرات غير المستقلة. ولذلك نلجأ لطريقة المصفوفات والتى يمكن تعميمهما إلى n من المعادلات.

ولغرض السهولة، سوف نشرح الطريقة لنظام متجانس على الصورة

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2\\ \dot{x}_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{aligned} \quad , \quad \text{والنقطة العلويه تعنى } \frac{d}{dt} \qquad (1)$$

نبحث حلا لهذا النظام على الصورة:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 e^{\lambda t} \\ A_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

حيث A_1، A_2 ، λ اعداداً ثابتة يراد تعيينها بشرط أن $x_1 = A_1 e^{\lambda t}$ ، $x_2 = A_2 e^{\lambda t}$ تحقق النظام (1). بتعويض (2) فى (1) نجد أن A_1، A_2، λ يجب أن يحققوا المعادلات

$$A_1 \lambda e^{\lambda t} = a_{11} A_1 e^{\lambda t} + a_{12} A_2 e^{\lambda t}$$

$$A_2 \lambda e^{\lambda t} = a_{21} A_1 e^{\lambda t} + a_{22} A_2 e^{\lambda t}$$

وبالقسمة على $e^{\lambda t}$ ونعيد ترتيب الحدود نحصل على النظام المكافيء

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) A_1 + a_{12} A_2 &= 0 \\ a_{21} A_1 + (a_{22} - \lambda) A_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

يتكون النظام (3) من معادلتين جبريتين فقط وثلاثة مجاهيل هى λ، A_1، A_2، وعلى ذلك يمكن حل هذا النظام كالتالى :

حيث أن النظام نظام متجانس فى الثابتين A_1 ، A_2. وعادة نبحث عن الحل غير الصفرى. لأن الحل $(A_1, A_2) = (0,0)$ يعطى الحل الصفرى $x_1(t) = 0$، $x_2(t) = 0$ للنظام (1) وبالتالى فإن (A_1, A_2) يجب ان يختلفان عن الصفر. ونعرف أن النظام المتجانس للمعادلات الجبرية يكون له حل غير صفرى إذا وفقط إذا كان محدد المعاملات يساوى الصفر وفى حالة النظام (3)، أى يتحقق وجود حل $(A_1, A_2) \neq (0,0)$ إذا وفقط إذا كان

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

أى أن

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \lambda + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0 \qquad (4)`$$

تعريف: تسمى المعادلة `(4) بأنها المعادلة المميزة للنظام (1) وتسمى جذورها بالجذور المميزة (characteristic roots) أو القيم المميزة eigenvalues للنظام (1)

ويكون من المفيد للقارىء أن يلاحظ عند هذه النقطة ان المحدد فى (4) نحصل عليه من المحدد

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

وهو معاملات النظام (1) بطرح λ من القطر الرئيسى. كما تسمى (4) بالمعادلة المميزة للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

ليكن λ_1 ، λ_2 جذران للنظام (1)، إذا استبدلت λ فى (3) بالقيمة الذاتية فيكون للنظام (3) حلا غير صفرى (A_1, A_2). وبتعويض عن قيم A_1 ، A_2 فى (2) نحصل على حل غير صفرى للنظام (1). إذا كان للمعادلة (\`4) جذرين مختلفين $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ فان نحصل على الحل غير الصفرى للنظام (1) أحدهما عند $\lambda = \lambda_1$ والأخر عند $\lambda = \lambda_2$. وعلى ذلك يكون هذان الحلان مستقلين خطياً. ومن الجهة الأخرى إذا لم يكن للمعادلة (\`4) جذران مختلفان (أى إذا كان $\lambda_1 = \lambda_2$) فان الطريقة السابقة تعطى (عموماً) حلاً واحداً للنظام (1).

وعلى ذلك تحتاج إلى حل ثان مستقل خطياً للنظام (1).

فى هذه الحالة نأخذ الحل الثانى المستقل خطياً للنظام (1) على الصورة

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1 t + b_1) e^{\lambda_1 t} \\ (a_2 t + b_2) e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

وهذا ممكن دائماً . والامثلة التالية توضح الطريقة.

مثال (١): اوجد الحل العام للنظام

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -3x_1 + 6x_2 \end{aligned} \qquad (7)$$

الحل: نبحث عن حل للنظام (7) على الصورة

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 e^{\lambda t} \\ A_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix} \qquad (8)$$

وعلى ذلك للحصول على λ يجب ان يوجد جذر المعادلة المميزة (لاحظ أن $a_{11} = 2$ ، $a_{12} = 1$ ، $a_{21} = -3$ ، $a_{22} = 6$)

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$$

وتكون الجذور المميزة هى $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 5$. عندما $\lambda = \lambda_1 = 3$ فإن الثابتين A_1 ، A_2 للحل (8) يجب ان يحققا المعادلة المتجانسه (3) أى

$$\begin{aligned} -A_1 + A_2 &= 0 \\ -3A_1 + 3A_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \quad A_1 = A_2$$

باختيار $A_1 = A_2 = 1$ فيكون الحل هو

$$\begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} \qquad (9)$$

[من الواضح أى حل آخر غير صفرى لهذا النظام مثلا $A_1 = A_2 = 2$ سوف يعطى حلاً آخر غير مستقل مع الحل (9)]. عندما $\lambda = 5$ فإن النظام (3) يأخذ الصورة

$$\begin{aligned} -3A_1 + A_2 &= 0 \\ -3A_1 + A_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow A_2 = 3A_1$$

وباختيار $A_1 = 1$ فإن $A_2 = 3$ ونحصل على حل النظام (7) وهو

$$\begin{bmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{5t} \qquad (10)$$

وعلى ذلك يكون الحلان (9)، (10) للنظام (7) مستقلين خطيا ويكون الحل العام للنظام (7) هو

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{5t} \\ x_2 = c_1 e^{5t} + 3c_2 e^{5t} \end{array}$$

مثال (٢): اوجد الحل العام للنظام

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= 9x_1 + 2x_2 \end{aligned} \qquad (11)$$

الحل: المعادلة المميزة للنظام (11) هى

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 9 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

ويكون الجذران المميزان $\lambda_2 = 2-3i \quad , \quad \lambda_1 = 2+3i$.

عندما $\lambda_1 = 2+3i$ فإن الثابتين A_2 , A_1 للحل (8) يحققان النظام المتجانس (3) مع $a_{11} = 2$ ، $a_{12} = -1$ ، $a_{21} = 9$ ، $a_{22} = 2$، $\lambda = 2+3i$. وبالتالى

$$-3iA_1 - A_2 = 0$$

$$9A_1 - 3iA_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 3iA_1$$

باختبار $A_1 = 1$ فإن $A_2 = -3i$ وبالتالى فإن

$$\begin{bmatrix} e^{(2+3i)t} \\ -3ie^{(2+3i)t} \end{bmatrix} \qquad (12)$$

هو حل للنظام (11). عندما $\lambda_2 = 2-3i$ فان الثابتين A_2 , A_1 يحققان النظام المتجانس (3) مع $\lambda = 2-3i$، $a_{22} = 2$ ، $a_{21} = 9$ ، $a_{12} = -1$ ، $a_{11} = 2$

أى أن

$$3iA_1 - A_2 = 0$$

$$9A_1 + 3iA_2 = 0 \Rightarrow A_2 = 3iA_1$$

باختبار $A_1 = 1$ فيكون $A_2 = 3i$ وبالتالى

$$\begin{bmatrix} e^{(2-3i)t} \\ 3ie^{(2-3i)t} \end{bmatrix} \qquad (13)$$

هو حلاً اخر للنظام (11). وبالتالى يكون الحلان (12)، (13) للنظام (11) مستقلين خطياً وبالتالى يكون حل النظام (11) هو

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} e^{(2+3i)t} \\ -3ie^{(2+3i)t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{(2-3i)t} \\ 3ie^{(2-3i)t} \end{bmatrix} \qquad (14)$$

حيث c_1، c_2 ثابتان اختياريان.

ملحوظة (١): باستخدام المتطابقة $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$

فإنه يمكن كتابة الحل (14) على الصورة

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} e^{2t}\cos 3t + ie^{2t}\sin 3t \\ -3ie^{2t}\cos 3t + 3e^{2t}\sin 3t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{2t}\cos 3t - ie^{2t}\sin 3t \\ 3ie^{2t}\cos 3t + 3e^{2t}\sin 3t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (c_1+c_2)e^{2t}\cos 3t + i(c_1-c_2)e^{2t}\sin 3t \\ 3(c_1+c_2)e^{2t}\sin 3t - 3i(c_1-c_2)e^{2t}\cos 3t \end{bmatrix}$$

بوضع $C_1 = c_1 + c_2$، $C_2 = i(c_1 - c_2)$ نجد أن

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{2t}\cos 3t + C_2 e^{2t}\sin 3t \\ 3C_1 e^{2t}\sin 3t - 3C_2 e^{2t}\cos 3t \end{bmatrix}$$

حيث C_1، C_2 ثابتان اختياريان.

ملحوظة (٢): بمقارنة الحلين (12)، (13) للنظام (11) نلاحظ أحد الحلين مرافق للحل الآخر. وهذا مايحدث عندما تكون الجذور المميزة مترافقة ومعاملات النظام اعداداً حقيقية.

مثال (٣): اوجد الحل العام للنظام

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 \qquad (15)$$

الحل: المعادلة المميزة للنظام (15) هى

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

ويكون الجذران المميزان هما $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. وبالتالى الثابتان A_1، A_2 للحل (8) يحقق النظام المتجانس (3) مع

$$a_{11} = 0,\ a_{12} = 1,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = 2.\ \lambda = 1$$

$$\begin{aligned} -A_1 + A_2 &= 0 \\ -A_1 + A_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow A_1 = A_2$$

باختبار $A_1 = A_2 = 1$ فيكون الحل

$$\begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix} \qquad (16)$$

وحيث أن الجذرين المميزين متساويان، فاننا نبحث عن حل ثان مستقل خطياً للنظام (15) على الصورة (6) أى

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1 t + b_1)e^t \\ (a_2 t + b_2)e^t \end{bmatrix} \qquad (17)$$

حيث a_1، a_2، b_1، b_2 ثوابت يراد تعيينها بحيث أن (17) يكون حلاً للنظام (15) اى مستقل خطياً عن (16). بتعويض $x_1 = (a_1 t + b_1)e^t$، $x_2 = (a_2 t + b_2)e^t$ فى (15) نحصل على

$$a_1 e^t + (a_1 t + b_1)e^t = (a_2 t + b_2)e^t$$

$$a_2 e^t + (a_2 t + b_2)e^t = -(a_1 t + b_1)e^t + 2(a_2 t + b_2)e^t$$

بالقسمة على e^t وبمساواة المعاملات لقوى t فى الطرفين نجد أن

$$a_1 + b_1 = b_2 \quad , \quad a_1 = a_2 \qquad (18)$$
$$a_2 + b_2 = -b_1 + 2b_2 \quad , \quad a_2 = -a_1 + 2a_2$$

[يلاحظ أن المعادلتين الأخيرتين مكافئتان للمعادلتين الأوليين)

$$a_1 + b_1 = b_2 \quad , \quad a_1 = a_2$$

والأن اى لختيار b_2 ، a_2 ، b_1 ، a_1 الذى يحقق (19) يعطى حلاً يكون مستقلا خطيا عن (16) يكون مقبولاً.

فمثلاً اختيار $a_1 = a_2 = 1$ ، $b_1 = 0$ ، $b_2 = 1$

نحصل على الحل

$$\begin{bmatrix} te^t \\ (t+1)e^t \end{bmatrix} \qquad (20)$$

والذى يكون مستقلا خطياً عن (15) ويكون الحل العام هو

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} te^t \\ (t+1)e^t \end{bmatrix}$$

أى أن

$$x_1 = c_1 e^t + c_2 te^t \quad , \quad x_2 = c_1 e^t + c_2 (t+1) e^t$$

حيث c_1، c_2 ثابتان اختياريان.

ملحوظة (٣): النظام الذى له جذر مكرر قد يكون له حلان مستقلان فى الصورة (8) كما فى المثال التالى. وهذا يكون صحيحاً أيضاً للنظام الخطى المتجانس فى أكثر من متغيرين تابعين.

مثال (٤): اوجد الحل العام للنظام

$$\dot{x}_1 = x_1 \quad , \quad \dot{x}_2 = x_2 \qquad (21)$$

الحل: المعادلة المميزة للنظام (21) هى

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

وبالتالى فإن الثابتين A_1 ، A_2 للحل (8) تحققان النظام (3) مع $\lambda = 1$ ،

$a_{11} = 1$ ، $a_{12} = 0$ ، $a_{21} = 0$ ، $a_{22} = 1$

أى أن

$$0A_1 + 0A_2 = 0$$
$$0A_1 + 0A_2 = 0$$

حيث A_2 ، A_1 ثابتان اختياريان .

باختيار أولا $A_1 = 1$ ، $A_2 = 0$ ثم $A_1 = 0$ ، $A_2 = 1$ نحصل على الحلين المستقلين

$$\begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}$$

ويكون الحل العام للنظام (21) هو

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}$$

أى

$$x_1 = c_1 e^t \quad , \quad x_2 = c_2 e^t$$

مثال (٥): اوجد الحل العام للنظام

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \end{aligned} \qquad (22)$$

الحل: نبحث عن حل للنظام (22) على الصورة

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 e^{\lambda t} \\ A_2 e^{\lambda t} \\ A_3 e^{\lambda t} \end{bmatrix} \tag{23}$$

باتباع نفس الطريقة السابقة تكون المعادلة المميزة هى

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \lambda^3 - 9\lambda^2 + 108 = 0$$

وتكون الجذور المميزة $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ ، $\lambda = -3$.

عندما $\lambda = -3$ فان الثوابت A_1 ، A_2 ، A_3 تحقق اتلنظام المتجانس

$$\left.\begin{aligned} 8A_1 + 2A_2 + 2A_3 &= 0 \\ 2A_1 + 5A_2 - 4A_3 &= 0 \\ 2A_1 - 4A_2 + 5A_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} 4A_1 + A_2 + A_3 &= 0 \\ 2A_1 + 5A_2 - 4A_3 &= 0 \end{aligned}$$

باختيار $A_3 = 1$ نحصل على $A_2 = 1$ ، $A_1 = -\frac{1}{2}$. ويكون احد الحلول هو

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} e^{-3t} \\ e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix} \tag{24}$$

عندما $\lambda = 6$ فإن A_1 ، A_2 ، A_3 تحققان النظام المتجانس

$$\left.\begin{aligned} -A_1 + 2A_2 + 2A_3 &= 0 \\ 2A_1 - 4A_2 - 4A_3 &= 0 \\ 2A_1 - 4A_2 - 4A_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; A_1 + 2A_2 + 2A_3 = 0 \tag{25}$$

باختيار $A_3 = 1$ ، $A_2 = 1$ نحصل على $A_1 = 4$ وبذلك يكون

$$\begin{bmatrix} 4e^{6t} \\ e^{6t} \\ e^{6t} \end{bmatrix} \qquad (26)$$

هو الحل الثانى للنظام (22). ومن وجهة النظر الأخرى باختيار $A_2 = 2$ ، $A_1 = 1$ نحصل على $A_3 = 0$ وبالتالى

$$\begin{bmatrix} 2e^{6t} \\ e^{6t} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (27)$$

يعطى الحل الثالث للنظام (22). ولنتأكد أن الحلول (24)، (26) ، (27) مستقلة خطية نوجد الرونسكى للحلول الثلاثة

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}e^{-3t} & 4e^{6t} & 2e^{6t} \\ e^{6t} & e^{6t} & e^{6t} \\ e^{6t} & e^{6t} & 0 \end{vmatrix} = e^{9t} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{9}{2}e^{9t} \neq 0$$

والذى يثبت أن الحلول الثلاثة مستقلة خطياً وعلى ذلك يكون الحل العام

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-3t} \\ e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 4e^{6t} \\ e^{6t} \\ e^{6t} \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2e^{6t} \\ e^{6t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

أى

$$x_1 = -\frac{1}{2}e^{-3t} + 4c_2e^{6t} + 2c_3e^{6t}$$

$$x_2 = c_1e^{-3t} + c_2e^{6t} + c_3e^{6t}$$

$$x_3 = c_1e^{-3t} + c_2e^{6t}$$

ملحوظة (٤): فى المثال السابق كان لدينا الحلين الثانى والثالث طبقا $\lambda_2=\lambda_3=6$ وحصلنا على حلين مستقلين وإذا تعذر ذلك نبحث عن حل مستقل خطياً عن الحل الثانى على الصورة

$$(a_1t+b_1)e^{6t} \quad , \quad (a_2t+b_2)e^{6t} \quad , \quad (a_3t+b_3)e^{6t}$$

ملحوظة (٦): يمكن تعميم هذه الطريقة للنظام من الرتبة النونية.

مثال (٦): اوجد الحل العام للنظام

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2-x_3+x_4, \quad \dot{x}_2=-x_2+x_4 \\ \dot{x}_3 &= x_3-x_4 \quad , \quad \dot{x}_4=2x_4 \end{aligned} \tag{32}$$

الحل: نبحث عن حل النظام (32) على الصورة

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1e^{\lambda t} \\ A_2e^{\lambda t} \\ A_3e^{\lambda t} \\ A_4e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

وتكون المعادلة المميزة هى

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

أى

$$-\lambda(-1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)=0$$

وتكون الجذور المميزة هى

$$\lambda_1=0 \ ، \ \lambda_2=-1 \ ، \ \lambda_3=1 \ ، \ \lambda_4=2$$

عند $\lambda=0$ فإن الثوابت A_4 ، A_3 ، A_2 ، A_1 تحقق النظام المتجانس

$$\left.\begin{array}{r} A_2 - A_3 + A_4 = 0 \\ -A_2 \quad + \quad A_4 \quad = 0 \\ A_3 \quad - \quad A_4 \quad = 0 \\ 2A_4 \qquad = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; A_4 = A_3 = A_2 = 0$$

باختيار $A_1 \neq 0$ ويكون لدينا الحل

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{33}$$

عند $\lambda = -1$: فإن الثوابت A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 تحقق النظام المتجانس

$$\left.\begin{array}{r} A_1 + A_2 - A_3 + A_4 = 0 \\ A_4 \qquad = 0 \\ 2A_3 \quad - \quad A_4 \qquad = 0 \\ 3A_4 \qquad = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; A_4 = A_3 = 0, A_1 + A_2 = 0$$

باختيار $A_1 = 1$ يكون لدينا الحل

$$\begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{34}$$

عند $\lambda = 1$: الثوابت A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 تحقق

$$\left.\begin{array}{r} -A_1 + A_2 - A_3 + A_4 = 0 \\ -2A_2 + \quad A_4 \quad = 0 \\ -A_4 \qquad = 0 \\ A_4 \qquad = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; A_4 = A_2 = 0, A_1 + A_3 = 0$$

باختيار $A_1 = 1$ فيكون $A_3 = -1$ ويكون لدينا الحل

$$\begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ -e^t \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (35)$$

عند $\lambda = 2$: الثوابت A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 تحقق النظام

$$\left.\begin{aligned} -2A_1 + A_2 - A_3 + A_4 &= 0 \\ -3A_2 + A_4 &= 0 \\ -A_3 - A_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &-2A_1 + 7A_2 = 0 \\ &A_4 = 3A_2 = -A_3 \end{aligned}$$

باختيار $A_4 = 3$ نجد أن $A_2 = 1$، $A_1 = \frac{7}{2}$ ، $A_3 = -3$

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{2}e^{2t} \\ e^{2t} \\ -3e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{bmatrix} \qquad (36)$$

ويمكن التأكد من أن الحلول الاربعة مستقلة خطياً حيث الرونسكى لا يساوى الصفر.

ويكون الحل العام للنظام (32) هو

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ -e^t \\ 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} \frac{7}{2}e^{2t} \\ e^{2t} \\ -3e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{bmatrix}$$

أى أن

$$x_1 = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^t + \frac{7}{2} c_4 e^{2t}$$

$x_2 = -c_2e^{-t} + c_4e^{2t}$

$x_3 = -c_3e^{t} - 3c_4e^{2t}$

$x_4 = 3c_4e^{2t}$

٩-٥ المعادلات غير المتجانسه

نفترض أنه لدينا النظام الخطى

$$\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{f}(t) \qquad (1)$$

حيث A مصفوفة ثابتة من الرتبة $n \times n$ ، $\underline{f}(t)$ متجه دالة فى t ، ولحل هذا النظام غير المتجانس توجد عدة طرق منها :

(أ) **طريقة تغيير الثوابت** : فى هذه الطريقة توجد أولا حل المعادلة المتجانسة $\underline{x}' = A\underline{x}$ ثم تستبدل الثوابت بدوال فى t . ونعوض فى المعادلة (1) وتوجد هذه الدوال وسبق أن شرحنا ذلك .

(ب) **طريقة المصفوفات** : يمكن كتابة المعادلة (1) على الصورة

$$\underline{\tilde{x}}' = A_1\underline{\tilde{x}} \qquad (2)$$

حيث A_1 له صورة التجزئ $A_1 = \begin{bmatrix} A & : & B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ O & : & P \end{bmatrix}$. $\underline{\tilde{x}}$ هو المتجه x مع مركبات مضافه . وطريقة حل النظام (1) سنوضحها بالأمثلة التالية وسوف نستخدم النظرية التالية :

نظرية : يمكن تجزئ المصفوفة A_1 إلى $\begin{bmatrix} A & : & B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ O & : & P \end{bmatrix}$ حيث A ، P مصفوفتان مربعتان ، O مصفوفة صفرية فإن القيم الذاتية للمصفوفة A_1 يمكن الحصول عليها من A ، P .

وستقتصر دراستنا فى هذا الباب على نظام ثنائى البعد

مثال (١) : حل النظام

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ليكن $x_3 = 1$ ونعتبر المتجه الموسع $\bar{x}_1 = [x_1 \; x_2 \; x_3]^T$ ، حيث T مدور (transpose) المتجه $\underline{x}$ وعلى ذلك يكون لدينا

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + 2x_3 \;,\; \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_3 \;,\; \dot{x}_3 = 0$$

وبالتالى يكون لدينا

$$\dot{\underline{\bar{x}}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & : & 2 \\ 1 & 1 & : & 1 \\ .. & .. & : & .. \\ 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \bar{x} = A_1 \bar{x}$$

والقيمة الذاتية للمصفوفة A_1 يمكن الحصول عليها من القيم الذاتية لكل من

$$[0], \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

وهم $\lambda_1 = 1$ ، $\lambda_2 = 2$ ، $\lambda_3 = 0$ على الترتيب وتكون للمتجهات الذاتية المناظرة للمصفوفة A_1 هى

$$\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \;،\; \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;،\; \underline{\bar{v}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالى يكون حل النظام $\dot{\underline{\bar{x}}} = A_1 \underline{\bar{x}}$ هو

$$\underline{\bar{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c_1 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

وحيث ان النظام المعطى ثنائى البعد فإنه يمكن استخراجه من ذلك ، وهذا النظام يجب ان يحتوى على ثابتين اختياريين فقط . ولكن من افترضنا أن $x_3=1$ فإنه $x_3=-c_3$ أى أن $c_3=-1$ ويكون حل النظام هو

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 e^{t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>مثال (٢)</u> : حل النظام

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

<u>الحل</u> : ليكن $x_3=e^{-t} \;\Leftarrow\; \dot{x}_3=-e^{-t}=-x_3$ وعلى ذلك يكون النظام الموسع هو

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A_1 \tilde{x}$$

ولكن القيم الذاتية للمصفوفه $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ هى $\lambda_1=4$ ، $\lambda_2=1$ والقيمة الذاتية للمصفوفة $[-1]$ هى $\lambda_3=-1$ ويمكن الحصول على المتجهات الذاتية للمصفوفة A_1 كما يلى :

$$\text{(i)}\ \lambda_1=4 \Rightarrow (A_1-\lambda_1 I)\,\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v}_1 = [4 \;\; -1 \;\; 0]^T$$

نلاحظ أن $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ متجه ذاتى للمصفوفة A عندما $\lambda_1=4$.

$$(ii)\ \lambda_2 = 1 \Rightarrow (A_1 - \lambda_2 I)\,\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v}_2 [1\ \ -1\ \ 0]^T$$

حيث $[1 \quad -1]^T$ متجه ذاتى للمصفوفة A عندما $\lambda_2 = 1$

$$(iii)\ \lambda_3 = -1 \Rightarrow (A_1 - \lambda_3 I)v_3 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_3 = (2\ \ -3\ \ 5)$$

وبذلك يكون حل النظام المعطى هو

$$\underline{\bar{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

وحيث ان حل هذا النظام لابد أن يحتوى فقط على ثابتين لختيارين . فان هذا الحل يعطى $x_3 = 5c_3 e^{-t}$ ولكن بافتراضنا $x_3 = e^{-t}$ وبالتالى فإن $c_3 = 1/5$ وبالتالى يكون حل النظام المعطى هو

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 2/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$$

<u>مثال (٣)</u> : حل النظام

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin t \\ 2\cos t \end{bmatrix}$$

الحل ليكن $x_4 = \cos t \ ,\ x_3 = \sin t$ وبالتالى $\dot{x}_4 = -x_3 \ ,\ \dot{x}_3 = x_4$.

ليكن $\underline{\bar{x}} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T$ فيكون لدينا

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = A_1 \underline{x}$$

وتكون القيم الذاتية للمصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ هى $\lambda_2 = 2$ ، $\lambda_2 = -1$ والقيمة الذاتية للمصفوفة $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ هى $\lambda_4 = -i$ ، $\lambda_3 = i$ وتكون المتجهات الذاتية كما يلى

$$\text{(i)}\ \lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underline{v}_{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v}_{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $[1 \quad -1]^T$ هو متجه ذلتى للمصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ عندما $\lambda_1 = -1$

$$\text{(ii)}\ \lambda_2 = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \underline{v}_{-2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v}_{-2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $[1 \quad 2]^T$ هو متجه ذلتى للمصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ عندما $\lambda_2 = 2$

$$\text{(iii)}\ \lambda_3 = i \Rightarrow \begin{bmatrix} -i & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1-i & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -i \end{bmatrix} \underline{v}_{-3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v}_{-3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ -1 \end{bmatrix}$$

وبالتالى

$$\underline{x}=e^{it}\begin{bmatrix}1\\0\\i\\-1\end{bmatrix}=(\cos t+i\sin t)\begin{bmatrix}1\\0\\i\\-1\end{bmatrix}$$

يكون للنظام $\dot{\underline{x}}=A\underline{x}$. المتجهين الذاتيين المناظرين للقمتين الذاتيتين i ، $-i$ هما

$$\underline{v}_3=\begin{bmatrix}\cos t\\0\\-\sin t\\-\cos t\end{bmatrix}\quad,\quad \underline{v}_4=\begin{bmatrix}\sin t\\0\\\cos t\\-\sin t\end{bmatrix}$$

هما حلين مستقلين للنظام $\dot{\underline{x}}=A\underline{x}$ عندما $\lambda=\pm i$

وبالتالى يكون الحل العام للنظام الموسع هو

$$\underline{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=c_1e^{-t}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2e^{2t}\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}\cos t\\0\\-\sin t\\-\cos t\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}\sin t\\0\\\cos t\\-\sin t\end{bmatrix}$$

وهذا يعطى بالمقارنة

$$x_3=-c_3\sin t+c_4\cos t$$

$$x_4=-c_3\cos t-c_4\sin t$$

ولكن $x_3=\sin t \Rightarrow c_3=-1 \;,\; x_4=\cos t \Rightarrow c_4=0$

وبالتالى يكون الحل العام للنظام المعطى

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=c_1e^{-t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+c_2e^{2t}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\cos t\\0\end{bmatrix}$$

<u>حالة خاصة</u> : إذا كانت $\underline{f}(t)=\underline{b}$ حيث $\underline{b}$ متجه ثابت فإن الحل الخاص هو $\underline{x}_p=-A^{-1}\underline{b}$ ويكون الحل العام على الصورة

$$\underline{x} = \underline{x}_h - A^{-1}\underline{b}$$

مثال (٤) : حل النظام

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وتكون القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ هى

$$\lambda_1 = 1, \quad \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 2, \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ويكون حل المعادلة المتجانسة $\underline{\dot{x}} = A\underline{x}$ هو

$$\underline{x}_h = c_1 e^{t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ويكون الحل الخاص هو

$$\underline{x}_p = -A^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالى يكون الحل العام

$$\underline{x} = c_1 e^{t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تمارين

أ – حل النظم التالية

1) $dy/dx = y \ , \ dz/dx = 2y + z$

2) $\frac{dx}{dt} = x - 2y \ , \ dy/dt = 5x + 3y$

3) $(5D+4)y - (2D+1)z = e^{-x}, (D+8)y - 3z = 5e^{-x}, D = \frac{d}{dx}$

4) $\frac{dx}{dt} - y = t, \quad dy/dt + x = 1$

5) $\frac{dx}{dt} + x - y = e^{t}, \quad dy/dt + y - x = 0$

6) $(D-17)y + (2D-8)z = 0, \quad (13-53D)y - 2z = 0$

7) $\frac{d^2x}{dt^2} + 16x - 6\frac{dy}{dt} = 0, \quad 6\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{d^2y}{dt^2} + 18x = 0$

8) $\frac{dx}{dt} = 2y, \quad dy/dt = 2z, \quad dz/dt = 2x$

9) $(D+1)y = z + e^{x} \ , \ (D+1)z = y + e^{x} \quad D = \frac{d}{dx}$

10) $(D^2+5)y - 4z = -36\cos 7x \ , \ y + D^2z = 99\cos 7x \ , \ D = \frac{d}{dx}$

11) $\frac{d^2x}{dt^2} = A - \omega\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \omega\frac{dx}{dt}$, ثابتان ω, A

ب– اوجد حل النظم التالية باستخدام المصفوفات

1- $\dot{x}_1 = 4x_1 + 2x_2$

$\dot{x}_2 = -3x_1 + x_2$

2- $\dot{x}_1 = 4x_1 - 2x_2$

$\dot{x}_2 = x_1 + x_2$

3- $\dot{x}_1 = 3x_1 - 2x_2$

$\dot{x}_2 = 2x_1 - x_2$

4- $\dot{x}_1 = -4x_1 + x_2$

$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2$

5- $\dot{x}_1 = 3x_1 - 2x_2$

$\dot{x}_2 = 17x_1 - 7x_2$

6- $\dot{x}_1 = 3x_1 - 5x_2$

$\dot{x}_2 = 4x_1 - 5x_2$

7- $\dot{x}_1 = 4x_1 - 2x_2$

$\dot{x}_2 = x_1 + x_2$

$x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$

8- $\dot{x}_1 = 3x_1 - 2x_2$

$\dot{x}_2 = 2x_1 - x_2$

$x_1(0) = -1, x_2(0) = 1$

9- $\dot{x}_1 = 2x_1$

$\dot{x}_2 = -3x_2$

10- $\dot{x}_1 = 4x_2$

$\dot{x}_2 = -x_1$

11- $\dot{x}_1 = -x_2$

$\dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2$

12- $\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2$

$\dot{x}_2 = -x_1$

13- $\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2$

$\dot{x}_2 = -x_1 + x_3$

$\dot{x}_3 = x_1 + 3x_2 + x_3$

14- $\dot{x}_1 = 7x_1 + 4x_2 - 4x_3$

$\dot{x}_2 = 4x_1 - 8x_2 - x_3$

$\dot{x}_3 = -4x_1 - x_2 - 8x_3$

15- $\dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3$

$\dot{x}_2 = x_1 + 4x_2 + x_3$

$\dot{x}_3 = -2x_1 - 4x_2 - x_3$

16- $\dot{x}_1 = 3x_1 - x_2$

$\dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 - x_3$

$\dot{x}_3 = -x_3 + 3x_3$

$x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$

$x_3(0) = -1$

17- $\dot{x} = 2x + y$

$\dot{y} = x - 2y$

$\dot{z} = x + y - 5z$

$\dot{u} = 5z$

18- $\dot{x} = 2x - y$

$\dot{y} = x + 2y$

$\dot{z} = x + y - 3z$

$\dot{w} = 3y$

(جـ) حل النظام $\underline{\dot{x}} = A\underline{x} + \underline{b}$ حيث

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & -3 \\ -16 & 4 & 11 \end{bmatrix}, \ \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \ \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(iv) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \ \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

(v) $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \ b = -\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

(د) حل النظام

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1 + 1 , \quad \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 + 3$$

(هـ) حل النظام

(i) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t \\ \cos t \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1.7 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos t \\ e^t \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin t \\ 0 \end{bmatrix}$

الباب العاشر

تطبيقات على المعادلات التفاضلية الآنية من الرتبة الأولى(تطبيقات حيوية)

Applications on simultaneous differential equations

سنحاول التعرف في هذا الباب على كيفية تأثير العقاقير ودورتها في الجسم (Pharmacokinetics)

١٠-١ مقدمة: نتعرض هنا لدراسة تأثير العقاقير ودلالتها على أجهزة الجسم مثل الجهاز الدورى للدم، الأنسجة، الخلايا، بلازما الدم، الحويصلات وغير ذلك.

سنعتبر أن لدينا n من الأوعية، $n=1,2,...$ ويمكن ان نحقن العقاقير في أى وعاء ونتتبعه في الأوعية الأخرى عند الزمن $t=0,T,2T,3T,....$ أو باستمرار.

ليكن $x_i(t)$ كمية العقار في الوعاء i عند الزمن t. سنفترض أن الكمية التى يمكن انتقالها من الوعاء i إلى الوعاء j $(i \neq j)$ في الفترة $(t,t+\Delta t)$ هى $K_{ij}x_i(t)\Delta t+O(\Delta t)^2$ ويسمى K_{ij} معامل الانتقال (transfer) من الوعاء i إلى الوعاء j ويعطى التغير الكلى Δx_j عند الزمن Δt بالكمية الداخلة إلى الوعاء i من الأوعية الأخرى والتى تقل بالكمية الخارجه من الوعاء i إلى الأوعية الأخرى محتوية الوعاء O الذى يرمز إلى خارج النظام الذى يحتوى استهلاك العقاقير. فيكون لدينا

$$\Delta x_i=-\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} K_{ij}x_i\Delta t+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} K_{ji}x_i\Delta t+O(\Delta t)^2 \qquad (1)$$

وعندما $\Delta t \to 0$ نحصل على

$$\frac{dx_i}{dt}=x_i\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} K_{ij}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} K_{ji}x_j \qquad (2)$$

$$=\sum_{j=1}^{n} K_{ji}x_j \quad , \qquad i=1,2,..n \qquad (3)$$

حيث نعرف

$$K_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} K_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots n \qquad (4)$$

ويمكن كتابة ذلك على الصورة

$$\frac{dX}{dt} = KX \qquad (5)$$

حيث

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & \ldots & K_{n1} \\ K_{12} & K_{22} & \ldots & K_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{1n} & K_{2n} & \ldots & K_{nn} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

وإذا كان $X = Be^{\lambda t}$ حيث B مصفوفة عمود فإنه من (5)

$$\lambda Be^{\lambda t} = KBe^{\lambda t} \qquad (7)$$

ومن هنا يمكن تحديد B. إذا كان

$$|K - \lambda I| = 0 \qquad (8)$$

حيث I مصفوفة الوحدة. λ هى قيمة ذاتية للمصفوفة K. ونلاحظ أن جميع العناصر القطرية للمصفوفة K سالبة، وجميع العناصر غير القطرية غير سالبة وأن مجموع عناصر كل عمود أكبر من أو تساوى الصفر. ولهذه المصفوفة تكون الاجزاء الحقيقية للقيم الذاتية دائماً أقل من أو تساوى الصفر، وأن الجزء التخيلى يكون غير صفرى فقط عندما تكون الاجزاء الحقيقية أقل من الصفر. وبالتالى إذا كان $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ هى القيم الذاتية

$$\text{Re}(\lambda_i) \leq 0, \qquad (9)$$

اذا كان فقط $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ فإن $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$.

وإذا حقن العقار (drug) بمعدل ثابت فيمكن تمثيله بمتجه العمود D الذى له مركبات $D_1, D_2, \dots D_n$ فإن (5) تصبح على الصورة

$$dX/dt = KX + D \qquad (10)$$

تمثل المعادلتان (5)، (10) المعادلات الأساسية لتحليل توزيع العقار (3) فى نظام له n من الأوعية.

سنفترض أن كل القيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ للمصفوفة K مختلفة فيمكن ان نكتب

$$K = YAY^{-1} \qquad (11)$$

حيث Y هى مصفوفة $n \times n$ وأعمدتها هى المتجهات الذاتية المناظرة للقيم الذاتية λ_i، A مصفوفة قطرية عناصر قطرها $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ وبذلك تؤول المعادلة (5) إلى

$$\frac{dX}{dt} = YAY^{-1}X \qquad (12)$$

والذى حلها هو

$$X(t) = Ye^{At}Y^{-1}C \qquad (13)$$

حيث C متجه عمود ثابت. ويمكن التحقق من ذلك لأن المعادلة (13) تعطى

$$\frac{dX}{dt} = YAe^{At}Y^{-1}C = YA(Y^{-1}Y)e^{At}Y^{-1}C$$

$$= (YAY^{-1})(Ye^{At}Y^{-1}C) = KX \qquad (14)$$

ويمكن الحصول على المصفوفة C بوضع $t = 0$ فى (13) فنجد أن

$$X(0) = Y\ I\ Y^{-1}C = C \qquad (15)$$

ويكون حل النظام (5) محققا الشرط (15) هو

$$X(t) = Y\ e^{At}\ Y^{-1}X(0) \qquad (16)$$

حيث تمثل $X(0)$ الحقنة الأولية initial injection

١٠-٢ حل نظام ذى تداوى مكرر

Solution of the system for repeated medication

ليكن $X(0)$ تعطى عند 0، T، $2T$، $3T$،.... مباشرة بعد الجرعة الأولى يكون $X(0,0)=X(0)$. وخلال فترة الزمن الأولى T تتغير الجرعة طبقاً للعلاقة (16) وعند الزمن $T-0$، تكون الجرعة هى $Ye^{AT}Y^{-1}X(0)$. وعند الزمن T تعطى جرعة أخرى $X(0)$ وبالتالى يكون لدينا مباشرة بعد الجرعة الثانية

$$X(T+0)=Ye^{AT}Y^{-1}X(0)+X(0) \tag{17}$$

بالمثل مباشرة بعد الجرعة الثالثة

$$X(2T+0)=Ye^{2AT}Y^{-1}X(0)+Ye^{AT}Y^{-1}X(0)+X(0) \tag{18}$$

ومباشرة بعد الجرعة m^{th} يكون لدينا

$$X(\overline{(m-1)}T+0)=Ye^{(m-1)AT}Y^{-1}X(0)+Y(e^{(m-2)AT}Y^{-1}X(0)+...+X(0)$$

$$=Y[e^{(m-1)AT}+e^{(m-2)AT}+...+I]Y^{-1}X(0)$$

$$=Y((e^{mAT}-I)(e^{AT}-I)^{-1})Y^{-1}X(0) \tag{19}$$

إذا كان t يقع بين mT، $(m-1)T$ فنجد أن

$$X(t)=Ye^{AT}Y^{-1}X(0)+Ye^{A(t-T)}Y^{-1}X(0)+...+Ye^{A(t-\overline{m-1}T)}Y^{-1}X(0)$$

$$=Y[e^{AT}+e^{A(t-T)}+..e^{A(t-\overline{m-1}T)}]Y^{-1}X(0)$$

$$=Ye^{A(t-\overline{m-1}T)}(e^{mAT}-I)(e^{AT}-I)^{-1}Y^{-1}X(0) \tag{20}$$

عندما $(m-1)T \le t < mT$.

وكمية متوسط الجرعة خلال الفترات N الأولى تعطى بالمعادلة

$$(\bar{X})_N = \frac{1}{NT}\sum_{n=1}^{N}\int_{(m-1)T}^{mT}[Ye^{A(t-\overline{m-1}T)}(e^{mAT}-I)(e^{AT}-I)^{-1}Y^{-1}X(0)]dt$$

$$= \frac{1}{NT}\sum_{m-1}^{N} YA^{-1}(e^{AT}-I)(e^{mAT}-I)(e^{AT}-I)^{-1}Y^{-1}X(0) \qquad (21)$$

$$= \frac{1}{NT}YA^{-1}(e^{AT}-I)(e^{At}(e^{NAT}-I)(e^{AT}-I)^{-1}-NI] \times (e^{AT}-I)^{-1}Y^{-1}X(0) \qquad (22)$$

والآن

$$e^{NAT} = \begin{bmatrix} e^{N\lambda_1 T} & \dots & 0 \\ \dots & e^{N\lambda_2 T} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & e^{N\lambda_n T} \end{bmatrix} \qquad (23)$$

وحيث أن كل القيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, .. \lambda_n$ حقيقية وسالبه أو صفر أو مركبة ذات أجزاء حقيقية سالبة، فإنه من (20)، (21) عندما $N \to \infty$ تكون القيمة النهائية (limiting value) للمتغير $\bar{X}$ عبارة عن

$$\frac{1}{T}YA^{-1}(e^{AT}-I)(-I)(e^{AT}-I)^{-1}Y^{-1}X(0) = -\frac{1}{T}YA^{-1}Y^{-1}X(0) \qquad (24)$$

ومن (18)، (21) تكون الكمية فى النظام بعد N جرعة هى

$$Y\begin{bmatrix} e^{N\lambda_1 T}-1 & \dots & 0 \\ \dots & e^{N\lambda_2 T}-1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & e^{N\lambda_n T}-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (e^{\lambda_1 T}-1)^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & (e^{\lambda_2 T}-1)^{-1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & (e^{\lambda_n T}-1)^{-1} \end{bmatrix} \times$$

$$\times\ Y^{-1}X(0)$$

$$=Y\begin{bmatrix}(e^{N\lambda_1 T}-1)(e^{\lambda_1 T}-1)^{-1} & 0 & 0\\ 0 & (e^{N\lambda_2 T}-1)(e^{\lambda_2 T}-1)^{-1} & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & (e^{N\lambda_n T}-1)(e^{\lambda_n T}-1)^{-1}\end{bmatrix}\times$$

$$\times Y^{-1}X(0) \qquad (25)$$

وإذا كان جميع القيم الذاتية $\lambda_1,\lambda_2,..\lambda_n$ سالبة ولتكن مثلا $-\gamma_1,-\gamma_2,...-\gamma_n$ على الترتيب فإن عندما $t\to\infty$ وتكون الكمية فى النظام بعد الجرعة مباشرة تقترب من

$$X(\infty)=Y\begin{bmatrix}(1-e^{-\gamma_1 T})^{-1} & 0 & 0\\ 0 & (1-e^{-\gamma_2 T})^{-1} & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & (1-e^{-\gamma_n T})^{-1}\end{bmatrix}Y^{-1}X(0) \qquad (26)$$

وتكون قبل هذه الجرعة مباشرة تقترب من $X(\infty)-X(0)$.

حالة خاصة: إذا كان الحقن بمعدل ثابت يكون لدينا من (10)

$$\frac{dX}{dt}=YAY^{-1}X+D \qquad (27)$$

وهى معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى خطية ويكون عامل المكاملة $Ye^{-At}Y^{-1}$ ويكون حل المعادلة (27) هو

$$Ye^{-At}Y^{-1}X=-Ye^{-At}A^{-1}Y^{-1}D+F \qquad (28)$$

أى أن

$$X(t)=-YA^{-1}Y^{-1}D+(Ye^{-At}Y^{-1})^{-1}F \qquad (29)$$

وللحصول على الثابت F نضع $t=0$ فى (29) فنجد

وبالتالى

$$X(0)=-YA^{-1}Y^{-1}D+F \qquad (30)$$

وعلى ذلك يكون الحل هو

$$X(t) = -YA^{-1}Y^{-1}D + Ye^{At}Y^{-1}(X(0) + YA^{-1}Y^{-1}D)$$

$$= (Ye^{At}Y^{-1} - YIY^{-1})YA^{-1}Y^{-1}D + Ye^{At}Y^{-1}X(0)$$

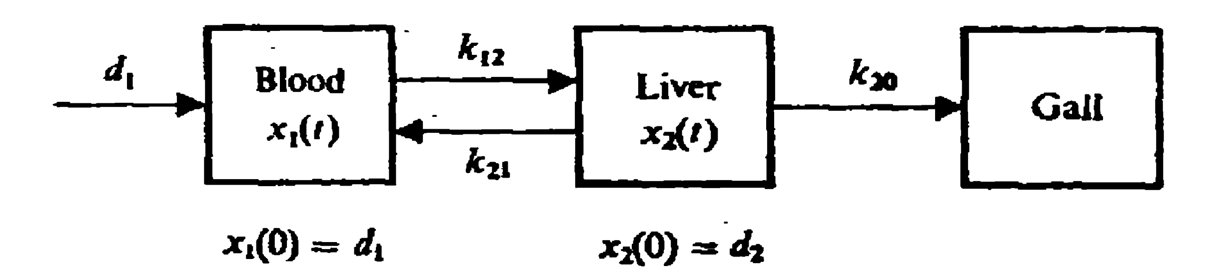
أى

$$X(t) = Y(e^{At} - I)A^{-1}Y^{-1}D + Ye^{At}Y^{-1}X(0) \qquad (31)$$

١٠-٣ بعض الحالات الخاصة

(i) اختبار كبريت البروم (Brom-Sulphalien)

كبريت البروم هو مادة كيميائية تحقن فى مجرى الدم. ومن خلال الدورة فإنه يمتص فى الكبد. وتؤخذ عينات على فترات منتظمة لمعرفة كبريت البروم المترسب (residual). إذا كان الكبد سليماً فبعد 45 دقيقة يكون 5% من كبريت البروم موجودا أما إذا لم يكن الكبد سليماً تماما فإن هذه النسبة ترتفع. وهذا يساعد على تشخيص (diagnostic) حالة الكبد. وفى الحقيقة يمكن أن نقارن منحنى تركيز كبريت البروم لمريض ما مع منحنى لاخر لشخص سليم



وتكون المعادلات التفاضلية الممثلة لذلك الاختبار هى

$$\begin{aligned} x_1' &= -k_{12}x_1(t) + k_{21}x_2(t), \quad & x_1(0) = d_1 \\ x_2' &= k_{12}x_1(t) - (k_{21} + k_{20})x_2(t), \quad & x_2(0) = d_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

ويكون لدينا

$$K = \begin{bmatrix} -k_{12} & k_{21} \\ k_{21} & -k_{21} - k_{20} \end{bmatrix}$$

وتكون القيم الذاتية هى جذور المعادلة

$$(k_{12} + \lambda)(k_{21} + k_{20} + \lambda) - k_{12}k_{21} = 0$$

ومنها نجد أن

$$\lambda_1 = -\gamma_1 = -\frac{1}{2}(k_{12}+k_{21}+k_{20}) - \Delta$$
$$\lambda_2 = -\gamma_2 = -\frac{1}{2}(k_{12}+k_{21}+k_{20}) + \Delta \qquad (2)$$

حيث
$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{4}(k_{12}+k_{21}+k_{20})^2 - k_{12}k_{20}}$$

والقيمتان الذاتيتان سالبتان وحقيقيتان. بينما نجد

$$Y = \begin{bmatrix} -(\lambda_1+k_{20}) & -(\lambda_2+k_{20}) \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$Y^{-1} = \frac{1}{k_{20}(\lambda_1-\lambda_2)}\begin{bmatrix} \lambda_2 & \lambda_2+k_{20} \\ -\lambda_1 & -(\lambda_1+k_{20}) \end{bmatrix} \qquad (4)$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-\gamma_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma_2 t} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

وعلى ذلك فإن

$$Ye^{At}Y^{-1} = \frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}\begin{bmatrix} (\gamma_2-k_{12})e^{-\gamma_1 t}+(k_{12}-\gamma_1)e^{-\gamma_2 t} & k_{21}(e^{-\gamma_1 t}-e^{-\gamma_2 t}) \\ k_{12}(e^{-\gamma_1 t}-e^{-\gamma_2 t}) & (k_{12}-\gamma_1)e^{-\gamma_1 t}+(\gamma_2-k_{21})e^{-\gamma_2 t} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

حيث $\gamma_2-\gamma_1>0$ ، $k_{12}-\gamma_1 \geq 0$ ، $\gamma_2-k_{12} \geq 0$ وباستخدام (4) نحصل على

$$x_1(t) = \frac{d_1}{\gamma_2-\gamma_1}\{(\gamma_2-k_{12})e^{-\gamma_1 t}+(k_{12}-\gamma_1)e^{-\gamma_2 t}\}$$
$$x_2(t) = \frac{d_2}{\gamma_2-\gamma_1}(e^{-\gamma_1 t}-e^{-\gamma_2 t}) \qquad (7)$$

(ii) تكرار الحقن بالبنسلين

Two-compartment system – Repeated Penicillin Application

المعادلات (1-6) تكون محققة فى هذا المثال حيث

Repeated doses d_1 at $t = mT$, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ → Intestine $x_1(t)$ ⇄ (k_{12}, k_{21}) Blood $x_2(t)$ → k_{20}

من البند (1) يكون لدينا

$$X(t) = \begin{bmatrix} -(\lambda_1 + k_{20}) & -(\lambda_2 + k_{20}) \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\gamma_1 (t-\overline{m-1}T)} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma_2 (t-\overline{m-1}T)} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} e^{-m\gamma_1 T} - 1 & 0 \\ 0 & e^{-m\gamma_2 T} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (e^{-\gamma_1 T} - 1)^{-1} & 0 \\ 0 & (e^{-\gamma_2 T} - 1)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\times \frac{1}{k_{20}(\lambda_1 - \lambda_2)} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 + k_{20} \\ -\lambda_1 & -(\lambda_1 + k_{20}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{k_{20}(\lambda_1 - \lambda_2)} \begin{bmatrix} -\lambda_1 + k_{20} & -(\lambda_2 + k_{20}) \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} e^{-\gamma_1 (t-\overline{m-1}T)}(e^{-m\gamma_1 T} - 1)(e^{-\gamma_1 T} - 1)^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma_2 (t-\overline{m-1}T)}(e^{-m\gamma_2 T} - 1)(e^{-\gamma_2 T} - 1)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \lambda_2 & \lambda_2 + k_{20} \\ -\lambda_1 & -(\lambda_1 + k_{20}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

عندما $(m-1)T \le t < mT$

(iii) مرض البول السكرى Diabetes mellitus

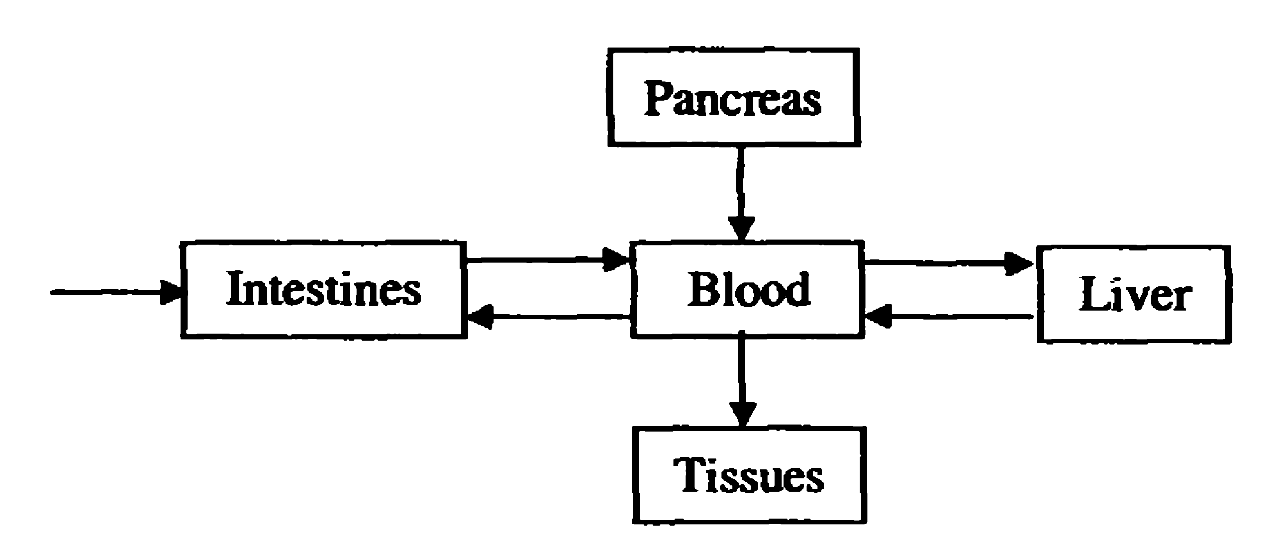
يعين نموذج لمرضى البول السكرى بالاعتبارات التالية:

(i) الخبز الذى يأكله المريض يعطى جلوكوز للجهاز الهضمى ومنه يذهب إلى الدم. والسكر من الدم يمكن أن يذهب إلى الجهاز الهضمى حين سريانه.

(ii) سكر الجلوكوز الزائد يخزن فى الكبد كجلايكوجين (glycogen) (النشا الحيوانى) وعندما يحتاج الدم إلى جلوكوز يمكن أن يستخلصه من الكبد ويعطيه إلى الدم (كوعاء)

(iii) يفرز البنكرياس (Pancreas) الأنسولين إلى الدم. وهذا الأنسولين ضرورى للتمثيل الغذائى فى الأنسجه.

(iv) ويمكن أن يحقن الجلوكوز فى الجهاز الهضمى أو مجرى الدم. كما يحقن الأنسولين فى مجرى الدم.



نعتبر الأن تركيز الجلوكوز والأنسولين وليكن C_g، C_i هما الزيادة فى التركيز (excess of concentration) لكل من الجلوكوز والأنسولين على الترتيب عند الزمن t أعلى من قيم اتزانهما. فيكون لدينا المعادلة التفاضلية.

$$\frac{dC_g}{dt} = -m_1 C_g - m_2 C_i + G(t) \tag{9}$$

$$\frac{dC_i}{dt} = -m_3 C_i - m_4 C_g + I(t) \tag{10}$$

حيث $m_1, m_2, m_3, m_4 > 0$ للاسباب التالية:

(i) إذا وجدت زيادة فى الجلوكوز فإنه يختفى فى الكبد والأنسجه وبالتالى $m_1 > 0$.

(ii) إذا وجدت زيادة فى الانسولين فإنه يساعد فى التمثيل الغذائى للجلوكوز لبعض الأنسجه وبالتالى $m_2 > 0$.

(iii) إذا وجدت زيادة فى الجلوكوز فإن البنكرياس يفرز الانسولين وبالتالى $m_4 > 0$.

(iv) إذا وجدت زيادة فى الانسولين فانها تؤول إلى الاختفاء وبالتالى $m_3 > 0$

ومن (9)، (10) نحصل على

$$\frac{d^2C_g}{dt^2} + 2\alpha\frac{dC_g}{dt} + w_0^2 C_g = S_1(t) \tag{11}$$

$$\frac{d^2C_i}{dt^2} + 2\alpha\frac{dC_i}{dt} + w_0^2 C_i = S_2(t) \tag{12}$$

حيث

$$2\alpha = m_1 + m_3 \tag{13}$$

$$w_0^2 = m_1 m_3 + m_2 m_4 \tag{14}$$

$$S_1(t) = m_3 G - m_2 I + \frac{dG}{dt} \tag{15}$$

$$S_2(t) = m_1 I + m_4 G + \frac{dI}{dt} \tag{16}$$

ومن (11)، (12) نحصل على

$$C_g = e^{-\alpha t}(A_1 \cos wt + A_2 \sin wt) +$$

$$+\frac{e^{-\alpha t}}{w}[\sin wt \int_0^t e^{\alpha u} \cos(wu) S_1(u) du - \cos wt \int_0^t e^{\alpha u} \sin(wu) S_1(u) du] \tag{17}$$

$$C_i = e^{-\alpha t}(A_3 \cos wt + A_4 \sin wt) +$$

$$+\frac{e^{-\alpha t}}{w}[\sin wt \int_0^t e^{-\alpha u} \cos(wu) S_2(u) du - \cos wt \int_0^t e^{-\alpha u} \sin(wu) S_2(u) du]$$

(18)

حيث

$$w^2 = w_0^2 - \alpha^2 \qquad (19)$$

ملاحظات:

(i) إذا كان $S_1(t) = B\delta(t)$، $S_2(t) = 0$ فإنه من (17)، (18) نحصل على

$$C_g = e^{-\alpha t}(A_1 \cos wt + A_2 \sin wt) + \frac{e^{-\alpha t}}{w} B \sin wt$$

$$C_i = e^{-\alpha t}(A_3 \cos wt + A_4 \sin wt)$$

(ii) إذا كان عند $t = 0$ فإن $C_g = 0$ وبالتالى $A_1 = 0$ وبتكامل (11) نحصل على

$$\left(\frac{dC_g}{dt}\right)_0 + 2\alpha (C_g)_0 + w_0^2 \int_0^\infty C_g dt = B \int_0^\infty \delta(t) dt$$

وبالتالى

$$w_0^2 \left(A_2 + \frac{B}{w}\right) \int_0^\infty e^{-\alpha t} \sin wt dt = B$$

والتى تعطى $A_2 = 0$ وبالتالى يكون لدينا

$$C_g = (B/w) e^{-\alpha t} \sin wt$$

تمارين

١- اوجد للقيم الذاتية للمصفوفات

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

وهل هذه المصفوفات تحقق العلاقة (9).

٢- اثبت أن حل النظام $\frac{dX}{dt} = KX + D$ ، $X(0) = -K^{-1}D + d$ حيث d هى متجه الجرعة الابتدائية، هو

$$X(t) = Ye^{At}Y^{-1}d - YA^{-1}Y^{-1}D$$

٣- اثبت أن العلاقة (10) تعطى

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dX_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{ji} X_j + \sum_{i=1}^{n} D_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} k_{ji} \right) X_j + \sum_{i=1}^{n} D_i$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} k_{ji} X_j + \sum_{i=1}^{n} D_i$$

ليكن $k_{10} > 0$ ، $k_{20} > 0$ عندما $i \neq j$. اثبت أنه فى حالة السكون

$$\hat{X}_1 = \sum_{i=1}^{n} D_i / k_{10}$$

٤- فى اختبار قدرة تحمل الجلوكوز (glucose tolerance test) فإن الكبد يعمل كوعاء عميق يمد الدم بالجلوكوز بمعدل ثابت D_1 . إذا كان X_1 هى كمية الجلوكوز فى الدم اثبت أن

$$X_1'(t) = -k_{10} X_1(t) + D_1 = -k_{10}(X_1 - \hat{X}_1), X_1(0) = \hat{X}_1 + D_1$$

ثم حل هذه المعادلة

٥- بافتراض أن الدواء يختفي من مجرى الدم طبقا للقانون $\frac{dx}{dt}=-kx^2$

وان جرعات من هذا الدواء تعطى فى الاوقات 0، T، $2T$،... فإذا كان x_n هى كمية الدواء فى مجرى الدم بعد الجرعة n^{th} مباشرة. اثبت أن المتتابعة $\{x_n\}$ متتابعة مطردة التزايد. وماهى نهايتها عندما $n\to\infty$. اوجد متوسط كمية الدواء فى النظام عند زمن الفترة $(0,nT)$. ثم اوجد نهاية متوسط هذه الكمية عندما $t\to\infty$.

الباب الحادى عشر

استخدام المتسلسلات فى حل المعادلات التفاضلية

Solutions in series

١١-١ مقدمة: قد يحدث أحياناً أن نعطى معادلات تفاضلية ولا يمكن حلها بالطرق السابقة أى نفشل لنعبر عن الحل بدلالة دوال أولية مثل كثيرات الحدود، أو دوال كسرية (جذرية) أو دوال أسية ولوغاريتمية ومثلثية وزائدية. وفى هذه الحالة يجب أن نجد متسلسلة تقاربية مرتبة فى قوى المتغير المستقل والذى يعبر بالتقريب عن قيمة المتغير التابع. ويسمى الحل فى صورة متسلسلة لا نهائية (التكامل فى متسلسلات "Integration in series")

وفى هذا الباب سنناقش بعض الطرق للحصول على حل فى صورة متسلسلة لا نهائية لمعادلات تفاضلية خطية من الرتبة الثانية.

١١-٢: تعريفات أساسية:

أ) متسلسلة القوى: تسمى المتسلسلة اللانهائية التى على الصورة

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots \qquad (1)$$

بمتسلسلة قوى فى $(x - x_0)$

وعلى درجة الخصوص، متسلسلة قوى فى x هى متسلسلة لانهائية

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots \qquad (2)$$

حيث $x_0 = 0$

ومثال ذلك، الدالة الأسية e^x لها متسلسلة قوى

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots$$

تتقارب المتسلسلة (1) (مطلقا) لكل $|x| < R$ حيث

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n-1}}\right| , \tag{٣}$$

بشرط وجود النهاية

تسمى R بنصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى (1). كما تسمى الفترة $(-R,R)$ بفترة التقارب.

عندما $R=\infty$ للمتسلسلة (2) فإن فترة التقارب تكون $(-\infty,\infty)$ أى خط الأعداد (real line) وفيما يلى سنستخدم النتائج التالية

(i) تمثل متسلسلة القوى دالة متصلة داخل فترة تقاربها.

(ii) يمكن اشتقاق متسلسلة القوى حدا حدا داخل فترة تقاربها.

(ب) الدالة التحليلية: تسمى الدالة $f(x)$ المعرفة على فترة تحتوى النقطة $x=x_0$ بالدالة التحليلية عند x_0 إذا كانت متسلسلة تايلور لها

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0) \tag{4}$$

تتقارب إلى $f(x)$ لجميع قيم x فى فترة تقارب المتسلسلة (4). وبالتالى، نجد أن جميع كثيرات الحدود، e^x ، $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\sinh x$ ، $\cosh x$ كلها دوال تحليلية. والدالة الكسرية (rational) تكون تحليلية ماعدا عند قيم x التى يكون فيها المقام صفراً. ومثال ذلك الدالة الكسرية على الصورة $x/(x^2-3x+2)$ تكون تحليلية فى كل مكان ما عدا عند $x=1$ ، $x=2$.

١١-٣ النقاط العادية والشاذة:

تسمى النقطة $x=x_0$ بنقطة عادية (ordinary) للمعادلة

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{1}$$

إذا كان كل من $P(x)$ ، $Q(x)$ دالة تحليلية عند $x=x_0$.

إذا كانت $x=x_0$ ليست بنقطة عادية للمعادلة التفاضلية (1) فإنها تسمى بنقطة شاذه (singular) للمعادلة التفاضلية (1). يوجد نوعان من النقاط الشاذه:

(i) نقطة شاذه منتظمة ، إذا كانت النهايتان

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)P(x)\,, \qquad \lim_{x\to 0}(x-x_0)^2 Q(x)$$

موجودتان أى أن كل من $(x-x_0)P(x)$ ، $(x-x_0)^2 Q(x)$ دالة تحليلية للمعادلة (1).

(ii) نقطة شاذه غير منتظمة إذا كانت الدالتان P، Q لاتحققان الشروط السابقة. ونوضح ذلك بالامثلة التالية

مثال (١): حدد ما إذا كانت $x=0$ نقطة عادية أو نقطة شاذة منتظمة للمعادلة التفاضلية

$$2x^2y''+7x(x+1)y'-3y=0$$

الحل: بالقسمة على $2x^2$ تكون المعادلة على الصورة

$$y''+\frac{7x(x+1)}{2x^2}y'-\frac{3}{2x^2}y=0$$

حيث $P=\dfrac{7x(x+1)}{2x^2}$ ، $Q=\dfrac{-3}{2x^2}$

وحيث أن P، Q غير معرفتين عند $x=0$ وبالتالى فهما ليستا تحليليتين. وأيضاً

$$\lim_{x\to\infty}(x-0)P(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x.7x(x+1)}{2x^2}=7/2$$

$$\lim(x-0)^2Q(x)=\lim_{x\to 0}x^2.\frac{3}{2x^2}=3/2$$

موجودتان فإن النقطة $x=0$ نقطة شاذه منتظمة.

مثال (٢): اثبت أن $x=0, x=-1$ نقطتان شاذتان للمعادلة

$$x^2(x+1)^2y''+(x^2-1)y'+2y=0$$

حيث الأولى نقطة شاذه غير منتظمة والثانية منتظمة.

الحل: بالقسمة على $x^2(x+1)^2$ نحصل على

$$y''+\frac{x^2-1}{x^2(x+1)}y'+\frac{2}{x^2(x+1)^2}y=0$$

وعليه يكون

$$P(x)=\frac{(x-1)}{x^2(x+1)} \quad , \quad Q(x)=\frac{2}{x^2(x+1)^2}$$

وحيث أن كل من $P(x)$، $Q(x)$ غير معرفتين عند $x=0$، $x=-1$ وبالتالى ليستا تحليليتين عند $x=0$، $x=-1$ وبالتالى فان كل من $x=0$، $x=-1$ نقطة شاذه.

وأيضاً حيث أن

$$\lim_{x\to 0}(x-0)P(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(x-0)(x-1)}{x^2(x+1)}=\frac{x-1}{x(x+1)},$$

غير موجودة عند $x=0$ وعلى ذلك نرى أن $P(x)$ ليست تحليلية عند $x=0$ وبذلك تكون $x=0$ نقطة شاذه غير منتظمة. وبينما

$$\lim_{x\to -1}(x+1)P(x)=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)}{x^2}=-2 \qquad \text{(موجودة)}$$

$$\lim_{x\to -1}(x+1)^2Q(x)=\lim_{x\to -1}\frac{2}{x^2}=2 \qquad \text{(موجودة)}$$

وعليه فإن $x=-1$ نقطة شاذه منتظمة.

١١-٤ الحل بمتسلسلة فى قوى $(x-x_0)$ حيث x_0 نقطة عاديه.

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \qquad (1)$$

إذا كانت $x=x_0$ نقطة عادية للمعادلة (1) فإن (1) لها حلين غير صفريين مستقلين خطياً فى صورة متسلسلة قوى على الصورة

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^n \qquad (2)$$

وتتقارب هاتان المتسلسلتان في فترة التقارب $|x-x_0|<R$ (حيث $R>0$ هو نصف قطر التقارب للمتسلسلة (2) حول x_0). وللحصول على المعاملات C_i في (2) نأخذ

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^n \qquad (3)$$

باشتقاق (3) مرتين على التوالى ، فإن من (3) نحصل على

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} nC_n(x-x_0)^{n-1} \ , \ y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n(x-x_0)^{n-2} \qquad (4)$$

بوضع قيم y ، y' ، y'' في (1) نحصل على معادلة على الصورة

$$A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+...+A_n(x-x_0)^n+...=0 \qquad (5)$$

حيث أن المعاملات $A_0,A_1,A_2,...$ هي دوال في $C_0,C_1,C_2,...$.

وحيث أن (5) متطابقة، فإن جميع المعاملات $A_0,A_1,A_2,...$ في (5) يجب أن تكون صفراً أى أن

$$A_0=0 \ , \ A_1=0 \ , \ A_2=0 \ , \ ... \ A_n=0 \qquad (6)$$

وبحل (6) نحصل على معاملات المتسلسلة (3) بدلالة C_0 ، C_1 وبتعويض هذه المعاملات في (3) نحصل على الحل في صورة المتسلسلة المطلوبة للمعادلة (1) في قوى $(x-x_0)$. والمثال التالى يوضح الطريقة.

مثال (١): أوجد الحل في صورة متسلسلة قوى للمعادلة

$$(x^2+1)y''+xy'-xy=0$$

في قوى x (أى حول $x=0$)

الحل: لدينا

$$(x^2+1)y''+xy'-xy=0 \qquad (1)$$

بالقسمة على (x^2+1) محصل على

$$y'' + \frac{x}{x^2+1} y' - \frac{x}{x^2+1} y = 0 \tag{2}$$

حيث

$$P = \frac{x}{x^2+1} \quad , \quad Q = \frac{-x}{x^2+1}$$

ومن ذلك ترى أن كل من P ، Q تحليلية حول $x = 0$ وبالتالى فإن $x = 0$ نقطة عادية. ولحل (1) نفترض المتسلسلة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots \tag{3}$$

باشتقاق (3) مرتين بالنسبة إلى x نجد أن

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} \ , \ y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} \tag{4}$$

بتعويض y ، y' ، y'' فى (1) نحصل على

$$(x^2+1)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^{n-1} - x\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

أو

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)C_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = 0$$

أو

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{n(n-1)C_n + (n+2)(n+1)C_{n+2} + nC_n - C_{n-1}\}x^n = 0 \tag{5}$$

وحيث أن (5) متطابقة، وبمساواة معاملات قوى x المختلفة بالصفر نحصل على

$$2C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \tag{6}$$

$$6C_3 + C_1 - C_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_3 = (C_0 - C_1)/6 \tag{7}$$

لكل $n \geq 2$ ، $n(n-1)C_n + (n+2)(n+1)C_{n+2} + nC_n - C_{n-1} = 0,$

أى أن

$$C_{n+2} = \frac{C_{n-1} - n^2 C_n}{(n+1)(n+2)} \quad , \qquad n \geq 2 \text{ لكل} \tag{8}$$

تسمى العلاقة (8) بالعلاقة التكرارية (الرجعية) (recurrence) بوضع $n = 2$ فإنه (8) نجد أن

$$C_4 = \frac{1}{12}C_1 \ , \qquad C_2 = 0 \qquad \text{حيث} \tag{9}$$

بوضع $n = 3$ فى (8) نجد أن

$$C_5 = \frac{-9C_3}{20} = \frac{-9}{20}\left(\frac{C_0 - C_1}{6}\right) = \frac{-3}{40}(C_0 - C_1) \tag{10}$$

بوضع $C_2, C_3, C_4, C_5, \ldots$ فى (3) نحصل على

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + C_5 x^5 + \ldots$$

أى

$$y = C_0 + C_1 x + \frac{1}{6}(C_0 - C_1)x^3 + \frac{1}{12}C_1 x^4 - \frac{3}{40}(C_0 - C_1)x^5 + \ldots$$

أى

$$y = C_0\left(1 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + \ldots\right) + C_1\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{40}x^5 \ldots\right)$$

وهو الحل المطلوب حول $x = 0$ حيث C_1 , C_0 ثابتان إختياريان.

مثال (٢): أوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' + (x-3)y' + y = 0$$

حول $x = 2$ (أى فى قوى $(x-2)$)

الحل: بالمقارنة بالمعادلة المعطاه نجد أن $P(x)=x-3$ ، $Q=1$ وحيث أن كل من $P(x)$ ، $Q(x)$ تحليليتان عند $x=2$ وبالتالى $x=2$ نقطة عادية. لايجاد الحل حول $x=2$ ، فإننا نفترض الحل على صورة متسلسلة فى قوى $(x-2)$ على الصورة

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-2)^n = C_0+C_1(x-2)+C_2(x-2)^2+C_3(x-2)^3+\dots \quad (1)$$

باشتقاق (1) مرتين بالنسبة إلى x، نحصل على

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} nC_n(x-2)^{n-1}, y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n(x-2)^{n-2} \qquad (2)$$

بالتعويض y قيم y' ، y'' فى المعادلة المعطاة نحصل على

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n(x-2)^{n-2}+(x-3)\sum_{n=1}^{\infty} nC_n(x-2)^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-2)^n=0$$

أى

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n(x-2)^{n-2}+[(x-2)-1]\sum_{n=1}^{\infty} nC_n(x-2)^{n-1}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-2)^n=0$$

أو

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n(x-2)^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty} nC_n(x-2)^n$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty} nC_n(x-2)^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-2)^n=0$$

أى أن

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)C_{n+2}(x-2)^n+\sum_{n=1}^{\infty} nC_n(x-2)^n$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)C_{n+1}(x-2)^n+\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-2)^n=0$$

أو

$$(2C_2 - C_1 + C_0) + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)C_{n+2} + nC_n - \\ -(n+1)C_{n+1} + C_n](x-2)^n = 0 \tag{3}$$

وهذه متطابقة. وبمساواة معاملات قوى $(x-2)$ المختلفة بالصفر، نحصل على

$$2C_2 - C_1 + C_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = (C_1 - C_0)/2 \tag{4}$$

$$(n+2)(n+1)C_{n+2} + (n+1)C_n - (n+1)C_{n+1} = 0 \ , \ n \geq 1$$

أى

$$C_{n+2} = (C_{n+1} - C_n)/(n+2) \quad , \quad n \geq 1 \tag{5}$$

بوضع $n = 1,2,3,...$ فى (5) واستخدام (4) نحصل على

$$C_3 = \frac{C_2 - C_1}{3} = \frac{1}{3}\left[\frac{C_1 - C_0}{2} - C_1\right] = -\frac{C_0 + C_1}{6} \tag{6}$$

$$C_4 = \frac{C_3 - C_2}{4} = \frac{1}{4}\left[-\frac{C_0 + C_1}{6} - \frac{C_1 - C_0}{2}\right] = \frac{1}{12}C_0 - \frac{1}{6}C_1 \tag{7}$$

وبالتعويض عن هذه القيم فى (1) نحصل

$$y = C_0 + C_1(x-2) + \left(\frac{C_1 - C_0}{2}\right)(x-2)^2 - \left(\frac{C_0 + C_1}{6}\right)(x-2)^3 \\ + \left(\frac{1}{12}C_0 - \frac{1}{6}C_1\right)(x-2)^4 + ...$$

أو

$$y = C_0[1 - \frac{1}{2}(x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^3 - \frac{1}{12}(x-2)^4 + ...] \\ + C_1[(x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^5 - \frac{1}{6}(x-2)^4 + ...]$$

ملحوظة: يمكن حل هذا المثال بنقل نقطة الأصل إلى $x = 2$.

مثال (٢): أوجد متسلسلة القوى للحل لمسألة القيمة الابتدائية

$$(x^2-1)y''+3xy'+xy=0,\quad y(2)=4,\quad y'(2)=6 \qquad (1)$$

الحل: بالقسمة على (x^2-1) نحصل على

$$y''+\frac{3x}{x^2-1}y'+\frac{x}{x^2-1}y=0 \qquad (2)$$

بالمقارنة مع $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ نجد أن

$$P=\frac{3x}{x^2-1}\quad ,\quad Q=\frac{x}{x^2-1}$$

وحيث أن كل من P ، Q تحليلية عند $x=2$ وبالتالى فإن $x=2$ نقطة عادية للمعادلة (1).

وحيث أن القيم الأبتدائية وصفت عند $x=2$ وبما أن $x=2$ نقطة عادية ، فإننا نوجد الحل المطلوب حول $x=2$ أى فى قوى $(x-2)$ ليكن

$$y=C_0+C_1(x-2)+C_2(x-2)^2+C_3\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-2)^n \qquad (3)$$

بنقل نقطة الأصل إلى $x=2$ بكتابة $t=x-2$ وبالتالى $x=t+2$ وعلى ذلك

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=d^2y/dt^2 \qquad (4)$$

باستخدام (4) فإن (1) تؤول إلى

$$[(t+2)^2-1]\frac{d^2y}{dt^2}+3(t+2)\frac{dy}{dt}+(t+2)y=0 \qquad (5)$$

أو

$$(t^2+4t+3)\frac{d^2y}{dt^2}+(3t+6)\frac{dy}{dt}+(t+2)y=0$$

وعلى ذلك فإن (3) تختزل إلى

$$y = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n \tag{6}$$

باشتقاق (6) مرتين بالنسبة إلى t نحصل على

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n t^{n-1} \quad , \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n t^{n-2} \tag{7}$$

باستخدم (6)، (7) فإن (5) تختزل إلى

$$(t^2 + 4t + 3)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n t^{n-2} + (3t+6)\sum_{n=1}^{\infty} nC_n t^{n-1} + (t+2)\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n = 0$$

أى

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n t^n + \sum_{n=2}^{\infty} 4n(n-1)C_n t^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} 3n(n-1)C_n t^{n-2}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} 3nC_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} 6nC_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2C_n t^n = 0$$

أو

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} 4(n+1)nC_{n+1} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+2)(n+1)C_{n+2} t^n$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} 3nC_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6(n+1)C_{n+1} t^n + \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2C_n t^n = 0$$

أو

$$(6C_2 + 6C_1 + 2C_0) + (8C_2 + 18C_3 + 3C_1 + 12C_2 + C_0 + 2C_1)t$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)C_n + 4n(n+1)C_{n+1} + 3(n+1)(n+2)C_{n+2} +$$

$$+3nC_n + 6(n+1)C_{n+1} + C_{n-1} + 2C_n]t^n = 0$$

أو

$$2(3C_2+3C_1+C_0)+(18C_3+20C_2+5C_1+C_0)t+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}[3(n+1)(n+2)C_{n+2}+2(2n+3)(n+1)C_{n+1}+$$

$$+(n^2+2n+2)C_n+C_{n-1}]t^n=0 \qquad (8)$$

ومن (3) نحصل على

$$y'=C_1+2C_2(x-2)+3C_3(x-2)^2+... \qquad (9)$$

بوضع $x=2$ فى (3)، (9) واستخدام الشروط الابتدائية $y=4$ ، $y'=6$ نحصل على $C_0=4$ ، $C_1=6$ وبالتالى فإن (8) تؤول إلى

$$2(3C_2+22)+(18C_3+20C_2+34)t+\sum_{n=2}[3(n+1)(n+2)C_{n+2}$$

$$+2(2n+3)(n+1)C_{n+1}+(n^2+2n+2)C_n+C_{n-1}]t^n=0$$

وهى متطابقة فى t وبمساواة معاملات قوى t المختلفة بالصفر نحصل على

$$2(3C_2+22)=0 \quad \Rightarrow \quad C_2=-22/3 \qquad (10)$$

$$18C_3+20C_2+34=0 \quad \Rightarrow \quad 18C_3-20\left(\frac{22}{3}\right)+34=0 \quad \Rightarrow$$

$$18C_3=\frac{440}{3}-34 \quad \Rightarrow \quad C_3=169/27 \qquad (11)$$

وكذلك

$$3(n+1)(n+2)C_{n+2}+2(2n+3)(n+1)C_{n+1}+$$

$$+(n^2+2n+2)C_n+C_{n-1}=0\ ,\quad n\geq 2 \qquad (12)$$

بوضع $n = 2$ فى (12) نحصل على

$$36C_4 + 42C_3 + 10C_2 + C_1 = 0$$

$$\therefore 36C_4 + 42\left(\frac{169}{27}\right) + 10\left(\frac{-22}{3}\right) + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_4 = 344/81$$

وبتعويض هذه القيم فى (3) يكون الحل المطلوب

$$y = 4 + 6(x-2) - \frac{22}{3}(x-2)^2 + \left(\frac{169}{27}\right)(x-2)^3 + \left(\frac{344}{81}\right)(x-2)^4 + \dots$$

٥-١١ طريقة فروبنيوس (Frobenius)

إذا كانت $x = x_0$ نقطة شاذه منتظمة. فإننا نستخدم طريقة فروبنيوس لايجاد الحل فى صورة متسلسلة قوى حول $x = x_0$. ويمكن نقل نقطة الأصل إلى $x = x_0$ كما وضحنا ذلك فى المثال السابق. وبدون فقد العمومية سنأخذ $x_0 = 0$.

إذا كانت $x = 0$ نقطة شاذه غير منتظمة للمعادلة المعطاة فإن مناقشة ذلك يكون خارج نطاق هذا الكتاب. والآن سوف نناقش طريقة فربنيوس:

ليكن لدينا معادلة تفاضلية على الصورة

$$y'' + \frac{F(x)}{x}y_1 + \frac{G(x)}{x^2}y = 0 \qquad (1)$$

حيث كل من $F(x)$ ، $G(x)$ تحليلية عند $x = 0$. تسمى الطريقة التالية لحل المعادلة (1) بطريقة فروبنيوس. نفترض حل مقترح

$$y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m = x^r (C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots), \ \ C_0 \neq 0 \qquad (2)$$

اشتقاق (2) مرتين بالنسبة إلى x نحصل على

$$y' = rC_0 x^{r-1} + (r+1)C_1 x^r + \dots = x^{r-1}[rC_0 + (r+1)C_1 x + \dots]$$

$$y'' = r(r-1)C_0 x^{r-2} + r(r+1)C_1 x^{r-1} + \dots = x^{r-2}[r(r-1)C_0 + (r+1)rC_1 x + \dots]$$

وحيث أن كل من $F(x)$ ، $G(x)$ داله تحليلية عند $x=0$ فيمكن أن نكتب

$$F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots,\quad G(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\dots$$

وبوضع قيم y ، y' ، y'' ، $F(x)$ ، $G(x)$ في (1) ثم ضرب الطرفين في x^2 فنحصل على

$$x^r[r(r-1)C_0+\dots]+(a_0+a_1x+\dots)x^r(rC_0+\dots)+$$

$$+(b_0+b_1x+\dots)x^r(C_0+C_1x+C_2x^2+\dots)=0 \qquad (3)$$

وحيث أن (3) متطابقة، يمكن أن نساوى معاملات قوى x المختلفة بالصفر وهذا يعطى نظام من المعاملات تحتوى معاملات C_m مجهولة. وأقل قوة هى x^r وتكون المعادلة المناظرة هى

$$[r(r-1)+a_0r+b_0]C_0=0$$

وحيث $C_0\neq 0$ إفتراضاً فإن

$$r^2+(a_0-1)r+b_0=0 \qquad (4)$$

وهى معادلة تربيعية تسمى بالمعادلة الدليلية indicial equation للمعادلة (1). وسوف نرى أن هذه الطريقة تؤدى إلى نظام أساسى من الحلول، أحد هذه الحلول يكون دائما على الصورة (2) ولكن صورة الحل الآخر يكون لدينا ثلاث احتمالات مختلفة طبقاً للحالات التالية.

الحالة الأولى: جذرا المعادلة الدليلية (4) مختلفين والفرق بينهما عدد كسرى.

ليكن r_1 ، r_2 جذرى المعادلة (4). نعوض $r=r_1$ فى نظام المعادلات المشار اليه سابقاً لتحصل على حل

$$u(x)=x^{r_1}(C_0+C_1x+C_2x^2+\dots)$$

بالمثل بالنسبة إلى الجذر الثانى $r=r_2$ فنحصل على الحل الثانى

$$v(x)=x^{r_2}(C'_0+C'_1x+\dots)$$

حيث $C'_0,C'_1,\dots$ قيم جديدة للمعاملات طبقاً للجذر $r=r_2$.

وحيث أن $r_1 - r_2$ ليس عددا صحيحا وأن u/v ليس عدداً ثابتاً وبذلك يكون u, v حلين مستقلين للمعادلة (1) ويكون الحل العام يكون $y = au + bv$ حيث a, b ثابتان إختياريان.

الحالة الثانية: الجذران متساويان

يكون للمعادلة الدليلية جذر مكرر r إذا كان

$$(a_0 - 1)^2 - 4b_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1 - a_0}{2}$$

نحصل على المعاملات $C_1, C_2, ...$ على التوالى من نظام المعاملات الخاص بها.

ونحصل على الحل الأول

$$u(x) = x^r (C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + ...) \qquad (6)$$

حيث سنكتب $r = (1 - a_0)/2$ فيما بعد.

لتعيين الحل الثانى نستخدم طريقة تغيير البارامترات أى نستبدل الثابت C فى الحل Cu بالدالة $w(x)$ يمكن تعينيها بحيث أن

$$v(x) = u(x) w(x) \qquad (7)$$

يكون حلا للمعادلة (1). باشتقاق (7)، نحصل على

$$v' = u'w + uw' \, , \; v'' = u''w + 2u'w' + uw'' \qquad (8)$$

وحيث أن $v(x)$ حل للمعادلة (1) وبالتعويض نحصل على

$$x^2 v'' + F(x) x v' + G(x) v = 0 \qquad (9)$$

بوضع قيم v، v'، v'' من (7)، (8) فى (9) نحصل على

$$x^2 (u''w + 2u'v' + uw'') + xF(x)[u'w + uw'] + G(x) uw = 0$$

أى

$$[x^2 u'' + F(x) x u' + G(x) u] w + x^2 (2u'w' + uw'') + xF(x) uw' = 0$$

وحيث أن u حل للمعادلة (1) ينتج أن

$$x^2u'' + xF(x)u' + G(x)u = 0$$

وبالتالى نجد أن

$$x^2[2u'w' + uw''] + xF(x)uw' = 0$$

بالقسمة على x^2u وبوضع قيمة $F(x)$، نجد أن

$$w'' + \left[2\frac{u'}{u} + \frac{a}{x} + \ldots\right]w' = 0 \qquad (10)$$

وفيما يلى سنكتب نقاط لتمثيل حدود ثابته أو تحتوى قوى x الموجبة. ومن (6) نحصل على

$$\frac{u'}{u} = \frac{x^{r-1}[rC_0 + (r+1)C_1x + \ldots]}{x^r[C_0 + C_1x + \ldots]} = \frac{r}{x} + \ldots.$$

وبالتالى تصبح (10)

$$w'' + \left(\frac{2r + a_0}{x} + \ldots\right)w' = 0 \qquad (11)$$

ومن (5)، $2r + a_0 = 1$ ولذلك تأخذ المعادلة الأخيرة الصورة

$$w'' + \left(\frac{1}{x} + \ldots\right)w' = 0 \qquad \text{أو} \qquad \frac{w''}{w'} = \frac{1}{x} + \ldots$$

وبالتكامل نحصل على

$$\ln w' = -\ln x + \ldots \quad \Rightarrow \quad w' = \frac{1}{x}e^{(\ldots)}$$

وبفك الدالة الأسية فى قوى x والتكامل مرة أخرى، فإننا نحصل على تعبير للدالة w دائماً فى الصورة

$$w = \ln x + K_1x + K_2x^2 + \ldots$$

وبوضع هذه القيمة فى (7) نحصل على الحل الثانى المستقل $v(x)$ ويكون الحل العام $y = au + bv$.

الحالة الثالثة: الفرق بين الجذرين عدد صحيح:

ليكن r_1 ، r_2 هما جذرى المعادلة الدليلية ويختلفان بعدد صحيح. وليكن $r_1 = r$ ، $r_2 = r - p$ حيث p عدد صحيح موجب ويكون كما سبق أحد الحلول

$$u(x) = x^{r_1}(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots)$$

مناظراً للجذر r_1. وبينما التعامل مع الجذر r_2 قد يكون من غير الممكن تعيين الحل الآخر المستقل $v(x)$ كما فى الحالة الأولى. وفى مثل هذه الحالات نستخدم الطريقة كما فى الحالة الثانية.

وعلى ذلك كما سبق نحصل أولا على (11). ومن (5) يكون $r_1 + r_2 = -(a_0 - 1)$ (باستخدام نظرية المعادلات) وحيث أن $r_1 = r$ ، $r_2 = r - p$ فأن هذا يعطى $2r + a_0 = p + 1$ وبالتالى تصبح (11)

$$\frac{w''}{w'} = -\left(\frac{p+1}{x} + \ldots\right)$$

وبالتكامل

$$\ln w' = -(p+1)\ln x + \ldots \quad \Rightarrow \quad w' = x^{-(p+1)} e^{(\ldots)}$$

وبفك الدالة الأسية والتبسيط، نحصل على :

$$w' = \frac{1}{x^{p+1}} + \frac{K_1}{x^p} + \ldots \frac{K_p}{x} + K_{p+1} + K_{p+2} x + \ldots$$

وبالتكامل مرة اخرى نحصل على

$$w = \frac{-1}{p x^p} - \ldots + K_p \ln x + K_{p+1} x + \ldots$$

وبوضع هذه القيمة فى (7) نحصل على الحل الثانى $v(x)$ ويكون الحل العام $y = au + bv$.

١١-٥-١ خطوات الحل بطريقة فروبنيوس:

نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية

$$f(x)y''+g(x)y'+r(x)y=0 \qquad (1)$$

(أ) نفترض الحل المقترح للمعادلة (1) على الصورة

$$y=x^K\sum C_m x^m = x^K(C_0+C_1x+C_2x^2+...) \qquad (2)$$

أى أن

$$y=\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+K}, C_0\neq 0 \qquad (3)$$

(ب) نشتق (3) مرتين ونحصل على

$$y'=\sum_{m=0}^{\infty} C_m(m+K)x^{m+K-1}, y''\sum_{m=0}^{\infty} C_m(m+K)(m+K-1)x^{m+K-2} \qquad (4)$$

باستخدام (3)، (4) فإن (1) تؤول إلى متطابقة.

(حـ) نساوى بالصفر معامل أقل قوى x فى (ii) ونحصل على معادلة تربيعية فى K والتى تسمى بالمعادلة الدليلية

(د) نحل المعادلة الدليلية ويكون لدينا الحالات التالية:

(i) جذرا المعادلة الدليلية غير متساوين والفرق بينهما عدد كسرى.

(ii) جذرا المعادلة الدليلية غير متساويين والفرق بينهما عدد صحيح ويجعل معاملات الحل غير معينة (indeterminate)

(iii) جذرا المعادلة الدليلية مختلفين والفرق بينهما عدد صحيح يجعل المعاملات لانهائية.

(iv) جذرا المعادلة الدليلية متساويين.

(هـ) نساوى بالصفر معامل القوى (x^{k+m} أو x^{k+m-1} مثلا التى يمكن أن تكون أقل قوى x) فى المتطابقة فى (ب) وتسمى المعادلة التى حصلنا عليها بالعلاقة الرجعية أو التكرارية لأنها تربط المعاملات C_{m-1}، C_m أو C_{m-2}، C_m مع بعضها.

(و) إذا كانت العلاقة التكرارية تربط C_m، C_{m-2} فإن، عموما، نعين C_1 بمساواة معامل القوى الأكبر التالية بالصفر (غير التى استخدمت فى الحصول

على المعادلة الدليلية) ومن ناحية اخرى إذا كانت العلاقة التكرارية تربط C_{m-1}، C_m فإن هذه الخطوة تحذف.

(ز) بعد الحصول على مختلف المعاملات بمساعدة (هـ) و (و) نحصل على الحل بتعويض هذه القيم فى (2) أو (3). وبعض الخطوات سوف نسردها بالتفصيل وتطوير الطريقة فى الأمثلة المطروحة. ونحصل فى كل مسألة حلين مستقلين.

الحالة الأولى (الجذران مختلفان والفرق بينهما عدد غير صحيح)

مثال (١): حل المعادلة $9x(1-x)y''-12y'+4y=0$ بالمتسلسلات

الحل: لدينا

$$9x(1-x)y''-12y'+4y=0 \qquad (1)$$

بالقسمة على $9x(1-x)$ نحصل على

$$y''-\frac{4}{3x(1-x)}y'+\frac{4}{9x(1-x)}y=0$$

بالمقارنة مع $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ نجد أن

$$P(x)=\frac{-4}{3x(1-x)}\ ,\ \ Q(x)=\frac{4}{9x(1-x)}$$

وحيث أن كل من xP ، x^2Q ليست تحليلية عند $x=0$ وعليه فإن $x=0$ ليست نقطة عادة وهى نقطة شاذة ولكن

$$\lim_{x\to 0} xP(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-4x}{3x(1-x)}=-\frac{4}{3} \qquad \text{(موجود)}$$

$$\lim_{x\to 0} x^2Q(x)=\lim_{x\to 0} x^2\frac{4}{x(1-x)}=0 \qquad \text{(موجود)}$$

وعليه كل من xP ، x^2Q تحليلية عند $x=0$ وعلى ذلك تكون $x=0$ نقطة شاذه منتظمة للمعادلة (1). ونفترض حل (1) على الصورة

$$y=\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{K+m},\quad C_0\neq 0 \qquad (2)$$

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} C_m (K+m) x^{K+m-1}, y'' = \sum_{m=0}^{\infty} C_m (K+m)(K+m-1)x \qquad (3)$$

وبتعويض (2)، (3) فى المعادلة (1) نحصل على

$$9x(1-x)\sum_{m=0}^{\infty} C_m (K+m)(K+m-1)x^{K+m-2} - 12\sum_{m=0}^{\infty} C_m (K+m)x^{K+m-1}$$

$$+4\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{K+m} = 0$$

أو

$$9x\sum_{m=0}^{\infty} C_m (K+m)(K+m-1)x^{K+m-2} - 9x^2\sum_{m=0} C_m (K+m)(K+m-1)x^{K+m-2}$$

$$-12\sum_{m=0}^{\infty} C_m (K+m)x^{K+m-1} + 4\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{K+m} = 0$$

أو

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m \{9(K+m)(K+m-1) - 12(K+m)\} x^{K+m-1}$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty} C_m \{4 - 9(K+m)(K+m-1)\} x^{K+m} = 0 \qquad (4)$$

ولكن

$$9(K+m)(K+m-1) - 12(K+m) = 3(K+m)(3K+3m-7) \qquad (5)$$

وأيضا

$$4 - 9(K+m)(K+m-1) = 4 - 9(K+m)^2 + 9(K+m)$$

$$= -[9(K+m)^2 - 9(K+m) - 4] =$$

$$= -[9(K+m)^2 - 12(K+m) + 3(K+3m) - 4]$$

$$= -[3(K+m)\{3(K+m)-4\} + 3(K+m) - 4]$$

$$= -[3(K+m)-4](3K+3m+1)$$

$$= -[(3K + 3m - 4)(3K + 3m + 1) \quad (6)$$

استخدم (5)، (6) فإن (4) تأخذ الصورة

$$3\sum_{m=0}^{\infty} C_m (K+m)(3K+3m-7)x^{K+m-1}$$

$$-\sum_{m=0} C_m (3K+m-4)(3K+3m+1)x^{K+m} = 0 \quad (7)$$

بمساواة معامل أقل اس للمتغير x (وهو x^{K+m-1}) بالصفر نحصل على العلاقة الرجعية التكرارية

$$3C_m (K+m)(3K+3m-7) - C_{m-1}[3K+3(m-1)-4).$$

$$.(3K+3(m-1)+1] = 0$$

أى

$$3C_m (K+m)(3K+3m-7) - C_{m-1}[3K+3m-7][3K+3m-2] = 0 \quad (8)$$

بوضع $m = 0$ نحصل على المعادلة الدليلية

$$3C_0 (K)(3K-7) - C_{-1}(3K-7)(3K-2) = 0$$

وحيث $C \neq 0$، $C_{-1} = 0$ (لماذا ؟)

$$3C_0 K(3K-7) = 0 \quad \Rightarrow \quad K = 0, K = 7/3 \quad (9)$$

من (8) نجد أن

$$C_m = \frac{3K+3m-2}{3(K+m)} C_{m-1}$$

بوضع $m = 1$ فى (8) نحصل على

$$C_1 = \frac{C_0}{3} \cdot \frac{3K+1}{K+1} \quad (10)$$

بوضع $m = 2$ فى (8) نحصل على

$$C_2 = \frac{3K+4}{3(K+2)}C_1 = \frac{C_0}{3}\frac{(3K+1)(3K+4)}{(K+1)(K+2)} \tag{11}$$

بالتعويض فى (2)

$$y = x^K[C_0 + C_1x + C_2x^2 + ...]$$

$$y = C_0x^K\left[1 + \frac{1}{3}\frac{3K+1}{K+1}x + \frac{1}{3^2}\frac{(3K+1)(3K+4)}{(K+1)(K+2)}x^2 + ...\right] \tag{12}$$

بوضع $K=0$ وبوضع a بدلا من C_0 فى (12) نحصل على

مثلا

$$y = a\left(1 + \frac{1}{3}x + \frac{1.4}{3.6}x^2 + ...\right) = au$$

وبوضع $K=7/2$ وبوضع b بدلا من C_0 فى (12) نحصل على

مثلا

$$y = bx^{7/3}\left(1 + \frac{8}{10}x + \frac{8.11}{10.13}x^2 + ...\right) = bv$$

ويكون الحل العام هو $y = au + bv$ أى

$$y = a\left(1 + \frac{1}{3}x + \frac{1.4}{1.5}x^2 + ...\right) + bx^{7/3}\left(1 + \frac{8}{10}x + \frac{8.11}{10.13}x^2 + ...\right)$$

الحالة الثانية: جذرا المعادلة الدليلية مختلفين والفرق بينهما عدد صحيح يجعل احد المعاملات غير معينه.

قاعدة: إذا كان جذرا المعادلة الدليلية K_1 و K_2، ($K_2 < K_1$ مثلا) وأن أحد المعاملات فى y تصبح غير معينة عند $K = K_2$، فإن الحل يعطى بوضع $K = K_2$ فى y حيث يحتوى الحل على ثابتين اختياريين. أما إذا وضعنا $K = K_1$ فى y فإن الناتج يكون مضاعف عدديا للحل y عند $K = K_2$ وبذلك نرفض الحل بوضع $K = K_1$.

مثال (٢): اوجد حل المعادلة

$$x^2y'' + (x + x^2)y' + (x - 9)y = 0 \tag{1}$$

الحل: حيث لم تحدد فى المسألة x_0 فاننا نأخذ $x_0 = 0$. وعلى ذلك بالقسمة على x^2 نحصل على

$$y'' + \frac{x + x^2}{x^2} y' + \frac{x - 9}{x^2} y = 0$$

نجد أن

$$P = \frac{1+x}{x}, \quad Q = \frac{x-9}{x^2}$$

ومن ذلك أن $x = 0$ نقطة شاذه وحيث أن

$$\lim_{x \to 0} x P(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1+x}{x} = 1 \qquad \text{(موجودة)}$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 Q(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 (x-a)}{x^2} = -9 \qquad \text{(موجودة)}$$

وبذلك تكون $x = 0$ نقطة شاذه منتظمة.

نفترض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{K+m}, \quad C_0 \neq 0 \qquad (2)$$

$$y' \sum_{n=0} C_m (K+m) x^{K+m-1}, y'' = \sum_{m=0}^{\infty} C_m (K+m)(K+m-1) x^{K+m-2} \qquad (3)$$

بالتعويض فى المعادلة (1) نجد أن

$$x^2 \sum_{n=0} (K+m)(K+m-1) C_m x^{K+m-2} + (x + x^2) \sum_{m=0} (K+m) C_m x^{K+m-1}$$

$$+ (x-9) \sum_{n=0} C_m x^{K+m} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{m=0} (K+m)(K+m-1) C_m x^{K+m} + \sum_{m=0} (K+m) C_m x^{K+m} +$$

$$+ \sum_{m=0} (K+m) C_m x^{K+m+1} + \sum C_m x^{K+m+1} - 9 \sum C_m x^{K+m} = 0$$

أو

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{(K+m)(K+m-1)+(K+m)-9\}C_m x^{K+m}$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty} \{(K+m)+1\}C_m x^{K+m+1}=0$$

أو

$$\sum_{m=0} \{(K+m)^2-3^2\}C_m x^{K+m}+\sum (K+m+1)C_m x^{K+m+1}=0$$

أو

$$\sum (K+m+3)(K+m-3)C_m x^{K+m}+\sum_{m=0}^{\infty} (K+m+1)C_m x^{K+m+1}=0$$

بمساواة معامل أقل قوى للمتغير x بالصفر نحصل على

$$(K+m+3)(K+m-3)C_m+(K+m)C_{m-1}=0$$

وهى العلاقة التكرارية والتى يمكن كتابتها على الصور

$$C_m=\frac{-(K+m)}{(K+m+3)(K+m-3)}C_{m-1} \qquad (5)$$

بوضع $m=0$ فى العلاقة التكرارية نحصل على

$$(K+3)(K-3)C_0+KC_{-1}=0, \quad C_0\neq 0, C_{-1}=0$$

فإن

$$(K+3)(K-3)=0 \quad \Rightarrow \quad K=3,-3$$

بوضع $m=1,2,3.....$ فى (5) نحصل على

$$C_1=-\frac{K+1}{(K+4)(K-2)}C_0$$

$$C_2=-\frac{K+2}{(K+5)(K-1)}C_1=\frac{(K+1)(K+2)}{(K-1)(K-2)(K+4)(K+5)}C_0$$

$$C_3=-\frac{K+3}{(K+6)K}C_2=-\frac{(K+1)(K+2)(K+3)}{K(K-1)(K-2)(K+4)(K+5)(K+6)}C_0$$

وهكذا بوضع هذه القيم فى (2) نحصل على

$$y=C_0x^K\left[1-\frac{(K+1)}{(K-2)(K+4)}x+\frac{(K+1)(K+3)}{(K-1)(K-2)(K+4)(K+5)}x^2\right.$$

$$\left.-\frac{(K+1)(K+2)(K+3)}{K(K-1)(K-2)(K+4)(K+5)(K+6)}x^3+\dots\right] \qquad (6)$$

بوضع $K=3$ باحلال a بدلا من C_0 فى (6) نحصل على

$$y=ax^3=\left[1-\frac{4}{2.7}x+\frac{4.5}{1.2.7.8}x^2+\frac{4.5.6}{3.2.1.7.8.9}x^3-\dots\right]=au \quad \text{(مثلا)}$$

بوضع $b,K=-3$ بدلا من C_0 فى (6) ومع ملاحظة أن $C_m=0$ لقيم $m\geq 3$ نحصل على

$$y=bx^{-3}\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)x+\frac{1}{20}x^2\right\}=bv$$

ويكون الحل العام هو

$$y=au+bv$$

ملحوظة هامة: إذا كانت $x=0$ نقطة عادية للمعادلة $y''+Py'+Qy=0$ فاننا سبق أن شرحنا كيفية الحل كما فى المثال الأول وكل المسائل التى فيها $x=x_0$ نقطة عادية يمكن حلها بطريقة فروبنيوس. والأن نسرد المثال التالى لتوضيح ذلك كذلك لتوضيح وجود معاملات غير معينة.

مثال (٣): حل المعادلة $\qquad (1-x^2)y''-xy'+4y=0$

الحل: من الواضح ان $x=0$ نقطة عادية للمعادلة

$$(1-x^2)y''-xy'+4y=0 \qquad (1)$$

نفترض الحل على الصورة

$$y=\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{K+m}, \quad C_0 \neq 0 \tag{2}$$

وبالتالي

$$y'=\sum_{m=0}^{\infty} C_m (K+m) x^{K+m-1}, y''=\sum_{m=0}^{\infty} C_m (K+m)(K+m-1) x^{K+m-2} \tag{3}$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على

$$(1-x^2)\sum C_m (K+m)(K+m-1) x^{K+m-2} - x\sum C_m (K+m) x^{m+K-1} +$$

$$+4\sum C_m x^{m+K}=0$$

وبعد التبسيط نحصل على

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m (K+m)(K+m-1) x^{k+m-2} - \sum_{m=0}^{\infty} C_m [(K+m)^2-4] x^{k+m}=0$$

أو

$$\sum C_m (K+m)(K+m-1) x^{K+m-2} - \sum_{m=0}^{\infty} C_m (K+m+2)(K+m-2) x^{K+m}=0$$
(4)

وهي متطابقة وبمساواة معامل أقل قوة للمتغير x وهي x^{K+m-2} بالصفر نحصل على

$$C_m (K+m)(K+m-1) - C_{m-2}(K+m)(K+m-4)=0 \tag{4-a}$$

ومنها

$$C_m=\frac{K+m-4}{K+m-1} C_{m-2} \tag{5}$$

بوضع $m=0$ في (4-a) نحصل على المعادلة الدليلية

$$C_0 (K)(K-1) - C_{-2}(K)(K-4)=0, C_0 \neq 0, C_{-2}=0$$

ومنها نجد أن

$$C_0K(K-1)=0 \quad \Rightarrow \quad K(K-1)=0 \tag{6}$$

أى $K=0, K=1$ وهما جذران مختلفان الفرق بينهما عدد صحيح. وإذا ساوينا معاملات x^{K-1} بالصفر نحصل على

$$C_1(K+1)K=0 \tag{6-a}$$

فإذا وضعنا $K=0$ فى (6-a) يكون C_1 غير معين، وباستخدام (5) يمكن أن نعبر عن $C_2, C_4, C_6, \ldots$ بدلالة C_0 ، $C_3, C_5, \ldots$ بدلالة C_1 وإذا افترضنا أن C_1 معينة فإن عندما $K=0$ فإن $C_m=\dfrac{(m-4)}{(m-1)}C_{m-2}$

وأن $C_2=-2\ C_0$ ، $C_4=0$ ، وكذلك $C_6=C_8=\ldots=0$. وأن

$$C_3=\frac{C_1(-1)}{2}=-C_1/2$$

$$C_5=C_3(1)/4=-C_1/8$$

$$C_7=C_5(3)/6=-C_1/16$$

وهكذا. بوضع $K=0$ وهذه القيم فى (2) نحصل على

$$y=x^K[C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+\ldots]$$

$$y=x^0[C_0+C_2x^2+C_4x^4+\ldots]+x[C_1+C_3x^3+C_5x^5+\ldots] \tag{7}$$

نحصل على

$$=C_0(1-2x^2)+C_1\left[x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{8}+x^7/16-\ldots\right]$$

وهو الحل المطلوب ويحتوى على ثابتين لختيارين هما C_1 و C_2.

ملحوظة: على القارئ أن يتأكد ان الجذر $K=1$ للمعادلة الدليلية يعطى حلا آخر كالعادة. ولكن هذا الحل يكون ثابت مضروبا فى واحد فى الحلول فى (7) ولهذا فاننا نرفض هذا الحل.

الحالة الثالثة: جذرا المعادلة الدليلية مختلفان والفرق بينهما عدد صحيح واحدهما يجعل المعاملات لانهائية.

قاعدة: إذا كان جذرا المعادلة الدليلية غير متساويين K_1 ، K_2

$(K_1 > K_2)$ أى" K_2 الجذر الأصغر" والفرق بينهما عدد صحيح، إذا كان بعض المعاملات فى الحل y تصبح لانهائى عند $K = K_2$ فإننا نطور صورة y بوضع $d_0(K - K_2)$ بدلا من C_0 . ونحصل على حلين مستقلين بوضع $K = K_2$ فى الصورة المطورة للحل y ، وكذلك $\partial y / \partial K$. وتكون النتيجة عند وضع $K = K_1$ فى y تعطى مضاعف عددى للذى حصلنا عليه بوضع $K = K_2$ ولذلك نرفض الحل بوضع $K = K_1$ فى y.

مثال (٤): حل المعادلة

$$x(1-x)y'' - 3xy' - y = 0 \qquad (1)$$

الحل: بالقسمة على $x(1-x)$ نحصل على

$$y'' - \frac{3}{1-x}y' - \frac{1}{x(1-x)}y = 0$$

بالمقارنة مع $y'' + P(x) + Q(x)y = 0$ نجد أن

$$P = \frac{-3}{1-x}, \quad Q = \frac{1}{x(1-x)}y = 0$$

وبسهولة نعرف أن $x = 0$ نقطة شاذه منتظمة ليكن الحل

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{K+m}, C_0 \neq 0 \qquad (2)$$

وبالتالى

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} C_m (K+m) x^{K+m-1}, y'' = \sum_{m=0}^{\infty} C_m (K+m)(K+m-1) x^{K+m-1} \qquad (3)$$

بالتعويض فى (1) نحصل على

$$(x-x^2)\sum C_m(K+m)(K+m-1)x^{K+m-2}$$

$$-3x\sum_{m=0}^{\infty} C_m(K+m)x^{K+m-1}-\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{K+m}=0$$

وبعد الاختصار نحصل إلى

$$\sum_{m=0} C_m(K+m)(K+m-1)x^{K+m-1}-\sum_{m=0}^{\infty} C_m(K+m+1)^2x^{K+m}=0 \qquad (4)$$

وهى متطابقة. وبمساواة معاملات اصغر قوى x بالصفر أى معامل x^{K-1}، فاننا من (4) نحصل على

$$C_0K(K-1)=0 \quad \Rightarrow \quad K(K-1) \quad \Rightarrow \quad K=0, K=1$$

وهذان الجذران مختلفان والفرق بينهما عدد صحيح. توجد العلاقات التكرارية بمساواة معامل x^{K+m-1} بالصفر نحصل على

$$C_m(K+m)(K+m-1)-C_{m-1}(K+m)^2=0$$

$$C_m=\frac{K+m}{K+m-1}C_{m-1} \qquad (5)$$

عندما $m=1$ فإن (5) تعطى

$$C_1=\frac{K+1}{K}C_0 \qquad (6)$$

بوضع $m=2$ فى (5) واستخدام (6) نحصل على

$$C_2=\frac{K+2}{K+1}C_1=\frac{K+2}{K}C_0 \qquad (7)$$

بوضع $m=3$ فى (5) واستخدام (7) نحصل على

$$C_3=\frac{K+3}{K+2}C_2=\frac{K+3}{K}C_0 \qquad (8)$$

بوضع هذه القيم فى (2) نحصل على

$$y=x^K(C_0+C_1x+C_2x^2+...)$$

$$=C_0x^K\left[1+\frac{K+1}{K}x+\frac{K+2}{K}x^2+\frac{K+3}{K}x^3+\dots\right] \qquad (9)$$

إذا وضعنا $K=0$ فى (9) نجد أن المقام يساوى صفر وتصبح المعاملات لانهائية. وللتخلص من ذلك نضع $C_0=Kd_0$ فإن (9) فإن (9) تؤول إلى

$$u=d_0x^K[K+(K+1)x+(K+2)x^2+(K+3)x^3+\dots] \qquad (10)$$

بوضع $K=0$ ونضع a بدلا من d_0 فى (10) نحصل على

$$y=a(x+2x^2+3x^3+\dots)=au, \quad \text{مثلا} \qquad (11)$$

فإذا وضعنا $K=1$ فى (9) نحصل على

$$y=C_0(x+2x+3x^2+\dots)$$

وهو حل غير مستقل عن الحل (11). ويمكن الحصول على الحل الثانى المستقل خطياً من $(\partial y/\partial K)_{K=0}$ وذلك باشتقاق (10) جزئياً بالنسبة إلى K نحصل على

$$\partial y/\partial K=d_0x^K\ln x[K+(K+1)x+(K+2)x^2+\dots]+d_0x^K[1+x+x^2+\dots] \qquad (13)$$

بوضع $K=0$ وبوضع b بدلا من d_0 نحصل على

$$\partial y/\partial K\,|_{K=0}=b\ln[x]\{x+2x^2+3x^3\dots]+b[1+x+x^2+\dots]$$

$$=b[u\ln x+(1+x+x^2+\dots)]=bv \qquad (14)$$

ويكون هو الحل المطلوب

الحالة الرابعة: الجذران متساويان

قاعدة: إذا كان جذرا المعادلة الدليلية متساويين $K_2=K_1$ فإننا نحصل على حلين مستقلين بالتعويض عن K فى y وفى $\frac{\partial y}{\partial K}$ نحصل على الحل المطلوب.

مثال (٦): حل المعادلة

$$xy''+y'+xy=0$$

الحل: لدينا

$$xy''+y'+xy=0 \qquad (1)$$

بالقسمة على x

$$y''+\frac{1}{x}y'+y=0$$

ومن السهولة اثبات أن $x=0$ نقطة شاذه منتظمة نفترض أن

$$y=\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{K+m}, C_0 \neq 0 \qquad (2)$$

وبالتالى

$$y'=\sum_{m=0}^{\infty} C_m (K+m) x^{K+m}, y''=\sum_{m=0}^{\infty} C_m (K+m)(K+m-1) x^{K+m-1} \qquad (3)$$

بالتعويض فى (1) نحصل على

$$\sum C_m (K+m)(K+m-1) x^{K+m-1}+\sum (K+m) C_m x^{K+m-1}+\sum C_m x^{K+m+1}=0$$

أى بعد التبسيط نؤول إلى

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m (K+m)^2 x^{K+m-1}+\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{K+m+1}=0 \qquad (4)$$

وهى متطابقة. وبمساواة معامل اصغر قوى للمتغير x بالصفر فاننا من (4) نحصل على

$$C_0 K^2=0 \qquad K^2=0, \quad K=0,0$$

أى K جذر مكرر ،

ونحصل على العلاقة التكرارية بمساواة معامل x^{K+m-1} فى (4) بالصفر

$$C_m (K+m)^2+C_{m-2}=0 \Rightarrow C_m=-\frac{1}{(K+m)^2} C_{m-2} \qquad (5)$$

للحصول على C_1 تساوى معامل x^K بالصفر نحصل على $C_1(K+1)^2=0$ وبالتالى فإن $C_1=0$ (حيث $K=0$ هو جذرا المعادلة الدليلية). باستخدام $C_1=0$ و (5) نجد أن

$$C_1=C_3=C_5=C_7=...=0 \tag{6}$$

بوضع $m=2,4,6,...$ فى (5) والتبسيط نحصل على

$$C_2=-C_0/(K+2)^2$$

$$C_4=-C_2/(K+4)^2=C_0/(K+2)^2(K+4)^2$$

$$C_6=-C_4/(K+6)^2=-C_0/(K+2)^2(K+4)^2(K+6)^2$$

ويكون

$$y=x^K(C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+...]$$

$$y=C_0x^K\{1-\frac{x^2}{(K+2)^2}+\frac{x^4}{(K+2)^2(K+4)^2}-\frac{x^6}{(K+2)^2(K+4)^2(K+6)^2}+...] \tag{7}$$

بوضع $K=0$ يكون الحل هو

$$y=a[1-\frac{x^2}{(2)^2}+\frac{x^4}{(2^2)(4^2)}-\frac{x^6}{(2^2)(4^2)(6^2)}+...]=au \quad \text{(مثلا)} \tag{8}$$

للحصول على الحل الثانى

$$\partial y/\partial K=C_0x^K\ln x[1-\frac{x^2}{(K+2)^2}-\frac{x^4}{(x+2)^2(K+4)^2}+...]$$

$$+C_0x^K[-\frac{x^2}{(K+2)^2}\frac{(-2)}{(K+2)}+\frac{x^4}{(x+2)^2(K+4)^2}[-\frac{2}{K+2}-\frac{2}{K+4}]+...$$

بوضع $K=0$

$$\frac{\partial y}{\partial K}|_{K=0}=b\ln x(1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2.4^2}-\frac{x^6}{2^2.4^2.6^2}+...)$$

$$+b(\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2.4^2}(1+\frac{1}{2})+\frac{x^2}{2^2.4^2.6^2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+...\}$$

$$=b[u\ln x+\{\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^4}{2^2.4^2}(1+\frac{1}{2})+...\}]=bv\ ,\quad \text{say}$$

ويكون الحل المطلوب هو $y=au+bv$.

١١-٦ الحل بالمتسلسلات حول نقطة شاذة منتظمة لقيم x الكبيرة

نفترض ان المعادلة المعطاة

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \qquad (1)$$

ولأننا نريد ايجاد حل المعادلة (1) لقيم كبيرة للمتغير المستقل x أى حول ∞. ولهذا الغرض فإننا نستبدل بالمتغير المستقل x المتغير t بالتحويل التالى

$$t=1/x \qquad \text{أى} \qquad x=1/t \qquad (2)$$

وهذا التحويل يحول قيم x الكبيرة إلى قيم t الصغيرة وباستخدام (2) فاننا نكتب المعادلة (1) ونحصل على المعادلة الناتجة حول $t=0$ أى

$$d^2y/dt^2+P_1(t)dy/dt+Q_1(t)y=0 \qquad (3)$$

وعلى ذلك يقال ان المعادلة (1) لها نقطة شاذة منتظمة عند $x=\infty$ إذا كانت المعادلة المحولة (3) لها نقطة شاذة منتظمة عند $t=0$.

مثال (٧): اثبت أن $x=\infty$ نقطة شاذة منتظمة للمعادلة

$$x^2y''+4xy'+2y=0$$

الحل: لدينا

$$x^2y''+4xy'+2y=0 \qquad (1)$$

نستخدم التحويل

(2) $x = 1/t$ أى $t = 1/x$ اى $dt/dx = -\dfrac{1}{x^2}$

ولكنه

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -t^2\frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(-t^2\frac{dy}{dt}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

أى

$$y'' = \left(-t^2\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt}\right)(-t^2) = t^4\frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3\frac{dy}{dt} \qquad (4)$$

باستخدام (2)، (3)، (4) فإن (1) تتحول إلى

$$\frac{1}{t^2}\left(t^4\frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3\frac{dy}{dt}\right) + \frac{4}{t}\left(-t^2\frac{dy}{dt}\right) + 2y = 0$$

أى

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \left(\frac{2}{t}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{2}{t^2}\right)y = 0 \qquad (5)$$

بمقارنة (5) مع

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + P(t)\frac{dy}{dt} + Q(t)y = 0$$

يكون $P = \dfrac{-2}{t}$ ، $Q = \dfrac{2}{t^2}$ وبالتالى فإن

$$tP(t) = -2, \qquad t^2Q(t) = 2$$

وحيث أن كل من $tP(t)$، $t^2Q(t)$ تحليلية عند $t = 0$ وبالتالى فإن $t = 0$ تكون نقطة شاذة منتظمة للمعادلة (5) أما بالنسبة إلى (2)، فتكون $x = \infty$ نقطة شاذة منتظمة للمعادلة (1).

مثال (٨): اوجد حل فى صورة متسلسلة للمعادلة

$$\left(1-x^{2}\right)\frac{d^{2}y}{dt^{2}}-2x\frac{dy}{dt}+6y=0$$

حول $x=\infty$

الحل: لدينا

$$\left(1-x^{2}\right)y''-2xy'+6y=0 \qquad (1)$$

نضع

$$x=1/t \Rightarrow t=\frac{1}{x}\ ,\quad \frac{dt}{dx}=-1/x^{2} \qquad (2)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)=-t^{2}\frac{dy}{dt} \qquad (3)$$

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(-t^{2}\frac{dy}{dt}\right)\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)$$

$$=t^{2}\frac{d}{dt}\left(t^{2}\frac{dy}{dt}\right)=t^{2}\left(2t\frac{dy}{dt}+t^{2}\frac{d^{2}y}{dt^{2}}\right) \qquad (4)$$

وبالتعويض فى (1) من (2) و (3) و (4) نحصل على

$$\left(1-\frac{1}{t^{2}}\right)\left(2t^{3}\frac{dy}{dt}+t^{4}\frac{d^{2}y}{dt^{2}}\right)-\frac{2}{t}\left(-t^{2}\frac{dy}{dt}\right)+6y=0$$

أى

$$t^{2}(t^{2}-1)\frac{d^{2}y}{dt^{2}}+2t^{3}\left(\frac{dy}{dt}\right)+6y=0$$

وبالقسمة على $t^{2}(t^{2}-1)$ نجد

$$\frac{d^{2}y}{dt^{2}}+\frac{2t}{t^{2}-1}\frac{dy}{dt}+\frac{6}{t^{2}(t^{2}-1)}y=0 \qquad (5)$$

بالمقارنة مع

$$\frac{d^2y}{dt^2}+P(t)\frac{dy}{dt}+Q(t)y=0$$

حيث $P(t)=\frac{2t}{t^2-1}$ ، $Q(t)=\frac{6}{t^2(t^2-1)}$

بحيث أن $tP(t)=\frac{2t^2}{t^2-1},\ t^2Q(t)=\frac{6}{t^2-1}$

وبذلك تكون $tP(t)$ ، $t^2Q(t)$ كل منهما تحليلية عند $t=0$ وبذلك تكون $t=0$ نقطة شاذة منتظمة لمعادلة (5)

ولحل (5) نفترض أن

$$y=\sum_{m=0}^{\infty} C_m t^{K+m} \quad , \quad C_0\neq 0 \tag{6}$$

$$dy/dt=\sum_{m=0}^{\infty}(K+m)C_m t^{K+m-1},\ \frac{d^2y}{dt^2}=\sum_{m=0}^{\infty}(K+m)(K+m-1)C_m^{K+m-2}$$

وبالتعويض عن y ، y' ، y'' فى (5) نحصل على

$$(t^4-t^2)\sum_{m=0}^{\infty}(K+m)(K+m-1)C_m t^{K+m-2}+2t^3\sum_{m=0}^{\infty}(K+m)C_m t^{K+m-1}$$

$$+6\sum_{m=0}^{\infty}C_m t^{K+m}=0$$

أى

$$\sum_{m=0}^{\infty}(K+m)(K+m-1)C_m t^{K+m+2}-\sum_{m=0}^{\infty}(K+m)(K+m-1)C_m t^{K+m}$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}2(K+m)C_m t^{K+m+2}+6\sum_{m=0}^{\infty}C_m t^{K+m}=0$$

أو $$-\sum_{m=0}^{\infty}\{(K+m)(K+m-1)-6\}C_m t^{K+m}+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\{(K+m)(K+m-1)+2(K+m)\}C_m t^{K+m+2}=0$$

أو

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{(K+m)^2-(K+m)-6\}C_m t^{K+m}$$

$$-\sum \{(K+m)^2+(K+m)\}C_m t^{K+m+2}=0 \qquad (7)$$

أو

$$\sum_{m=0}^{\infty} (K+m-3)(K+m+2)C_m t^{K+m} - \sum (K+m)(K+m+1)C_m t^{K+m+2}=0$$

وهى متطابقة. وبمساواة معامل أقل قوى للمتغير t بالصفر أى t^K، فإنه من (7) نحصل على المعادلة الدليلية

$$C_0(K-3)(K+2)=0 \Rightarrow K=3,\ K=-2,\ C_0\neq 0$$

وبذلك يكون جذرا المعادلة مختلفين والفرق بينهما عدد صحيح. ثم تساوى معامل t^{K+1} فى (7) بالصفر نحصل على $(K-2)(K+3)C_1=0$ والذى يعطى $C_1=0$ عندما $K=-2$ و $K=3$. وبمساواة معامل t^{K+m} فى (7) بالصفر نحصل على

$$(K+m-3)(K+m+2)C_m-(K+m-2)(K+m-1)C_{m-2}=0$$

أى

$$C_m=\frac{(K+m-2)(K+m-1)}{(K+m-3)(K+m+2)}C_{m-2}\ , \qquad m\geq 2 \qquad (8)$$

بوضع $m=3,5,6,...$ فى (8) مع ملاحظة أن $C_1=0$، نجد أن

نلاحظ ان $C_1=C_3=C_5=...=0$

$$C_2=\frac{K(K+1)}{(K-1)(K+4)}C_0$$

$$C_4=\frac{(K+2)(K+3)}{(K+1)(K+6)}C_2=\frac{K(K+2)(K+3)}{(K-1)(K+4)(K+6)}C_0\ ,$$

حيث $(K+1)\neq 0$ وهكذا بالتعويض فى (6)

$$y = t^K C_0\left[1+\frac{K(K+1)}{(K-1)(K+4)}t^2+\frac{K(K+2)(K+3)}{(K-1)(K+4)(K+6)}t^4+..\right] \qquad (9)$$

بوضع $K=3$ فى (9) وبوضع a بدلا من C_0 نحصل على

$$y = at^3\left[1+\frac{3.4}{2.7}t^2+\frac{3.5.6}{2.7.9}t^4+..\right]=au \qquad (10)$$

بوضع $K=-2$ فى (9) وبوضع b بدلا من C_0 نحصل على

$$y = bt^{-2}[1-t^2/3]=bv \qquad (11)$$

ويكون الحل المطلوب $y = au+bv$

$$y = at^3\left(1+\frac{3.4}{2.7}t^2+\frac{3.5.6}{2.7.9}t^4\right)+\frac{b}{t^2}\left(1-\frac{t^2}{3}\right)$$

أى أن

$$y = \frac{a}{x^3}\left(1+\frac{3.4}{2.7}\frac{1}{x^2}+\frac{3.5.6}{2.7.9}\frac{1}{x^4}+...\right)+bx^2\left(1-\frac{1}{3x^2}\right)$$

ملحوظة: يمكن استخدام نفس طريقة فروبنيوس ونفس التعويض عندما يراد الحصول على حل بالمتسلسلات فى قوى x التنازلية وذلك بافتراض الحل على الصورة

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{K-m}, C_0 \neq 0$$

القاعدة: هى (i) نفترض أن الحل على الصورة $C_0 \neq 0$ ، $y=\sum C_m x^{K-m}$

(ii) للحصول على المعادلة الدليلية . تساوى أكبر قوى للمتغير x بالصفر

(iii) للعلاقة التكرارية تساوى معامل أكبر أس (عموما) فى المتطابقة بالصفر.

(سوف نستخدم ذلك عند دراسة دالة ليجندر فى باب قادم).

تمارين

أ – اثبت أن $x = 0$ نقطة عادية للمعادلات

(i) $y'' - xy' + 2y = 0$, (ii) $(x^2+1)y'' + xy' - xy = 0$

ب– اوجد الحل فى صورة متسلسلات للمعادلات

(i) $(1-x^2)y'' + 2xy' - y = 0$, $x = 0$ حول

(ii) $(1+x^2)y'' + xy' - y = 0$, $x = 0$ حول

(iii) $y'' - xy' + 2y = 0$, $x = 1$ حول

(iv) $(x^2-1)y'' + 3xy' + xy = 0$, $y(0) - 2, y'(0) = 3$

(v) $(2+x^2)y'' + xy' - (1+x)y = 0$, $x = 0$ حول

(vi) $(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 0$, $x = 0$ حول

جـ – استخدم المتسلسلات لحل المعادلات التالية

1- $2x(1-x)y'' + (1-x)y' + 3y = 0$

2- $4xy'' + 2y' + y = 0$

3- $y'' - \frac{1}{4x}2y' + \frac{1}{8x^2}y = 0$

4- $2xy'' + (x+1)y' + 3y = 0$

5- $2x^2y'' - xy + (x^2+1)y = 0$

6- $(x^2+1)y'' + xy' - xy = 0$

7- $y'' + xy' + x^2y = 0$

8- $y'' - xy' - x^2y = 0$

9- $(1+x^2)y'' + xy' - y = 0$

10- $y'' + x^2y = 0$

11- $x(1-x)y'' - (1+3x)y' - y = 0$

12- $x^2y'' - 3xy' + (3+4x)y = 0$

13- $x^2y'' + xy' - (1+x^2)y = 0$

14- $xy'' + (1+x)y' + 2y = 0$

15- $x^2y'' - x(1+x)y' + y = 0$

16- $xy'' + y - y = 0$

17- $x(1-x^2)y'' + (1-3x^2)y' - xy = 0$

18- $4(x^4 - x^2)y'' + x^3y' - y = 0$

(هـ) أوجد حل المعادلات التالية في صورة متسلسلة تنازلية في المتغير المستقل

(1) $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$

(2) $4x^3y'' + 6x^2y' + y = 0$

(3) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$

(4) $(1-x^2)y'' + 2xy' - y = 0$

و- أوجد الحل في صورة متسلسلة قوى تنازلية للمعادلات التالية

(i) $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$, $x = \infty$ حول

(ii) $4x^3y'' + 6x^2 + y = 0$, $x = -\infty$ حول

ز- اثبت أن المعادلة

$$x^2y'' - (1-3x)y' + y = 0$$

ليس لها حل منتظم في قوى x التصاعدية ولوجد حلها المنتظم في قوى x التنازلية.

الثانى عشر

نظرية وجود ووحدوية الحل

Existence and uniquenss theorems

١٢-١ مقدمة: تقابلنا كثيراً بعض المعادلات التفاضلية التى لايمكن حلها بالطرق المعروفة حتى الآن. وقد صيغت كثير من الطرق للحصول على الحل بطرق عددية على درجة عالية من الدقة. وفى هذا الباب سوف نناقش طريقة التكرار (iteration) لايجاد حل تقريبى لمسألة القيمة الابتدائية

$$dy/dx = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

يسمى الشرط $y(x_0) = y_0$ بالشرط الابتدائى. وترمز $y(x_0)$ إلى قيمة y عند $x = x_0$. وفى بعض الاحيان نعبر عن ذلك بالقول بأن $y = y_0$ عندما $x = x_0$.

فى هذه الطريقة يتم استخدام تطبيق متكرر لنفس الخطوات حيث فى كل خطوة نستخدم نتيجة الخطوة السابقة للحصول على نتيجة اكثر دقة عن ذى قبل .

١٢-٢ طريقة بيكارد (Picard) للتقريب المتتالى (أو طريقة بيكارد للاختزال)

نعتبر مسألة القيمة الحدية على الصورة

$$dy/dx = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \qquad (1)$$

بتكامل (1) على الفترة (x_0, x) نحصل على

$$\int_{x_0}^{x} dy = \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$$

$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx \qquad (2)$$

وعلى ذلك يكون حل مسألة القيمة الأبتدائية (1) مكافئاً لإيجاد الدالة $y(x)$ التى تحقق المعادلة (2)، حيث إنه باشتقاق (2) نحصل على $dy/dx = f(x,y)$ وبوضع $x = x_0$ فى (2) ينتج $y(x_0) = y_0 + 0$ أى $y(x_0) = y_0$. وعلى العكس يمكن الحصول على (2) من (1) بالتكامل على الفترة (x_0, x) واستخدام الشرط الابتدائى $y(x_0) = y_0$.

وحيث أنه ليس لدينا تعبيراً عن y بدلالة x ، فإن التكامل فى الطرف الأيمن فى (2) لايمكن حسابه. وعلى ذلك فإنه لايمكن الحصول على قيمة y المضبوطة (exact) وبالتالى فإننا نحسب تقريبات متتالية للحلول (2) كما يلى: كتقريب أولى نضع $y = y_0$ فى التكامل فى الطرف الأيمن فى (2) ونحصل على

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx \qquad (3)$$

حيث $y_1(x)$ هو قيمة مناظرة لقيمة $y(x)$ وتسمى بتقريب اول وهو يعطى تقريباً لقيمة $y(x)$ عند أى x. وللحصول على تقريب أفضل نضع y_1 بدلا من y فى التكامل فى الطرف الأيمن فى (2) ونحصل على تقريب ثانى y_2 أى

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)dx \qquad (4)$$

وبالاستمرار بهذه الطريقة نحصل على التقريب y_n المعطى بالعلاقة

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx$$

وعلى ذلك فقد حصلنا بعد تقريبات متتالية على الحلول

$$y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$$

مثال (١): استخدم طريقة بيكارد حتى التقريب الثالث لحل مسألة القيمة الأبتدائية

$$dy/dx = 2y - 2x^2 - 3, \quad y(0) = 2$$

الحل: لدينا

$$dy/dx = 2y - 2x^2 - 3\ ,\quad y(0) = 2$$

نعرف ان التقريب النونى y_n لمسألة القيمة الأبتدائية

$$dy/dx = f(x, y)\ ,\qquad y = y_0 \quad \text{عندما} \quad x = x_0 \tag{1}$$

يعطى بالعلاقة

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx \tag{2}$$

بمقارنة (1) مع (2) نجد أن

$$f(x, y) = 2y - 2x^2 - 3,\quad x_0 = 0, y_0 = 2 \tag{3}$$

باستخدام (2) نحصل على

$$y_n(x) = 2 + \int_0^x (2y_{n-1} - 2x^2 - 3)dx \tag{4}$$

التقريب الأول: نضع $n = 1$ فى (4) نحصل على

$$y_1(x) = 2 + \int_0^x (2y_0 - 2x^2 - 3)dx = 2 + \int_0^x (4 - 2x^2 - 3)dx$$

$$= 2 + \int_0^x (1 - 2x^2)dx = 2 + \left[x - 2\frac{x^3}{3}\right]_0^x$$

$$= 2 + x - \frac{2x^3}{3} \tag{5}$$

التقريب الثانى: نضع $n = 2$ فى (4) نحصل على

$$y_2(x) = 2 + \int_0^x (2y_1 - 2x^2 - 3)dx = 2 + \int_0^x \left[2\left(2 + x - \frac{2x^3}{3}\right) - 2x^2 - 3\right]dx$$

$$=2+\int_0^x \left(1-2x-2x^2-\frac{4x^3}{3}\right)dx$$

$$=2+x+x^2-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{3} \qquad (6)$$

التقريب الثالث: نضع $n=3$ فى (4) نحصل على

$$y_3=2+\int_0^x (2y_2-2x^2-3)dx=2+\int_0^x \left[2\left(2+x+x^2-\frac{2x^2}{3}-\frac{x^4}{4}\right)-2x^2-3\right]dx$$

$$=2+\int_0^x \left[1+2x-\frac{4x^3}{3}-\frac{2}{3}x^4\right]dx=2+x+x^2-\frac{x^4}{3}-\frac{2x^5}{15}$$

مثال (٢): استخدم طريقة بيكارد للتقريب المتتالى لإيجاد متتالية من دالتين التى تقترب من حل مسألة القيمة الأبتدائية

$$dy/dx=e^x+y^2\ ,\quad y(0)=1$$

الحل: لدينا

$$dy/dx=e^x+y^2\ , \qquad (1)$$
$y=1$ تكون $x=0$ عندما

نعرف أن التقريب النونى y_n لمسألة القيمة الأبتدائية

$$dy/dx=f(x,y)\ ,\quad y(x_0)=y_0 \qquad (2)$$

يعطى بالعلاقة

$$y_n=y_0+\int_{x_0}^x f(x,y_{n-1})dx \qquad (3)$$

بمقارنة (1)، (2) نجد أن

$$f(x,y)=e^x+y^2\ ,\quad x_0=0, y_0=1 \qquad (4)$$

وعلى ذلك

$$y_n = 1 + \int_{x_0}^{x} (e^x + y_{n-1}^2)dx \qquad (5)$$

التقريب الأول: نضع $n = 1$ فى (5) حيث نحصل على

$$y_1 = 1 + \int_0^x (e^x + y_0^2)dx = 1 + \int_0^x (e^x + 1)dx$$

$$= 1 + [e^x + x]_0^x = 1 + e^x + x - 1 = e^x + x$$

التقريب الثانى: نضع $n = 2$ فى (5) نجد أن

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (e^x + y_1^2)dx = 1 + \int_0^x [e^x + (e^x + x)^2]dx$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x [e^x + e^{2x} + x^2 + 2xe^x)dx =$$

$$= 1 + \left[e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{x^3}{3}\right]_0^x + 2\int_0^x xe^x dx$$

$$= 1 + e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{x^3}{3} - 1 - \frac{1}{2} + 2\left[[xe^x]_0^x - \int_0^x 1 e^x dx\right]$$

$$= e^x + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} + 2[xe^x - e^x]_0^x$$

$$= e^x + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} + 2xe^x - 2(e^x - 1)$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2} + (2x - 1)e^x .$$

مثال (٣): استخدم طريقة بيكارد للحصول على حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx^2} = x^2 - y \;, \quad y(0) = 0 .$$

أوجد على الأقل التقريب الرابع.

الحل: لدينا

$$dy/dx = x^2 - y \quad , \qquad x=0 \text{ عندما } y=0 \qquad (1)$$

نعرف أن التقريب النونى y_n لمسألة القيمة الأبتدائية

$$dy/dx = f(x,y) \quad , \qquad x=0 \text{ عندما } y=0 \qquad (2)$$

يعطى بالعلاقة

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx \qquad (3)$$

بمقارنة (2)، (3) نجد أن

$$f(x,y) = x^2 - y \quad , \quad x_0 = 0, y_0 = 0 \qquad (4)$$

وعلى ذلك

$$y_n = \int_0^x (x^2 - y_{n-1})dx$$

(5)

التقريب الأول: بوضع $n=1$ فى (5) وتستخدم (4) نحصل على

$$y_1 = \int_0^x (x^2 - y_0)dx = \int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^x = \frac{x^3}{3} \qquad (6)$$

التقريب الثانى: بوضع $n=2$ فى (5) وتستخدم (6) نحصل على

$$y_2 = \int_0^x (x^2 - y_1)dx = \int_0^x \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12}\right]_0^x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \qquad (7)$$

التقريب الثالث: بوضع $n=3$ فى (5) وتستخدم (7) نحصل على

$$y_3=\int_0^x (x^2-y_2)dx=\int_0^x x^2-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)dx$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{60}\Big|_0^x=\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{60} \qquad (8)$$

التقريب الرابع: بوضع $n=4$ فى (5) وتستخدم (8) نحصل على

$$y_4=\int_0^x (x^2-y_3)dx=\int_0^x \left[x^2-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{60}\right)\right]dx$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{60}-\frac{x^6}{360}$$

١٢-٣ طريقة بيكارد للانظمة التفاضلية الآنية:

يمكن إستخدام طريقة بيكارد للتقريب لحل المعادلات التفاضلية الآنية ذات الشروط الابتدائية.

نيكن لدينا الأنظمة التفاضلية الآنية

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,z), \qquad \frac{dy}{dx}=g(x,y,z) \qquad (1)$$

مع الشروط الأبتدائية $y=y_0$ ، $z=z_0$ عند $x=x_0$.

حيث الدوال f ، g دوال متصلة فى متغيراتها وقابلة للتكامل.

يعطى التقريب النونى (y_n,z_n) لمسألة القيمة الأبتدائية (1) بالتالى

$$y_n=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_{n-1},z_{n-1})dx \qquad (2)$$

$$z_n=z_0+\int_{x_0}^{x} g(x,y_{n-1},z_{n-1})dx \qquad (3)$$

والطريقة تعميم للطريقة السابقة وتتضح من الأمثلة التالية

مثال (١): اوجد التقريب الثالث للنظام

$$\frac{dy}{dx} = z\,,\quad \frac{dz}{dx} = x^2 z + x^4 y\,,\quad y(0) = 5, z(0) = 1$$

الحل: لدينا

$$\frac{dy}{dx} = z\,,\quad \frac{dz}{dx} = x^2 z + x^4 y\,, \qquad \text{عند } x = 0\text{، } y = 5,\ z = 1 \qquad (1)$$

التقريب النونى (y_n, z_n) لمسألة القيمة الأبتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z),\quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z) \qquad (2)$$

عند $x = x_0$ يكون $y = y_0\,,\ z = z_0$ يعطى بالعلاقة

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}, z_{n-1})dx \qquad (3)$$

$$z_n = z_0 + \int_{x_0}^{x} g(x, y_{n-1}, z_{n-1})dx \qquad (4)$$

بمقارنة (1)، (2) نجد أن

$$f = z\,,\quad g = x^2 z + x^4 y\,,\quad y_0 = 5, z_0 = 1, x_0 = 0 \qquad (5)$$

ويكون لدينا

$$y_n = 5 + \int_{0}^{x} z_{n-1}dx \qquad (6)$$

$$z_n = 1 + \int_{0}^{x} (x^2 z_{n-1} + x^4 y_{n-1})dx \qquad (7)$$

التقريب الأول: بوضع $n = 1$ فى (6) واستخدام (5) فيكون

$$y_1 = 5 + \int_{0}^{x} z_0 dx = 5 + \int_{0}^{x} dx = 5 + x \qquad (8)$$

بوضع $n = 1$ فى (7) واستخدام (5) فيكون

$$z_1 = 1 + \int_0^x (x^2 z_0 + x^4 y_0) dx$$

$$= 1 + \int_0^x (x^2 + x^4 .5) dx = 1 + \frac{x^3}{3} + x^5 \qquad (9)$$

التقريب الثانى: بوضع $n = 2$ فى (6) واستخدام (9) نجد أن

$$y_2 = 5 + \int_0^x z_1 dx = 5 + \int_0^x \left(1 + \frac{x^3}{3} + x^5\right) dx = 5 + x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{6} \qquad (10)$$

بوضع $n = 2$ فى (7) ونستخدم (8)، (9) نجد أن

$$z_2 = 1 + \int_0^x (x^2 z_1 + x^4 y_1) dx = 1 + \int_0^x \left[x^2 \left(1 + \frac{x^3}{3} + x^5\right) + x^4 (5 + x)\right] dx$$

$$z_2 = 1 + \int_0^x \left(x^2 + 5x^4 + \frac{4}{3} x^5 + x^7\right) dx = 1 + \frac{x^3}{3} + x^5 + \frac{2}{9} x^6 + \frac{1}{8} x^8 \qquad (11)$$

التقريب الثالث: بوضع $n = 3$ فى (6) واستخدام (11) نحصل على

$$y_3 = 5 + \int_0^x z_2 dx = 5 + \int_0^x \left(1 + \frac{1}{3} x^3 + x^5 + \frac{2}{9} x^6 + \frac{x^8}{8}\right) dx$$

$$= 5 + x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{6} + \frac{2}{63} x^7 + \frac{1}{72} x^9$$

بوضع $n = 3$ فى (7) واستخدام (10)، (11) نحصل على

$$z_3 = 1 + \int_0^x (x^2 z_2 + x^4 y_2) dx$$

$$= 1 + \int_0^x \left[x^4 \left(5 + x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{6}\right) + x^3 \left(1 + \frac{x^3}{3} + x^5 + \frac{2x^6}{9} + \frac{x^8}{9}\right)\right] dx$$

$$= 1 + \frac{x^3}{3} + x^5 + \frac{2}{9} x^6 + \frac{1}{8} x^8 + \frac{11}{244} x^9 + \frac{7}{264} x^{11}$$

مثال (٢): اوجد التقريب الثالث لمسألة القيمة الحدية

$$d^2y/dx^2 = xy + 1, \quad y_0 = 1, (dy/dx)_0 = 0, x_0 = 0$$

الحل: ليكن $\frac{dy}{dx} = z$ وبالتالى $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$ وتكون الشروط الابتدائية عند $x = 0$ يكون $y_0 = 1, z_0 = 0,$ ولحل هذه المسألة سوف نحل مسألة القيمة الأبتدائية

$$\frac{dy}{dx} = z \ , \quad \frac{dz}{dx} = 1 + xy \ , \tag{1}$$

عند $x = 0$ يكون $y = 1 \ , \ z = 0$

نعرف أن التقريب النونى (y_n, z_n) لمسألة القيمة الأبتدائية.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \frac{dz}{dx} = g(x, y, z), \quad y = y_0, z = z_0 \text{ يكون } x = x_0 \text{ عند} \tag{2}$$

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}, z_{n-1}) dx \tag{3}$$

$$z_n = z_0 + \int_{x_0}^{x} g(x, y_{n-1}, z_{n-1}) dx \tag{4}$$

بمقارنة (1)، (2) يكون لدينا

$$f(x, y, z) = z \ , \ g(x, y, z) = 1 + xy \ , y_0 = 1, z_0 = 0, x_0 = 0 \tag{5}$$

من (3) يكون لدينا

$$y_n = 1 + \int_0^x z_{n-1} dx \tag{6}$$

ومن (4) يكون لدينا

$$z_n = \int_0^x (1 + xy_{n-1}) dx \tag{7}$$

التقريب الأول: بوضع $n = 1$ فى (6) واستخدام (5) نجد أن

$$y_1 = 1 + \int_0^x z_0 dx = 1 + \int_0^x 0 dx = 1 \tag{8}$$

ثم نضع $n = 1$ فى (7) واستخدام (5) نحصل على

$$z_1 = \int_0^x (1 + x y_0) dx = \int_0^x (1 + x) dx = x + \frac{x^2}{2} \tag{9}$$

التقريب الثانى: بوضع $n = 2$ فى (6) واستخدام (9) نحصل على

$$y_2 = 1 + \int_0^x z_1 dx = 1 + \int_0^x \left(x + \frac{x^2}{2} \right) dx = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \tag{10}$$

بوضع $n = 2$ فى (7) واستخدام (8) نحصل على

$$z_2 = \int_0^x (1 + x y_1) dx = \int_0^x (1 + x) dx = x + \frac{1}{2} x^2 \tag{11}$$

التقريب الثالث: بوضع $n = 3$ فى (6) واستخدام (11) نحصل على

$$y_3 = 1 + \int_0^x z_2 dx = 1 + \int_0^x \left(x + \frac{1}{2} x^2 \right) dx = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3$$

بوضع $n = 3$ فى (7) واستخدام (10) نحصل على

$$z_3 = \int_0^x (1 + x y_2) dx = \int_0^x \left[1 + x \left(1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{x^3}{6} \right) \right] dx$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{30}$$

١٢-٤ مسائل وجود ووحدوية الحل :

لننظر الآن إلى الامثلة التالية:

أ – نعتبر مسألة القيمة الأبتدائية

$$|dy / dx| + |y| = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \tag{1}$$

بافتراض أن هناك حلا ممكنا لهذه المسألة هو $y \neq 0$. والقسمة على $|y|$ والتكامل يؤدى إلى تناقض. نفترض بالتالى $y = 0$ هو الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية. من الواضح أن هذا الحل لايحقق الشرط الأبتدائى $y(0) = 1$. وعلى ذلك نرى مسألة القيمة الأبتدائية (1) ليس لها حل على الطلاق.

ب- نعتبر الأن مسألة القيمة الأبتدائية

$$dy/dx = x \quad , \quad y(0) = 1 \qquad (2)$$

وبفصل المتغيرات نحصل على $dy = xdx$ وبالتكامل $y = \frac{x^2}{2} + c$ حيث c ثابت اختيارى وباستخدام الشرط الأبتدائى $y(0) = 1$ أى $1 = 0 + c$ فيكون الحل هو $y = \frac{x^2}{2} + 1$ وبالتالى يكون لمسألة القيمة الأبتدائية حل وحيد.

جـ - نعتبر الأن مسألة القيمة الأبتدائية

$$dy/dx = (y-1)/x \quad , \quad y(0) = 1 \qquad (3)$$

وبفصل المتغيرات يكون لدينا

$$\frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{x}$$

وبالتكامل نحصل على

$$\ln(y-1) = \ln x + \ln c$$

أى $y - 1 = xc$ وباستخدام الشرط الأبتدائى $y = 1$ عندما $x = 0$ فنجد أنه لايمكن تحديد الثابت c. وبالتالى يكون لمسألة القيمة الأبتدائية (3) عدد لانهائى من الحلول معطى بالعلاقة $y - 1 = xc$ حيث c ثابت اختيارى.

من الأمثلة السابقة نرى أن مسألة القيم الأبتدائية

$$dy/dx = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \qquad (4)$$

قد لايكون لها حلول أو حل وحيد أو أكثر من حل وهذا يقودنا إلى السؤالين التاليين:

أ – **مسألة وجود الحل** (existance problem): تحت أى شروط يكون لمسألة القيمة الأبتدائية (4) حل واحد على الأقل ؟

ب– **مسألة وحدوية الحل** (uniqueness problem) تحت أى شروط يكون لمسألة القيمة الأبتدائية (4) حل وحيد ؟

تسمى النظريات التى تنص على وجود الحلول وعلى وحدوية الحلول بنظريات الوجود والوحدوية على الترتيب.

نلاحظ أن الأمثلة الثلاثة السابقة بسيطة وتوضح ما نقصده بوجود ووحدوية الحل. كما أنه إذا تعذر حل المعادلة بالطرق المعروفة يكون من المهم معرفة وجود الحل ووحدويته.

شرط لبشتز (Lipschitz condition): يقال أن الدالة $f(x,y)$ تحقق شرط لبشتز فى المنطقة D فى المستوى xy إذا وجد ثابت موجب K بحيث أن

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\le K\,|y_2-y_1| \quad , \quad K>0$$

طالما أن $(x,y_1)\in D,(x,y_2)\in D$. ويسمى K بثابت لبشتز للدالة $f(x,y)$.

نظرية (١): ليكن $\varphi(x)$ حلا لمسألة القيمة الأبتدائية.

$$y'=f(x,y) \quad , \quad y(x_0)=y_0 \quad , \tag{1}$$

على I إذا وفقط إذا كانت هى حلا متصلا للمعادلة التكاملية

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt \tag{2}$$

حيث I فترة ما، $x_0\in I$

البرهان: نفترض أن φ حلا لمسألة القيمة الأبتدائية فإن

$$\varphi'(x)=f(x,\varphi(x)), \qquad x\in I \tag{3}$$

وحيث أن φ متصلة على I و f متصلة فى D فيلى ذلك أن $f(x,\varphi(x))$ تكون متصلة على I. وبالتكامل من x_0 إلى x نحصل على المعادلة (2)

لجميع $x \in I$ وبتطبيق الشرط الأبتدائى $\varphi(x_0) = y_0$ ترى أن φ هى حل للمعادلة التكاملية (2) حيث $(x_0, y_0) \in D$.

وعلى العكس إذا كانت φ حلا للمعادلة التكاملية (2) على I وحيث أن $f(x, \varphi(x))$ دالة متصلة لجميع $x \in I$. وباشتقاق (2) نرى أن

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad , \quad x \in I$$

ونلاحظ فى (2) أن $\varphi(x_0) = y_0$ وبالتالى تكون φ حلا لمسألة القيمة الحدية (1).

نظرية (٢): (وجود الحل): ليكن $f(x, y)$ دالة متصلة فى نطاق ما D وأنها تحقق شرط لبشتز فى D أى

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le K\,|y_1 - y_2| \quad , \quad K > 0 \tag{1}$$

لجميع $(x, y_1), (x, y_2) \in D$. إذا كانت (x_0, y_0) نقطة فى D، فإنه يوجد حل $\phi(x)$ لمسألة القيمة الأبتدائية

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

على الفترة $I: |x - x_0| \le h$ لبعض $h > 0$.

البرهان: سوف نثبت النظرية باستخدام طريقة بيكارد للتقريب المتتالى السابق شرحها. ليكن لدينا المستطيل R.

$$R: |x - x_0| \le a \quad , \quad |y - y_0| \le b, \quad a > 0,\ b > 0$$

الذى يقع فى D. وحيث أن f متصلة على مجموعة مغلقة ومحدودة R وبالتالى تكون محدودة على R. وعلى ذلك يوجد ثابت $M > 0$ بحيث أن

$$|f(x, y)| \le M \tag{3}$$

لجميع $(x, y) \in R$. لنعرف h بالتالى

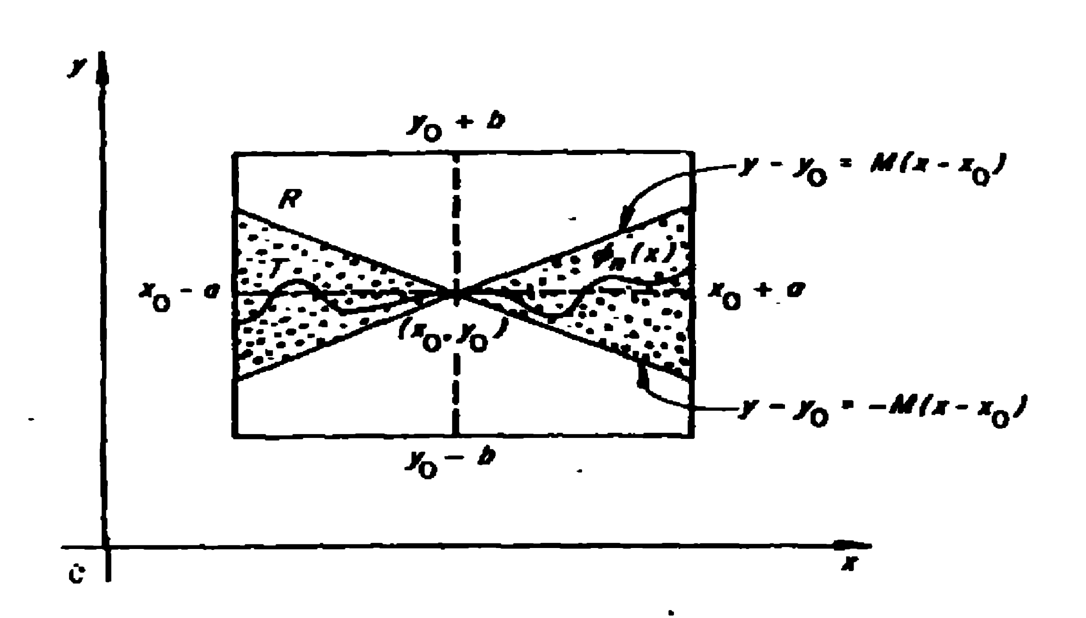
$$h = \min(a, b/M) \tag{4}$$

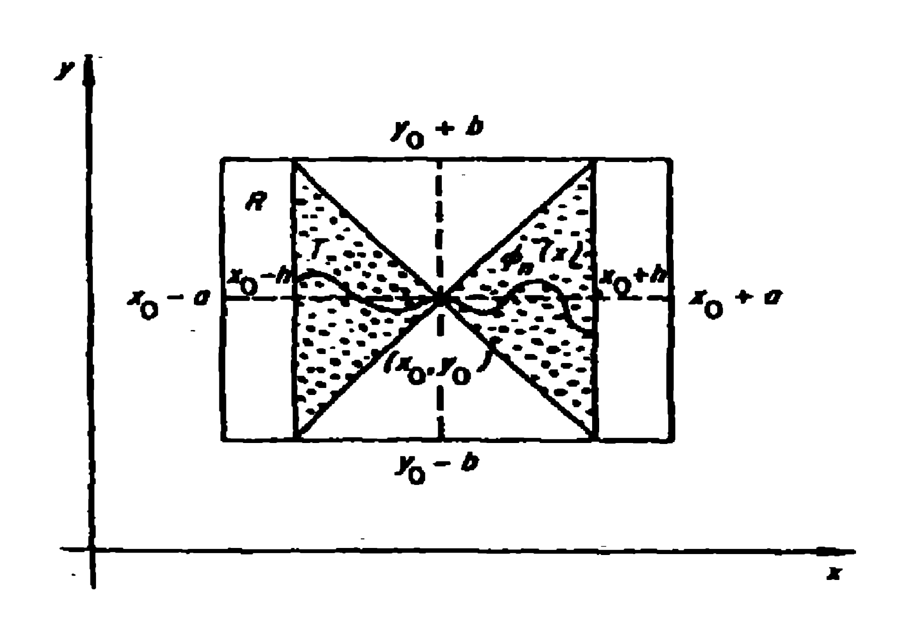
سوف نثبت بالاستنتاج (الاستقراء) الرياضى أن $\phi_n(x)$ دالة متصلة وتحقق

$$|\phi_n(x)-y_0| \leq M\ |x-x_0| \qquad (5)$$

لجميع $h \geq |x-x_0| : x \in I$.

والتفسير الهندسى للمتباينة (5) هو أن ϕ_n تقع فى $T \subset R$ ومحدودة بالمستقيمين $y-y_0=\pm M(x-x_0)$ و $x-x_0=\pm h$ كما هو مبين بالشكل





حيث أن $h \leq b/M$ فيلى من افتراض تحقق (5)، أن

$$|\varphi_n(x)-y_0| \leq Mh \leq b$$

ونعرف أن $h \le a$ وبالتالى كل النقاط $(x, \varphi_n(x))$ تقع فى R لجميع $x \in I$. ويكون من الواضح أن ϕ_0 موجودة وهى دالة متصلة على I وتحقق المتباينة (5). وعلى ذلك تكون ϕ_1 معطاه بالعلاقة

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt .$$

وحيث f دالة متصلة على R ، $f(t, y_0)$ تكون متصلة على I فإن ϕ_1 تكون موجودة ومتصلة على I. ونرى أن

$$|\varphi_1(x) - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt| \le |\int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)|dt| \le M\,|x - x_0|$$

والتى تبين أن ϕ_1 تحقق المتباينة (5).

وكما ذكرنا أننا سوف نثبت وجود واتصال ϕ_n بالاستنتاج الرياضى. نفترض وجود ϕ_n وهى متصلة على I وتحقق المتباينة (5) وحيث أن النقاط $(x, \varphi_n) \in R$ ، $x \in I$ فإن $f(x, \varphi_n)$ تكون موجودة لكل $x \in I$. وعلاوة على ذلك تكون f متصلة على R و ϕ_n متصلة على I. ويلى ذلك أن

$$\phi_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_n(t))dt \qquad \text{(A)}$$

تكون موجودة كدالة متصلة على I. وعلى ذلك يكون لدينا

$$|\varphi_{n+1}(x) - y_0| \le |\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_n(t))|dt| \le M\,|x - x_0|$$

والذى يبين وجود ϕ_{n+1} والتى تحقق (5). وهذا يثبت وجود ϕ_n وتكون متصلة على I وتحقق (5).

ونلاحظ أنه يمكن كتابة ϕ_n على الصورة

$$\varphi_n = y_0 + (\varphi_1 - y_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots + (\varphi_n - \varphi_{n-1})$$

والذى يبين أن $\phi_n(x)$ هى المجموع الجزئى النونى للمتسلسلة

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)] \qquad (6)$$

وعلى ذلك اثبات تقارب المتتابعة $\{\phi_n(x)\}$ يكون مكافئا لاثبات تقارب المتسلسة (6).

وحيث أنه لدينا

$$\varphi_2(x) - \varphi_1(x) = \int_{x_0}^{x} [f(t, \varphi_1(t)) - f(t, y_0)]$$

$$\Rightarrow |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \leq |\int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, y_0)| dt|$$

وحيث أن f تحقق شرط لبشتز فنحصل على

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \leq K |\int_{x_0}^{x} |\varphi_1(t) - y_0| dt$$

باستخدام ومن (5) نحصل على

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \leq MK |\int_{x_0}^{x} |t - x_0| dt$$

إذا كانت $x \geq x_0$ فإن

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \leq \frac{MK}{2} |x - x_0|^2$$

ونتحقق النتيجة أيضا فى حالة $x \leq x_0$.

والآن سوف نثبت بالاستنتاج الرياضى أن

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq \frac{MK^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n \qquad (7)$$

لجميع $x \in I$. ومن الواضح أن هذا يكون صحيحاً عندما $n = 2, n = 1$.

نعتبر الحالة $x \geq x_0$ (بالمثل يمكن لثبات النتيجة إذا كانت $x < x_0$)

نفترض صحة (7) أى عند n وسنثبت صحتها عند $n+1$ فيكون

$$|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)|\leq\int_{x_0}^{x} |f(t,\varphi_n(t))-f(t,\varphi_n(t))|dt$$

وباستخدام شرط لبشتز نحصل على

$$|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)|\leq K\left|\int_{x_0}^{x} |\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)|dt\right| \qquad (8)$$

من العلاقتين (7)، (8) نجد أن

$$|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)|\leq\frac{MK^n}{n!}\left|\int_{x_0}^{x} |t\,x_0|^n dt\right| =\frac{MK^n}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

وهى نفس العلاقة (7) فى حالة $(n+1)$. وبهذا يتم برهان هذا الجزء.

عندما $|x-x_0|\leq h$ نلاحظ أن

لجميع قيم n $\qquad \dfrac{K^n|x-x_0|^n}{n!}\leq\dfrac{K^n h^n}{n!}$

وحيث أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} K^n h^n/n!$ تتقارب إلى e^{Kh} فإن المتسلسلة (6) تتقارب بانتظام لجميع $x\in I$ باستخدام اختبار فيراشتراس من نوع M (Weirstrass M-test). وبالتالى المتتابعة التقريبية $\{\phi_n(x)\}$ تتقارب بانتظام إلى نهاية الدالة $\phi(x)$ لجميع $x\in I$. وحيث كل $\phi_n(x)$ تكون متصلة على I فإن $\phi(x)$ تكون متصلة لجميع $x\in I$. وعلى ذلك تكون $\phi_n(x)$ وبالتالى $\phi(x)$ تحقق (5). ومن ذلك نرى أن

$$|\phi(x)-y_0|\leq M\,|x-x_0|$$

والذى يعنى أن $(x,\phi(x))\in R$ لجميع $x\in I$.

وأخيرا نريد إثبات أن

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_n(t))dt=\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt\ ,x\in I$$

نعتبر

$$|\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt-\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_n(t))dt\ |$$

$$\leq\ |\int_{x_0}^{x}\ |f(t,\varphi(t))-f(t,\varphi_n(t))|\,dt\ |$$

$$\leq\ K\,|\int_{x_0}^{x}\ |\varphi(t)-\varphi_n(t)|\,dt\ |$$

$$\leq\ K\,|x-x_0|\max_{t\in I}|\varphi(t)-\varphi_n(t)|$$

$$\leq\ Kh\max_{t\in I}|\varphi(t)-\varphi_n(t)|$$

وحيث أن المتتابعة $\{\phi_n(x)\}$ تتقارب بانتظام إلى $\phi(t)$ على I، لأى $\varepsilon>0$ يوجد عدد صحيح N بحيث أن

$$\max_{t\in I}|\varphi(t)-\varphi_n(t)|<\frac{\varepsilon}{Kh}$$

لجميع $n\geq N$. وبالتالى لكل $n\geq N$ يكون لدينا

$$|\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))-f(t,\varphi_n(t))dt\ |<\varepsilon$$

وبهذا يتم البرهان.

نظرية (٣) (وحدوية الحل): لتكن f دالة متصلة وتحقق شرط لبشتز فى R إذا كان حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y'=f(x,y)\quad,\quad y(x_0)=y_0$$

موجودا فيكون حلا وحيداً.

البرهان: نفترض أن $\varphi(x)$، $\psi(x)$ حلان لمسألة القيمة الأبتدائية سوف نثبت أن $\psi(x)=\varphi(x)$ لجميع $x \in I$. ليكن

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt \tag{9}$$

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\psi(t))dt \tag{10}$$

لجميع $x \in I$. وبطرح (9) من (10) نحصل على

$$|\psi(x)-\varphi(x)|\leq\left|\int_{x_0}^{x} |f(t,\psi(t))-f(t,\varphi(t))|dt\right| \tag{11}$$

وباستخدام شرط لبشتز نحصل على

$$|\psi(x)-\varphi(x)|\leq K\left|\int_{x_0}^{x} |\psi(t)-\varphi(t)|dt\right| \tag{12}$$

وحيث أن كل من $\varphi(x)$، $\psi(x)$ دالة متصلة فإن $\psi(x)-\varphi(x)$ يكون دالة متصلة وبالتالى فهى محدودة على I أى أن

$$|\psi(x)-\varphi(x)| \leq C$$

حيث C ثابت ما. وبذلك يصبح (12) على الصورة

$$|\psi(x)-\varphi(x)|\leq CK\left|\int_{x_0}^{x} dt\right|=CK|x-x_0| \tag{13}$$

لجميع $x \in I$. سوف نثبت بالاستنتاج الرياضى ان

$$|\psi(x)-\varphi(x)|\leq CK^n|x-x_0|^n/n! \tag{14}$$

لجميع $x \in I$. ويكون واضحا من (13) أن (14) تكون متحققة عندما $n=1$. والأن نفترض أن (14) متحققة فإنه من (12)، (14) يكون لدينا

$$|\psi(x)-\varphi(x)|\leq\frac{CK^{n+1}}{n!}\left|\int_{x_0}^{x} |t-x_0|^n dt\right|=\frac{CK^{n+1}}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

لجميع $x \in I$.وهى نفس العلاقة (14) وذلك بإحلال $(n+1)$ بدلا من n عندما $|x-x_0| \le h$ نرى أن $\frac{K^n |x-x_0|^n}{n!} \le \frac{K^n h^n}{n!}$

وحيث أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} K^n h^n / n!$ تتقارب إلى e^{Kh}. فيكون من الضرورى أن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(Kh)^n}{n!} = 0$$

ينتج مباشرة من (14) أن

لأى n

$$|\psi(x) - \varphi(x)| \le \frac{C(Kh)^n}{n!},$$

وبالتالى

$$0 \le |\psi(x) - \varphi(x)| \le \lim_{n\to\infty} \frac{C(Kh)^n}{n!} = 0$$

لجميع $x \in I$. وبالتالى $|\psi(x)-\varphi(x)| = 0$ اى أن $\varphi(x) = \psi(x)$.

لجميع $x \in I$. وعلى ذلك تكون الدالة $\varphi(x)$ الحل الوحيد لمسألة القيمة الأبتدائية.

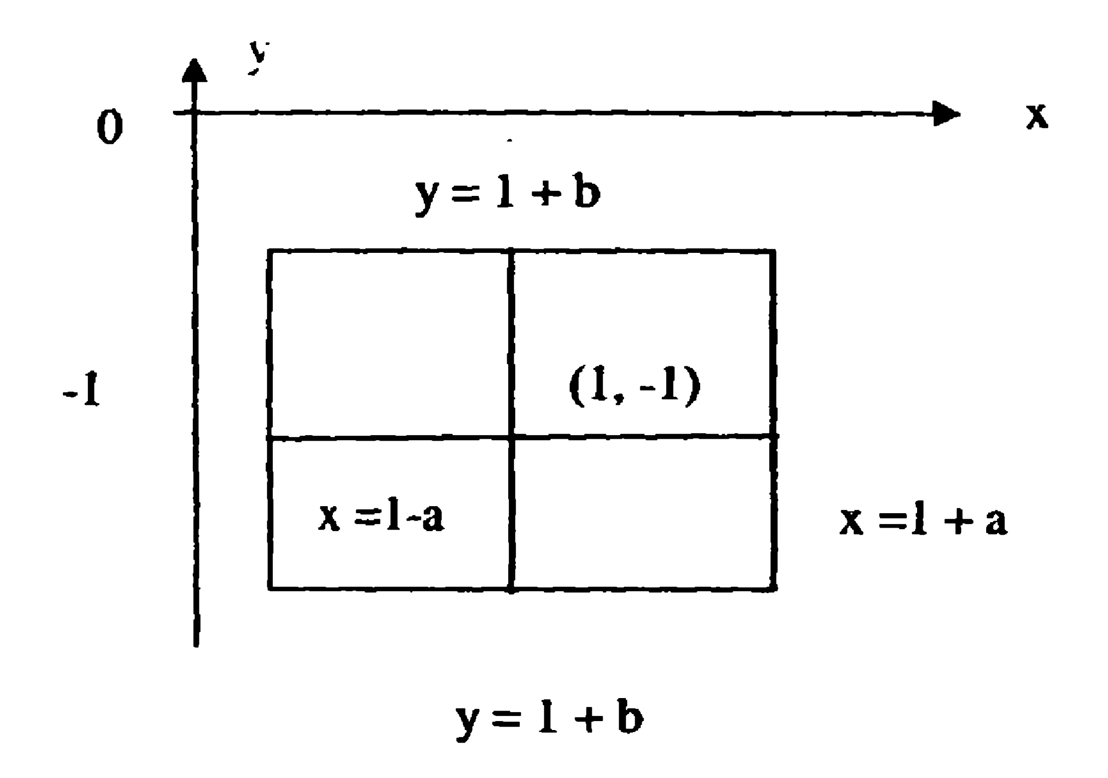
مثال (١): أوجد فترة وجود حل مسألة القيمة الابتدائية $y' = y^2, y(1) = -1$

الحل : يكون لدينا

$$f(x,y) = y^2 \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

وكل منهما متصلة لجميع قيم (x, y). وباستخدام نظرية وجود الحل نجد أن f تحقق شروط النظرية على المستطيل حول النقطة $(1, -1)$ كما فى الشكل

$$R : |x-1| < a, \ |y+1| < b$$

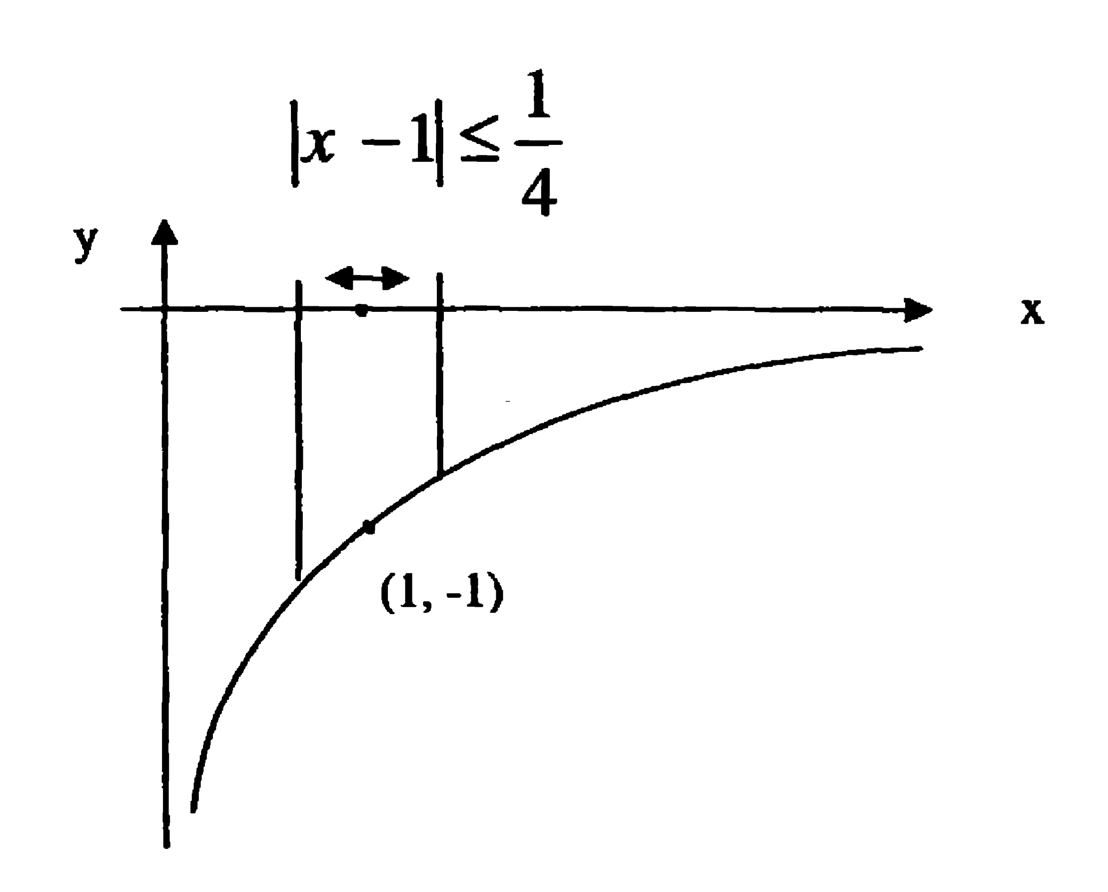


ليكن $M = \max|f(x,y)|$ لكل $(x,y)\in R$، $h = \min(a, b/M)$. فإن نظرية (٢) تؤكد أن مسألة القيمة الأبتدائية المعطاه لها حل وحيد على $|x-1| \le h$.

والآن في هذه الحالة $M = (-1-b)^2 = (b+1)^2$ وبالتالى $h = \min\left(a, \frac{b}{(b+1)^2}\right)$. ونعتبر الآن الدالة $F(b) = \frac{b}{(b+1)^2}$. ومن $F'(b) = \frac{1-b}{(b+1)^3}$ نرى أن أكبر قيمة للدالة $F(b)$، $b > 0$ يكون عندما $b = 1$ وعلى ذلك يكون $F(1) = \frac{1}{4}$ وبالتالى إذا كان $a \ge \frac{1}{4}$، $\frac{b}{(b+1)^2} \le a$، لجميع $b > 0$ وبالتالى $h = \frac{b}{(b+1)^2} \le \frac{1}{4}$ بغض النظر عن قيمة a. إذا كان $a < \frac{1}{4}$ فيكون بالتأكيد $h < \frac{1}{4}$. وبالتالى فى أى حالة $h \le \frac{1}{4}$. لكل $b = 1$، $a \ge \frac{1}{4}$ يكون

$$h = \min\left(a, \frac{b}{(b+1)^2}\right) = \min\left(a, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

وهى أحسن قيمة ممكنه من h طبقاً للنظرية. وعلى ذلك يكون من النظرية أن مسألة القيمة الأبتدائية لها حل وحيد على الفترة $\frac{3}{4} \le x \le \frac{5}{4}$. ومن جهة النظر الأخرى أن هذا لايعني وجود الحل فى هذه الفترة القصيرة. ويمكن تعريف الحل على فترة أطول تحتوى هذه الفترة القصيرة $|x-1| \le \frac{1}{4}$ التى اكدتها نظرية الوجود. وفى الحقيقة أن حل المسألة المعطاه هو $y = \frac{-1}{x}$ وهو معرف على الفترة $0 < x < \infty$ وله مشتقه متصلة على هذه الفترة.



مثال (٢) : عين فترة وجود الحل فى المثال السابق مع الشرط الابتدائى $y(1) = 1$.

الحل: بدون حل المعادلة يمكن اثبات وجود حل وحيد لها فى فترة $|x - x_0| = |x-1| \le h$. ليكن $a = b = 1$. فإن $f(x, y) = y^2 < 9 = M$ لجميع $|y - y_0| \le 1$، $y_0 = y(1) = 2$ وبالتالى $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \frac{1}{9}$.

فإن النظرية السابقة تضمن وجود حل وحيد للمسألة والذى يكون على الصورة $y(t)=\frac{2}{3-2x}$. وهذا الحل موجود ووحيد طالما $x\neq\frac{3}{2}$. بداية من $x_0=1$ نرى أن أكبر فترة لوجود الحل هى $|x-x_0|<\frac{1}{2}$. وبالتالى فإن قيمة $h=\frac{1}{9}$ ليست افضل قيمة ممكنة.

مثال (٣): اثبت أن مسألة القيمة الأبتدائية

$$y''+g(t,y)=0,\quad y(0)=y_0,\quad y'(0)=z_0$$

حيث g دالة متصلة فى منطقة ما D تحتوى $(0,y_0)$، تكافئ المعادلة التكاملية

$$y(t)=y_0+z_0t-\int_0^t (t-s)g(s,y(s))ds$$

الحل: ليكن $\phi(t)$ حلا لمسألة القيم الأبتدائية أى

$$\phi''+g(t,\varphi(t))=0$$

وبالتكامل مرتين نحصل على

$$\phi(t)=-\int_0^t \{\int_0^u g(s)\varphi(s)ds\}du+a+bt \qquad (1)$$

حيث $\phi(0)=y_0$ ، $\phi'(0)=z_0$ فأن $b=z_0$ ، $a=y_0$.

وبعكس ترتيب التكامل نحصل على

$$\int_0^t \{\int_0^u g(s,\varphi(s))ds\}du=\int_0^t (\int_s^t du)g(s,\varphi(s))ds$$

$$=\int_0^t (t-s)g(s,\varphi(s))ds \qquad (2)$$

وبالتعويض من (2) فى (1) نجد أن

$$\phi(t) = -\int_0^t (t-s) g(s, \varphi(s)) ds + y_0 + z_0 t$$

والآن نفترض أن ψ هو حل للمعادلة التكاملية فإن $\psi'(0) = z_0$ ، $\psi(0) = y_0$. وبالتالى فإن $\psi(t)$ تحقق الشروط الأبتدائية وبالاشتقاق مرتين واستخدام النظرية الأساسية فى التفاضل نجد أن

$$\psi'(t) = z_0 - \int_0^t g(s, \psi(s)) ds$$

$$\psi''(t) = -g(t, \psi(t))$$

وبالتالى فإن ψ هو حل لمسألة القيمة الابتدائية.

ملحوظة: إذا كانت $f(x,y)$ تحقق الشرط

$$|\partial f / \partial y| \le K \qquad \text{(i)}$$

لجميع قيم x و y فى النطاق المعطى لنفس الثابت K. ومن نظرية القيمة المتوسطة نجد أن

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) = (y_2 - y_1)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=\bar{y}}, y_1 < \bar{y} < y_2 \qquad \text{(ii)}$$

حيث (x, y_1) , (x, y_2) فى النطاق المعطى. والآن من (i)، (ii) نجد أن

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \le K |y_2 - y_1| \qquad \text{(iii)}$$

وهذا هو شرط لبشتز. ونلى ذلك أن شرط لبشتز (iii) يمكن استبداله بالشرط الأقوى (i).

نظرية (٤): إذا كان S إما المستطيل $|x - x_0| \le h, |y - y_0| \le K$ $(h, K > 0)$ أو الشريط (strip) $|x - x_0| \le h, |y| < \infty, h > 0$ وكذلك إذا كانت $f(x,y)$ دالة حقيقية معرفة على S وأن $\left|\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right| < K$ ، $(x,y) \in S$ لأى عدد موجب K فإن $f(x,y)$ تحقق شرط لبشتز على S بثابت لبشتز K.

البرهان: حيث

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\left|\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dy\right|$$

$$\le \int_{y_1}^{y_2} \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| |dy| \le K \int_{y_1}^{y_2} |dy|$$

وبالتالى

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le K\,|y_1-y_2|, \qquad (x,y_1),(x,y_2)\in S$$

مثبتاً أن $f(x,y)$ تحقق شرط لبشتز على S بثابت لبشتز K.

مثال (٤): أثبت أن $f(x,y)=xy^2$ تحقق شرط لبشتز على المستطيل $|x|\le 1, |y|\le 1$ ولكن لا تحققه على الشريط $|x|\le 1, |y|<\infty$.

الحل: بتطبيق شرط لبشتز حيث $f(x,y)=xy^2$ نجد أن

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|=|xy_2^2-xy_1^2|=|x||y_2+y_1||y_1-y_2| \qquad (1)$$

وبالتالى فى المستطيل $|x|\le 1, |y|\le 1$ فإن (1) تختزل إلى

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\le (1)(2)|y_2-y_1|$$

مثبتاً تحقق شرط لبشتز بثابت 2. ولكن على الشريط $|x|\le 1, |y|<\infty$.

يكون لدينا

$$\left|\frac{f(x,y_2)-f(x,y_1)}{y_2-0}\right|=|x||y_2|\to\infty$$

عندما $|y|\to\infty$ إذا كانت $|x|\neq 0$ مثبتاً عدم تحقق شرط لبشتز على الشريط المذكور.

مثال (٥): إذا كان R هو المستطيل $|x|\le a, |y|\le b$ أثبت أن الدالة $f(x,y)=x^2+y^2$ تحقق شرط لبشتز وأوجد ثابت لبشتز.

الحل: ليكن $(x,y_1),(x,y_2)\in R$ ، $f(x,y)=x^2+y^2$ فإن

$$\begin{aligned}|f(x,y_2)-f(x,y_1)|&=|(x^2+y_2^2)-(x^2+y_1^2)|\\&=|y_2^2-y_1^2|=|y_2+y_1||y_2-y_1|\\&\le 2b\,|y_2-y_1|\end{aligned}$$

مثبتا تحقق شرط لبشتز بثابت $2b$.

مثال (٦): اثبت أن اتصال $f(x,y)$ ليس كافيا لضمان وحدوية حل مسألة القيمة الأبتدائية $dy/dx=\sqrt{|y|},y(0)=0$ أو بعبارة أخرى اثبت أن مسألة القيمة الأبتدائية $dy/dx=\sqrt{|y|},y(0)=0$ قد لايكون لها حل وحيد بالرغم من كون $f(x,y)$ متصلة.

الحل: نعتبر مسألة القيمة الابتدائية

$$dy/dx=\sqrt{|y|},\quad y(0)=0 \tag{1}$$

من الواضح أن $f(x,y)=\sqrt{|y|}$ متصلة لجميع قيم y وأن y لها الحلين

$$y=0,y=\begin{cases}x^2/4 & ,\ x\ge 0\\ -x^2/4 & \ \ x<0\end{cases}$$

والآن سنثبت أن شرط لبشتز

$$\left|\frac{f(x,y_2)-f(x,y_1)}{|y_2-y_1|}\right|\le K \tag{2}$$

لم يتحقق فى منطقة تحتوى المستقيم $y=0$. فمثلا عندما $y_1=0$ ، y_2 موجبة فإن

$$\left|\frac{f(x,y_2)-f(x,y_1)}{|y_2-y_1|}\right|=\frac{\sqrt{y_2}}{y_2}=\frac{1}{\sqrt{y_2}}$$

(حيث $\sqrt{y_2}>0$) مثبتاً ان المقدار فى الطرف الأيسر للمتباينة (2) يمكن جعله كبيراً كما نريد باختيار y_2 صغيرة صغراً كافياً وهذا يتعارض مع المتباينة (2) لأن الطرف الأيسر فى (2) يجب أن لايزيد عن كمية ثابتة K.

مثال (٧): أثبت بمثال أن الدالة المتصلة يمكن أن لاتحقق شرط لبشتز على مستطيل ما.

الحل: كمثال نعتبر الدالة $f(x,y)=y^{2/3}$ على المستطيل $|x|\leq 1, |y|\leq 1$ من الواضح أن $f(x,y)$ متصلة فى المستطيل R. ولكن

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right|=\left|\frac{2}{3y^{1/3}}\right|\to\infty \qquad \text{فإن} \quad y\to 0 \quad \text{عندما} \qquad (2)$$

وحيث أن $y=0$ نقطة داخل المستطيل. فإن (2) تثبت أن شرط لبشتز غير متحقق للدالة $f(x,y)=y^{2/3}$ على المستطيل R.

١٢-٥ متباينة جرونويل Gronwall's inequality

إذا كانت $f(x)$، $g(x)$ دالتين غير سالبتين ومتصلتين لكل $x\geq x_0$، K ثابت موجب وكان

$$f(x)\leq K+\int_{x_0}^{x} g(s)f(s)ds \quad , \quad x\geq x_0$$

فإن

$$f(x)\leq K\exp(\int_{x_0}^{x} g(s)ds)$$

البرهان: من الافتراض

$$\frac{f(x)g(x)}{K+\int_{x_0}^{x} g(s)f(s)ds}\leq g(x)$$

وبالتكامل بالنسبة إلى x من x_0 إلى x نحصل على

$$\ln\left[K+\int_{x_0}^{x} g(s)f(s)ds\right]\leq\int_{x_0}^{x} g(s)ds$$

$$\ln\left[K+\int_{x_0}^{x} g(s)f(s)ds\right]-\ln K \le \int_{x_0}^{x} g(s)ds$$

وبالتالى

$$K+\int_{x_0}^{x} g(s)f(s)ds \le K\exp\int_{x_0}^{x} g(s)ds$$

أى أن

$$f(x) \le K\exp\int_{x_0}^{x} g(s)ds$$

وبذلك تثبت المتباينة.

نتيجة: إذا كان $f(x) \le K\exp\int_{x_0}^{x} f(s)ds$ حيث $f(x)$، K كما فى المتباينة السابقة فإن $f(x)\equiv 0$.

البرهان: ليكن $\varepsilon > 0$ فإن

$$f(x) < \varepsilon + K\int_{x_0}^{x} f(s)ds$$

وباستخدام المتباينة السابقة نحصل على

$$f(x) < \varepsilon\exp[K(x-x_0)] \quad , \quad x \ge x_0$$

وبأخذ النهاية عند $\varepsilon \to 0$ نحصل على $f(x)\equiv 0$ وبهذا يثبت المطلوب.

ملحوظة: يمكن استخدام متباينة جرونويل فى اثبات وحدوية حل مسألة القيمة الحدية السابقة كما يلى:

ليكن لدينا مسألة القيمة الحدية

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \quad , \quad y(x_0)=y_0 \qquad (1)$$

والتى تكافئ المعادلة التكاملية

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y(s))ds \qquad (2)$$

نفترض أن لمسألة القيمة الحدية (1) (المعادلة المكافئة (2)) حلين y_1, y_2 يحققان الشرط الابتدائى فإن

$$y_1=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y_1(s))ds$$

$$y_2=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y_2(s))ds$$

وبالطرح نجد أن

$$y_1-y_2=\int_{x_0}^{x} [f(s,y_1(s))-f(s,y_2(s))]ds$$

$$|y_1-y_2| \le \int_{x_0}^{x} |f(s,y_1(s))-f(s,y_2(s))| \; |ds|$$

وباستخدام شرط لبشتز نجد أن

$$|y_1-y_2| \le K\int_{x_0}^{x} |y_1(s)-y_2(s)| \; |ds|$$

وباستخدام متباينة جرونويل (مع ملاحظة عدم وجود ثابت مضاف قبل علامة التكامل) نجد ان

$$|y_1-y_2| \le 0.\exp(K|x-x_0|$$

أى أن $|y_1-y_2|=0$ وبالتالى $y_1(x)=y_2(x)$. وهو المطلوب.

نظرية (٥): اتصال الحل (أى الاعتماد على الشروط الأبتدائية) (Continuity).

لتكن f دالة متصلة على المستطيل $R: |x-x_0| \le a, \quad |y-y_0| \le b$ وتحقق شرط لبشتز. إذا كان فى مسألة القيمة الحدية.

$$y'=f(x,y) \quad , \quad y(x_0)=y_0$$

تغيرت القيمة الأبتدائية بكمية ثابتة مثلا $|y_0 - y_0^*| < \delta$

فإن الحل يتغير كذلك أى أن $|\varphi(x) - \varphi^*(x)| < \varepsilon$.

البرهان: حيث أن φ، φ^* حلان فى مسألتى قيمة إبتدائية ما

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt$$

$$\varphi^*(x) = y_0^* + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi^*(t))dt$$

وبطرح المعادلة الثانية من الأولى نحصل على

$$\varphi(x) - \varphi^*(x) = (y_0 - y_0^*) + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t)) - f(t, \varphi^*(t))dt$$

وباستخدام شرط لبشتز عندما $x \geq x_0$ نحصل على

$$|\varphi(x) - \varphi^*(x)| \leq |y_0 - y_0^*| + K\int_{x_0}^{x} |\varphi(t) - \varphi^*(t)|dt$$

$$< \delta + K\int_{x_0}^{x} |\varphi(t) - \varphi^*(t)|dt$$

وباستخدام متباينة جرونويل نحصل على

$$|\varphi(x) - \varphi^*(x)| \leq \delta e^{K|x - x_0|}$$

وعلى ذلك إذا اخترنا $\varepsilon = \delta e^{Kh}$ حيث $|x - x_0| \leq h$ نحصل على

$$|\varphi(x) - \varphi^*(x)| \leq \varepsilon$$

وهو المطلوب وهذا يثبت إتصال الحل مع تغير الشروط الآبتدائية.

١٢-٦ امثلة محلولة:

مثال (١): كون معنـنة تكاملية تكافئ المعادلة التفاضلية

$$y'' + \mu^2 y = g(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = z_0,$$

حيث g دالة متصلة في منطقة ما D تحتوى $(0, y_0)$ ، $\mu > 0$ ثابت.

الحل: نفترض أن ϕ حل لمسألة القيمة الأبتدائية المعطاة وحيث أن $y_0 \cos\mu t + \frac{z_0}{\mu}\sin\mu t$ حلا للمعادلة $y'' + \mu^2 y = 0$ وتحقق الشروط الأبتدائية. وبتغير البارامترات نجد أن ϕ تحقق المعادلة التكاملية.

$$\varphi(t) = y_0 \cos\mu t + \frac{z_0}{\mu}\sin\mu t + \int_0^t \frac{\sin\mu(t-s)}{\mu} g(s, \varphi(s))ds \qquad (1)$$

والأن نفترض أن ψ تحقق المعادلة (1) والاشتقاق مرتين نحصل على

$$\psi''(t) + \mu^2\psi(t) = g(t, \psi(t)), \quad \psi(0) = y_0, \psi'(t) = z_0$$

مثال (٢): كون الاختزال المتتالى للحل ϕ للمعادلة التفاضلية $y' = y$ حيث $y(0) = 1$ حيث $\frac{d}{dt}$ تمثلها $(')$.

الحل:

$$\varphi_0(0) = 1$$

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t ds = 1 + t$$

$$\varphi_2(t) = 1 + \int_0^t (1+s)ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

وبالتالى

$$\varphi_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^n}{n!}$$

فنحصل على

$$\varphi_{n+1}(t)=1+\int_0^t \varphi_n(s)ds$$
$$=1+t+\frac{t^2}{2}+\dots\frac{t^n}{n!}+\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

وهذه العلاقة صحيحة لجميع قيم n.

مثال (٣): اعتبر المعادلة التكاملية

$$y(t)=y_0+z_0t-\int_0^t (t-s)g(s,y(s))ds \qquad (1)$$

حيث $g(t,y)$ ، $\partial g/\partial y$ دوال متصلة على المنطقة $R:\{(t,y);\ |t|\le a, |y-y_0|\le b\}$. وليكن $|g(t,y)|\le M$ ، $|\partial g/\partial y|\le K$ لجميع $(t,y)\in R$. ونعرف $\varphi_0(t)=y_0$

$$\varphi_n(t)=y_0+z_0t-\int_0^t (t-s)g(s,\varphi_{n-1}(s))ds \quad , n=1,2,\dots$$

اثبت أن

(i) φ_0 معرفة تماماً لجميع $|t|\le\alpha$ حيث

$$\alpha=\min\left(a,\frac{b}{\tilde{M}}\right), \quad \tilde{M}=|z_0|+M\frac{a}{2}$$

(ii) $\{\varphi_n\}$ تتقارب إلى حل المعادلة التكاملية (1) على $|t|\le\alpha$.

ملحوظة: هذا المثال مع مثال (1) يثبت وجود حلول المعادلة التفاضلية

$$y''+g(t,y)=0, \quad y(0)=y_0, \quad y'(0)=z_0$$

الحل: (i) تكون $\varphi_n(t)$ معرفة إذا وإذا فقط وإذا كانت $g(s,\varphi_{n-1}(s))$ متصلة على $|s|\le\alpha$ وهذا يكون صحيحاً إذا وإذا فقط كان $|\varphi_{n-1}(s)-y_0|\le b$

وعلينا اثبات أن لجميع قيم n يكون $|\varphi_n(t)-y_0| \le b$ إذا كان $|t| \le \alpha$
ولكن $|\varphi_0(t)-y_0| \equiv 0 \le b$ إذا كان $|t| \le \alpha$.

وبافتراض أن

$$|\varphi_{n-1}(t)-y_0| \le b \quad \text{إذا كان} \quad |t| \le \alpha$$

فإن $|g(s,\varphi_{n-1}(s))| \le M$، لكل $|s| \le \alpha$ ويكون لدينا عندما $t>0$ (بالمثل عندما تكون $t<0$)

$$|\varphi_0(t)-y_0| = |z_0 t - \int_0^t (t-s) g(s,\varphi_{n-1}(s) ds|$$

$$\le |z_0 t| + M \int_0^t |t-s| ds$$

$$= |z_0 t| + M \frac{t^2}{2} = |t|.[|z_0| + M \frac{|t|}{2}]$$

$$\le |t| [|z_0| + M \frac{a}{2}] = |t| \tilde{M}$$

$$\le \alpha \tilde{M} \le \frac{b}{\tilde{M}} \tilde{M} = b$$

وبالاستنتاج (الاستقراء) الرياضى تكون جميع φ_n معرفة تماماً.

(ii) ليكن $r_n(t) = |\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)|$ وسوف نثبت أن

$$r_n(t) \le \tilde{M} K \frac{|t|^{2n+1}}{(2n+1)!}, (|t| \le \alpha)$$

وباستخدام الاستنتاج الرياضى نجد أن

$$r_0(t) = |\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| = |z_0 t - \int_0^t (t-s) g(s,y_0) ds|$$

$$\le |z_0 t| + M \int_0^t |t-s| ds \le |t|.[|z_0| + M \frac{t}{2}] \le |t| \tilde{M}$$

وبافتراض $r_{n-1}(t) \le \tilde{M}K^{n-1}\frac{|t|^{2n+1}}{(2n-1)!}$ واستخدام نظرية القيمة المتوسطة وفرضيات الاستنتاج الرياضي يكون لدينا

$$r_n(t) = |\int_0^t (t-s)[g(s,\varphi_0(s)) - g(s,\varphi_{n-1}(s))ds]|$$

$$\le K\int_0^t |t-s|.|\varphi_n(s)-\varphi_{n-1}(s)|ds$$

$$\le K\int_0^t |(t-s)|\, r_{n-1}(s)ds$$

$$\le \tilde{M}\frac{K^n}{(2n-1)!}\int_0^t |t-s||s|^{2n-1}ds$$

$$\le \frac{\tilde{M}K^n}{(2n-1)!}\frac{|t|^{2n+1}}{2n(2n+1)} = \tilde{M}K^n\frac{|t|^{2n+1}}{(2n+1)}.|t| \le \alpha$$

وبالتالى تكون المتسلسلة

$$\sum_1^{\infty} |\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)| = \sum_0^{\infty} r_n(t) < \alpha, \quad |t| \le \alpha$$

حيث أن كل حد يسوده المقدار $\tilde{M}K^n\frac{|t|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ وبالتالى تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1} (\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t))$ وبالتالى المتتابعة $\{\varphi_n(t)\}$ تتقارب تقاربا مطلقا ومنتظما لكل $|t| < \alpha$ إلى دالة نهاية $\varphi(t)$ والتى تحقق المعادلة (1) حيث

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(t) = y_0 + z_0 t - \lim_{n\to\infty}\int_0^t (t-s)g(s,\varphi_{n-1}(s))ds$$

$$= y_0 + z_0 t - \int_0^t (t-s)g(s,\varphi(s))ds$$

مثال (٤): اذكر وبرهن نظرية الوحدوية لحل مسألة القيمة الأبتدائية

$$y'' + g(t, y) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = z_0$$

حيث g دالة معطاه معرفة على $R : |t| \le \alpha, |y - y_0| < h$

الحل: من المثال (1) تكون مسألة القيمة الحدية المعطاة مكافئة للمعادلة التكاملية.

$$\varphi(t) = y_0 + z_0 t - \int_0^t (t - s) g(s, \varphi(s)) ds \qquad (1)$$

ليكن φ_1، φ_2 حلين للمعادلة (1) على الفترة $|t| \le \alpha$ ونفترض أن g تحقق شرط لبشتز على R

$$|g(t, s) - g(t, y_1)| \le K |y - y_1|$$

وبالتالى

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| = |\int_0^t (t - s)(g(s, \varphi_1(s)) - g(s, \varphi_2(s)) ds|$$

$$\le K \int_0^t |t - s| |\varphi_2(s) - \varphi_1(s)| ds$$

$$\le K\alpha \int_0^t |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| ds$$

وباستخدام متباينة جرونويل نحصل على

$$|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| \le 0. \exp \int_0^t K\alpha = 0$$

وعلى ذلك يكون $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. وهذا يثبت النظرية التالية.

نظرية: إذا كانت g، $\frac{\partial g}{\partial y}$ دوال متصلة على المستطيل

$$R : \{(t, y) \| t| \le \alpha \, , \, |y - y_0| \le b |\}$$

فإنه يوجد حل وحيد لمسألة القيمة الابتدائية

$$y'' + g(t, y) = 0 \, , \, y(0) = y_0, y'(0) = z_0$$

مثال (٥): ليكن g, f دالتين معرفتين على النطاق D وتحقق شروط نظرية وجود الحل. وليكن $\psi(t), \varphi(t)$ حلين للمعادلتين $y' = f(t, y)$ و $y' = g(t, y)$ على الترتيب بحيث أن $\varphi(t_0) = \eta_0$ ، $\psi(t_0) = \eta_1$ وافترض انهما معرفتان على $a < t < b$ ، $|f(t, y) - g(t, y)| < \varepsilon$ على D. اثبت أن

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq |\eta_0 - \eta_1| e^{K|t - t_0|} + \varepsilon(b - a) e^{K|t - t_0|}$$

الحل: كما في المثال السابق (4) يكون لدينا

$$\varphi(t) = \eta_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) ds$$

$$\psi(t) = \eta_1 + \int_{t_0}^{t} g(s, \psi(s)) ds$$

وعليه فإن

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq |\eta_0 - \eta_1| + |\int_{t_0}^{t} [f(s, \varphi(s)) - g(s, \psi(s))] ds|$$

$$+ |\int_{t_0}^{t} [f(s, \varphi(s)) - g(s, \psi(s))] ds|$$

$$\leq |\eta_0 - \eta_1| + (b - a)\varepsilon + K \int_{t_0}^{t} |\varphi(s) - \psi(s)| ds$$

وباستخدام متباينة جرونويل نحصل على

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \{|\eta_0 - \eta_1| + (b - a)\varepsilon\} \exp K |t - t_0|$$

وهو المطلوب.

تمارين

١- استخدم طريقة بيكارد لحل مسائل القيم الحدية التالية حتى التقريب الثالث

a- $dy/dx = 2xy, y(0)=1$

b- $dy/dx = 3e^x + 2y, y(0)=0$

c- $dy/dx = e^x + y^2, y(0)=0$

d- $dy/dx = 2x + y^2, y=0$ يكون $x=0$ عند

e- $dy/dx = x - y^2, y(0)=0$

f- $dy/dx = 2-(y/x), y(1)=2$

g- $dy/dx = y-2, y(0)=2$

h- $dy/dx = x+z, dz/dx = x - y^2, y(0)=2, z(0)=1$

i- $dy/dx = 2x+z, dz/dx = 3xy + x^2 z, y(0)=2, z(0)=0$

٢- اثبت أن

(i) $|y'|+|y|=0, y(0)=1$ ليس لها حل

(ii) $y'=x, y(0)=1$ لها حل وحيد

(iii) $y'=(y-1)/x, y(0)=1$ لها عدد لانهائى من الحلول

٣- إذا كان $f(x,y)=y^{2/3}$ اثبت أن شرط لبشتز غير متحقق فى أى نطاق يحتوى نقطة الأصل لمسألة القيمة الحدية $dy/dx = f(x,y)$, $y(0)=0$

٤- إذا كان S هو المستطيل $|x|\le a, |y|\le b$ اثبت أن الدالة $f(x,y) = x\sin y + y\sin x$ تحقق شرط لبشتز، ثم أوجد شروط لبشتز

٥- ادرس وجود ووحدوية حل المعادلات

(i) $y'=y^2, y(1)=-1$

(ii) $y'=y^{1/3}, y(0)=0$

(iii) $y'=y^{4/3}, y(x_0)=y_0$

(iv) $y'=y^2, y(1)=1$

٦- اثبت أنه إذا كانت φ حلا للمعادلة التكاملية

$$y(t)=e^{it}+\alpha\int_t^{\infty}\sin(t-s)\frac{y(s)}{s^2}ds$$

فإن φ تحقق مسألة القيمة الحدية $y''+\left(1+\frac{\alpha}{t^2}\right)y=0$

(تنبيه: استخدم طريقة الاشتقاق تحت علاقة التكامل)

٧- كون الاختزال المتتالى للحل φ للمعادلة $y'=y$ حيث $\varphi_0(t)=\cos t$

٨- اعتبر المعادلة التكاملية

$$y(t)=e^{it}+\alpha\int_t^{\infty}\sin(t-s)\frac{y(s)}{s^2}ds$$

كما فى المثال (١) من المسائل المحلولة. وتعرف التقريب المتتالى

$$\varphi_0(t)=0$$

$$\varphi_n(t)=e^{it}+\int_t^{\infty}\sin(t-s)\frac{\varphi_{n-1}(s)}{2}ds,\quad (1\le t<\infty)$$

(i) اثبت بالاستنتاج الرياضى أن

$$|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)|\le\frac{|\alpha|^{n-1}}{(n-1)!t^{n-1}},\quad 0\le t<\infty, n=1,2,\ldots$$

(ii) اثبت أن نهاية الدالة تحقق المعادلة التكاملية

(iii) باستخدام

$$|\varphi_n(t)|\le|\varphi_1(t)-\varphi_0(t)|+\ldots+|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)|$$

والتقدير فى (i) للقيمة $|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}|$ اثبت ان نهاية الدالة تحقق

$$|\varphi(t)|\le e^{|\alpha|}\quad ,\quad 1\le t<\infty$$

٩- ليكن $\varphi(t)$ حلا للمعادلة $y'=t^2+y^2$ على $0\le t\le 1$

$\varphi(0)=0$. اثبت أن

$$|\varphi(t)-\left(\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{63}t^7\right)| \le 0.00155t^8 \ , \ (0\le t\le 1)$$

١٠- لتكن $q(t)$ دالة لها مشتقات متصلة على $0\le t\le \pi$ اثبت أن المعادلة التفاضلية $-y''+q(t)y=\lambda y$ لها حل $\varphi_1(t,\lambda)$ على $0\le t\le\pi$ بحيث أن

$$\varphi_1(t,\lambda)=(\sin\sqrt{\lambda}t/\sqrt{\lambda})+M_1$$

$$\varphi_1(t,\lambda)=\cos(\sqrt{\lambda}t)+M_2$$

حيث

$$|M_1|\le K/\lambda \ , \ |M_2|\le K/\sqrt{\lambda}, 0\le t\le\pi$$

لثابت ما K.

١١- اوجد حل المعادلة التكاملية

$$\varphi'(t)=t+\int_0^t \varphi(t-\tau)\cos\tau d\tau, \varphi(0)=4$$

١٢- اوجد الحل الوحيد لكل من

(i) $xy''+2y'=0 \ , \ y(-1)=0 \ , \ y'(-1)=2$

(ii) $x^2y''-2xy'+2y=6 \ , \ y(1)=1 \ , \ y'(1)=4$

(iii) $x^2y''-xy'+5y=0 \ , \ y(1)=1 \ , \ y'(1)=2$

١٣- اوجد ثلاث تقريبات لحلول المعادلات التفاضلية التالية

(i) $x'=x^2, \ x(0)=1,$ (ii) $x'=e^x, \ x(0)=0,$

(iii) $x'=\dfrac{x}{1+x^2}, \ x(0)=1$

١٤- اثبت نظرية بيانو (Peano's) لوجود الحل: لتكن f دالة متصلة على المستطيل $|x-x_0|\le h, |y-y_0|\le K$ و $|f(x,y)|\le M$. اثبت أنه يوجد

على الأقل حل واحد φ بحيث أن $\varphi' = f(x, \varphi)$ على الفترة $|x - x_0| \le \min(h, k/M')$ وتحقق الشرط الابتدائى $y(x_0) = y_0$

١٥- اعتبر مسألة القيمة الأيتدائية $x(1) = 3$ ، $y' = x^2$ اثبت أن تقريبات بيكارد تتقارب إلى حل وحيد لهذه المسألة.

١٦- اعتبر المعادلة $x'' = f(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1$ حيث f معرفة على المستطيل $R: \; |x - x_0| \le b \; , \; |t| \le a$

اثبت أن للمعادلة حل وحيد تحت إفتراضات مناسبة.

الباب الثالث عشر

النظم الخطية

Linear Systems

١٣-١ **مقدمة**: سنتعرض فى هذا الباب لدراسة النظم الخطية من حيث سلوك حلولها ومحدوديتها وايجاد المصفوفة الاساسية مع دراسة العلاقة بين سلوك حلول النظام الخطى المتجانس والنظام الخطى غير المتجانس.

١٣-٢ النظام الخطى المتجانس: Homogeneous linear system

لنفترض أن لدينا متجها له $\underline{x}$ من المركبات نعتبر النظام

$$\underline{x}' = A(t)\underline{x} \qquad (1)$$

حيث $A(t)$ مصفوفة $\underline{x}' = \frac{d\underline{x}}{dt}$, سوف نسرد النظرية التالية بدون برهان وهو متروك للقارئ

نظرية (١): إذا كان $a_{ij}(t)$ متصلة على فترة J فإنه يوجد حل وحيد للنظام (1) يحقق الشرط الابتدائى

$$\underline{x}(t_0) = \underline{E} \qquad (2)$$

لأى $t_0 \in J$ ، حيث $\underline{E}$ متجه ثابت معطى.

والآن سنركز إنتباهنا على خواص معينة للنظم الخطية والتى سبق إثباتها.

نظرية (٢): إذا كان $\underline{\varphi}_1$ ، $\underline{\varphi}_2$ ،...، $\underline{\varphi}_n$ حلول النظام (1) فإن أى إرتباط خطى

$$\underline{\varphi}(t) = c_1\underline{\varphi}_1 + c_2\underline{\varphi}_2 + \ldots + c_n\underline{\varphi}_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\,\underline{\varphi}_i$$

يكون ايضاً حلا للنظام لأى ثوابت c_i حيث $i = 1, 2, \ldots, n$

نظرية (٣): ليكن $\underline{\varphi}_j$ حلول النظام (1) وتحقق $\underline{\varphi}_j(t_0) = \underline{E}_j$ حيث $\underline{E}_j$ متجهات مستقلة خطياً فإن $\underline{\varphi}_j$ تكون مستقلة خطياً.

نظرية (٤): ليكن $\underline{\phi}_j$، n من الحلول المستقلة خطياً للنظام (1). فإن لكل $\underline{\phi}$ يوجد ارتباط خطى وحيد للحلول $\underline{\phi}_j$، $j = 1,2,...n$

البرهان: ليكن $\underline{\phi}$ أى حل للنظام (1) يحقق $\underline{\phi}(t_0) = \underline{E}$. واعتبر $\underline{\varphi}_j(t_0) = \underline{E}_j$. وحيث أن $\underline{E}_j$ مستقلة خطياً فإنه يوجد c_j بحيث أن

$$\underline{E} = c_1\underline{E}_1 + c_2\underline{E}_2 + ... + c_n\underline{E}_n$$

وبالتالى تكون الدالة

$$c_1\underline{\phi}_1 + c_2\underline{\phi}_2 + ... + c_n\underline{\phi}_n$$

حلا للنظام (1) والتى تأخذ القيمة $\underline{E}$ عندما $t = t_0$. ومن نظرية الوحدوية يجب أن تكون هذه الدالة $\underline{\phi}$. وبالتالى

$$\underline{\phi} = c_1\underline{\phi}_1 + c_2\underline{\phi}_2 + ... + c_n\underline{\phi}_n \qquad (3)$$

وبايجاز يمكن أن ننص أن مجموعة الحل للنظام (1) تكون المتجه ذا البعد n على المجال المركب. ومجموعة الحلول المستقلة $\{\underline{\phi}_j\}$ يقال أنها تكون اساس أو مجموعة أساسية (basis or fundamental set).

تعريف (١): تسمى الدالة المصفوفية Φ التى متجه أعمدتها $\underline{\phi}_j$ بأنها مصفوفة الحل (solution matrix) للنظام على الفترة J. إذا كانت $\underline{\phi}_j$ متجهات مستقلة خطياً فإن Φ تسمى بالمصفوفة الأساسية (fundamental matrix) للنظام على I.

ومن الواضح أن Φ هى مصفوفة الحل إذا وفقط إذا كان

$$\Phi' = A(t)\Phi \tag{4}$$

إذا كان $\Phi(t_0)=I$، I مصفوفة الوحدة، فإن Φ تسمى بالمصفوفة الأساسية القياسية (standard fundamental matrix).

يوجد اختبار بسيط لمعرفة ما إذا كانت مصفوفة الحل هى المصفوفة الاساسية أما لا. سنسرد لو لا متطابقة آبل أو صيغة ليوفيل (Abel's or Liouville).

نظرية (٥): ليكن Φ مصفوفة الحل للنظام (1) على J. فإنه لأى $t_0 \in J$.

لكل $t \in J$

$$\det\Phi(t) = \det\Phi(t_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t} \sum a_{ii}(\tau)d\tau\right]$$

البرهان: ليكن $\underline{\phi}_j$ متجه عمود فى Φ. ليكن ϕ_{ij} عناصر $\underline{\phi}_j$ وبالتالى يمكن تمثيل النظام (1) على الصورة

$$\phi'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\phi_{kj}, \quad i = 1,2,\dots,n \tag{5}$$

باشتقاق المحددة بالنسبة إلى t نحصل على

$$(\det\Phi)' = \begin{vmatrix} \varphi'_{11} & \varphi'_{12}\cdots\varphi'_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22}\cdots\varphi_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2}\cdots\varphi_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12}\cdots\varphi_{1n} \\ \varphi'_{21} & \varphi'_{22}\cdots\varphi'_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2}\cdots\varphi_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12}\cdots\varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22}\cdots\varphi_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \varphi'_{n1} & \varphi'_{n2}\cdots\varphi'_{nn} \end{vmatrix}$$

ومن (5) يكون لدينا

$$(\det\Phi) = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\phi_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\phi_{kn} \\ \phi_{21} & \cdots & \phi_{2n} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \phi_{n1} & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1n} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}\phi_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}\phi_{kn} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \phi_{n1} & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+\dots+\begin{vmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \cdots & \phi_{2n} \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\phi_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\phi_{kn} \end{vmatrix}$$

ومن عمليات صف أولية (بضرب الصف الثانى فى a_{11} والثالث فى a_{13} ،... ، وطرح مجموع $(n-1)$ صفوف الأخيرة من الأول) نرى أن المحدد الأول هو $a_{11}\det\Phi$. وبطريقة مماثلة نحصل على

$$(\det\Phi)' = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,(\det\Phi)$$

وهى معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ويكون حلها

$$\det\Phi(t) = \det\Phi(t_0)\exp[\int_{t_0}^{t} \sum a_{ii}(\tau)d\tau] \qquad (6)$$

وبهذا يتم البرهان.

ويجب ملاحظة أن $\det\Phi(t_0)$ اختيارى اما $\det\Phi(t)\neq 0$ واما $\det\Phi(t)=0$ لجميع $t\in J$.

نظرية (٦): تكون Φ مصفوفة أساسية للنظام (1) إذا وفقط إذا كان $\det\Phi(t)\neq 0$ لكل $t\in J$.

البرهان: ليكن $\underline{\varphi}$ أى حل للنظام (1). وحيث أن $\underline{\varphi}_j$ متجهات اعمدة مستقلة خطيا لمصفوفة الحل Φ فاننا نعتبر

$$\underline{\varphi} = c_1\underline{\varphi}_1 + c_2\underline{\varphi}_2 + \dots + c_n\underline{\varphi}_n$$

حيث c_j ليست كلها أصفارا، فإنه يمكننا أن نرى

$$\underline{\varphi} = \Phi\underline{c}$$

حيث $\underline{c}$ متجه عمود مركباته $c_1, c_2, ..., c_n$. لبعض $t_0 \in J$ يكون هذا نظام من n من المعادلات ذات n مجاهيل c_j. ويكون الحل موجودا وبالتالى $\det \Phi(t_0) \neq 0$ وعلى ذلك من (6) يكون $\det \Phi(t) \neq 0$، $t \in J$ ، فانه يلى مباشرة أن $\underline{\varphi}_j$ تكون مستقلة خطياً لأى $t \in J$ وبالتالى فإن Φ تكون مصفوفة أساسية.

ملحوظة: يلاحظ أنه محدد المصفوفة قد يكون صفرا تطابقيا على فترة ما بالرغم من كون المتجهات العمودية مستقلة خطياً وهذا يتضح من المثال

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

نظرية (٧): إذا كان Φ مصفوفة أساسية للنظام (١) فيكون كذلك Φc، حيث c مصفوفة ثابتة غير شاذة. وتكون المصفوفة الأساسية للنظام (1) من هذا النوع لمصفوفة غير شاذة c.

والبرهان متروك للقارئ.

نظرية (٨): يعطى حل النظام (1) الذى يحقق الشرط الابتدائى $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ بالعلاقة $\underline{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\underline{x}_0$ حيث $\Phi(t)$ هى المصفوفة الأساسية للنظام (1).

البرهان: ليكن الحل على الصورة

$$\underline{x}(t) = \Phi(t)\underline{a} \tag{7}$$

حيث $\underline{a}$ متجه ثابت ومن الشرط الابتدائى $x_0 = \Phi(t_0)\underline{a}$. وأعمدة المصفوفة $\Phi(t_0)$ (كأعمدة من الثوابت) مستقلة خطياً وعلى ذلك يكون للمصفوفة $\Phi(t_0)$

معكوس وهو $\Phi^{-1}(t_0)$ وعلى ذلك $\underline{a}=\Phi^{-1}(t_0)\underline{x}_0$ ونتتج النظرية من (7) أى $\underline{x}(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\underline{x}_0$.

مثال (١): تأكد من أن $\begin{pmatrix} e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} 2 \\ e^{t} \end{pmatrix}$ حل خاص للنظام

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^{t} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

واوجد الحل $\underline{x}(t)$ بحيث أن $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

الحل: بالتعويض المباشر نتأكد من أن الدالتين المعطيتين تحققان النظام وهما مستقلان خطياً وبالتالى يكون

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix} 2 & e^{-t} \\ e^{t} & 1 \end{pmatrix}$$

مصفوفة أساسية. ويكون لدينا

$$\Phi(0)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad \underline{\Phi}^{-1}(0)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

وبالتالى

$$x(t)=\begin{pmatrix} 2 & e^{-t} \\ e^{t} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-e^{-t} \\ 2e^{t}-1 \end{pmatrix}$$

٣-١٣ حل النظام الخطى غير المتجانس:

ليكن لدينا النظام الخطى غير المتجانس

$$\underline{\dot{x}}=A(t)\underline{x}+\underline{f}(t) \qquad (1)$$

حيث $\underline{f}(t)$ متجه متصل على $-\infty<t<\infty$. وتكون المتعادلة المتجانسة المناظرة هى

$$\underline{\dot{\varphi}} = A(t)\underline{\varphi} \qquad (2)$$

تكون الخواص التالية متحققة:

(i) ليكن $\underline{x} = \underline{x}_p(t)$ أى حل للنظام (1) (يسمى بالحل الخاص) وأن $\underline{\varphi} = \underline{\varphi}_c(t)$ أى حل للنظام (2) (يسمى بحل الدالة المتممة) فإن $\underline{x}_p(t) + \underline{\varphi}_c(t)$ يكون حلا للنظام (1)

(ii) إذا كان $\underline{x}_{p_1}(t)$ ، $\underline{x}_{p_2}(t)$ حلين للنظام (1) فإن $\underline{x}_{p_1}(t) - \underline{x}_{p_2}(t)$ يكون حلا للنظام (2). ويكون لدينا النظرية التالية.

نظرية (١): ليكن $\underline{x}_p$ أى حل خاص للنظام (1). فإن كل حل لهذه النظام يكون على الصورة $\underline{x}(t) = \underline{x}_p(t) + \underline{\varphi}_c(t)$ حيث $\underline{\varphi}_c$ حل للدالة المتممة والعكس صحيح.

مثال (١): لوجد جميع حلول النظام

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = -x_1 + t \qquad (3)$$

الحل: النظام المتجانس المناظر هو $\dot{\varphi}_1 = \varphi_2, \quad \dot{\varphi}_2 = -\varphi$

والذى يناظر $\varphi_1'' + \varphi_1 = 0$ والذى له حلان هما $\varphi_1 = \cos t, \sin t$ وعلى ذلك يكون $\varphi_2 = -\sin t, \cos t$. وبذلك يكون حلا النظام المتجانس هما $\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ ويكون الحل فى صورة مصفوفة كما يلى

$$\underline{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

حيث a_1، a_2 ثابتان. ويمكن أن نتأكد من أن $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ حل خاص للنظام (3) وعلى ذلك يكون جميع حلول النظام (3) هي

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

نظرية (٢): يعطى حل النظام $\dot{\underline{x}} = A(t)\underline{x} + \underline{f}(t)$ مع الشرط الابتدائى $\underline{x}(t_0) = x_0$ بالعلاقة

$$\underline{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\underline{x}_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\underline{f}(s)ds \qquad (4)$$

حيث $\Phi(t)$ هى مصفوفة الحل الاساسية للنظام $\dot{\underline{\varphi}} = A(t)\underline{\varphi}$.

البرهان: ليكن $\underline{x}(t)$ هو الحل المطلوب والذى يكون له الصورة المفترضه

$$\underline{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\{\underline{x}_0 + \underline{\varphi}(t)\} \qquad (5)$$

وحيث أن $\Phi(t)$، $\Phi^{-1}(t)$ موجودان كل منهما غير شاذ. ومن الشرط الابتدائى $x(t_0) = \underline{x}_0$ أو $\underline{x}_0 + \underline{\varphi}(t_0)$ من (5) وبالتالى

$$\underline{\varphi}(t_0) = \underline{0} \qquad (6)$$

ولايجاد المعادلة التى تتحقق بها $\underline{\varphi}(t)$ نعوض فى المعادلة (5) والتى تؤول إلى

$$\dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(t_0)\{\underline{x}_0 + \underline{\varphi}(t)\} + \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\dot{\underline{\varphi}}(t)$$
$$= A(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\{\underline{x}_0 + \underline{\varphi}(t)\} + \underline{f}(t) \qquad (7)$$

وحيث أن $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$ فإن (7) تؤول إلى

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\dot{\underline{\varphi}}(t) = \underline{f}(t)$$

وبالتالى

$$\underline{\dot{\varphi}}(t) = \Phi(t_0)\Phi^{-1}(t)\underline{f}(t)$$

حيث حلها يحقق (6) ويكون على الصورة

$$\underline{\varphi}(t) = \Phi(t_0)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\underline{f}(s)ds$$

وعلى ذلك باستخدام (5) يكون الحل للنظام غير المتجانس هو

$$\underline{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\underline{x}_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\underline{f}(s)ds$$

١٣-٤ النظام ذو المعاملات الثابتة System with constant coefficients

سندرس الأن النظام غير المتجانس حيث A مصفوفة ثابتة.

تمهيدية (١): ليكن $\Phi(t)$ مصفوفة أساسية للنظام $\underline{\dot{x}} = A\underline{x}$، فإنه لأى بارامترين s، t_0 يكون

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(s) = \Phi(t-s+t_0)\Phi^{-1}(t_0) \qquad (1)$$

وعلى وجه الخصوص

$$\Phi(t)\underline{\Phi}^{-1}(s) = \Phi(t-s)\Phi^{-1}(0) \qquad (2)$$

البرهان: حيث $\dot{\Phi} = A\underline{\Phi}$ فإننا نعرف $U(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$ وعليه فإن $\dot{U} = AU(t)$ ، $U(s) = I$. والأن نعتبر $V(t) = \Phi(t-s+t_0)\Phi^{-1}(t_0)$ وبالتالى $\dot{V}(t) = AV(t)$، (لأن A مصفوفة ثابتة $\Phi(t-s+t_0)$, $\Phi(t)$ تحققان نفس المعادلة) , $V(S) = I$. وحيث أن U، V تحققان نفس النظام ونفس الشروط الابتدائية فان من نظرية الوحدوية ينتج أن $U = V$

نظرية (١): ليكن A مصفوفة ثابتة. فإن حل النظام $\underline{\dot{x}} = A\underline{x} + \underline{f}(t)$ مع الشرط الابتدائى $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ يعطى بالعلاقة

$$\underline{x}(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\underline{x}_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t-s+t_0)\Phi^{-1}(t_0)\underline{f}(s)ds \tag{3}$$

حيث Φ مصفوفة الحل الأساسية للنظام $\dot{\underline{x}}=A\underline{x}$. وعلى وجه الخصوص إذا كان $\Psi(t)$ مصفوفة الحل الأساسية تحقق $\Psi(0)=I$ فإن

$$\underline{x}(t)=\Psi(t)\underline{x}_0+\int_{0}^{t}\Psi(t-s)\underline{f}(s)ds \tag{4}$$

البرهان: مباشر من التمهيدية (١) والمعادلة (4) من البند السابق.

مثال (١): عبر عن حل المعادلة $\ddot{x}-x=h(t)$ حيث $x(0)=0$، $\dot{x}(0)=1$

الحل: المعادلة تكافيء النظام : $\dot{x}=y,\ \dot{y}=x+h(t)$ أي

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\h(t)\end{pmatrix}=A\underline{x}(t)+\underline{f}(t)$$

وكما سبق نجد أن نصفوفة الحل الأساسية للنظام المتجانس

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}e^{t}&e^{-t}\\e^{t}&e^{-t}\end{pmatrix}\quad,\quad \Phi(0)=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix},\Phi^{-1}(0)=\begin{pmatrix}1/2&1/2\\1/2&-1/2\end{pmatrix}$$

ويكون

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{t}&e^{-t}\\e^{t}&-e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2&1/2\\1/2&-1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+$$

$$+\int_0^t\begin{pmatrix}e^{t-s}&e^{-t+s}\\e^{t-s}&-e^{-t+s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2&1/2\\1/2&-1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\h(s)\end{pmatrix}ds$$

$$=\begin{pmatrix}\sinh t\\ \cosh t\end{pmatrix}+\int_0^t\begin{pmatrix}h(s)\sinh(t-s)\\h(s)\cosh(t-s)\end{pmatrix}ds$$

ملحوظة (١): يكون من الصعب ايجاد مصفوفة الحل الأساسية $\Phi(t)$ إذا كان A دالة فى متغير حيث أن حل المعادلات التى تعتمد عليه يكون من الصعب

حلها. أما فى الحالة التى تكون فيها A مصفوفة ثابتة فيمكن الحصول على الحل بدلالة الدوال الأولية.

اعتبر النظام الخطى

$$\underline{\dot{x}} = A\underline{x} \tag{5}$$

حيث A ثابتة ذات عناصر حقيقية. نبحث عن الحل على الصورة

$$\underline{x} = \underline{r}e^{\lambda t} \tag{6}$$

حيث λ ثابت. ولتحقيق (5) يجب أن يكون لدينا

$$A\underline{r}e^{\lambda t} - \lambda \underline{r}e^{-\lambda t} = (A - \lambda I)\underline{r}e^{\lambda t} = 0$$

أو

$$(A - \lambda I)\underline{r} = 0 \tag{7}$$

باعطاء قيمة للثابت λ فإن هذا يكافئ معادلات خطية للمتجه $\underline{r}$ المناظر ويكون له حل غير صفرى إذا كان

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{8-a}$$

أى

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{8-b}$$

المعادلة (8-a) كثيرة حدود من درجة n فى λ وتسمى بالمعادلة المميزة كما يسمى $\underline{r}$ بالمتجه الذاتى المناظرة لقيمة λ التى تسمى قيمة ذاتية أو مميزة.

مثال (١): اوجد المصفوفة الأساسية للنظام

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_3, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = x_2$$

الحل: نضع النظام على الصورة $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$ حيث

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

وتكون المعادلة المميزة هى

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

وتكون القيم الذاتية هى $\lambda = 0, 1, -1$. ويحل المعادلة

$$(A - \lambda I)\underline{r} = 0 \quad , \qquad \underline{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$$

(T تعنى مدور المصفوفة transpose).

عندما $\lambda = 0$ فيكون لدينا

$$r_2 - r_3 = 0,\ r_3 = 0,\ r_2 = 0$$

وعلى ذلك يكون $\underline{r} = (1, 0, 0)^T$

عندما $\lambda = 1$ يكون لدينا

$$-r_1 + r_2 - r_3 = 0, \quad -r_2 + r_3 = 0,\ r_2 - r_3 = 0$$

ويكون المتجه الذاتى المناظر: $\underline{r} = (0, 1, 1)^T$

عندما $\lambda = -1$ يكون لدينا

$$r_1 + r_2 - r_3 = 0, \quad r_2 + r_3 = 0,\ r_2 + r_3 = 0$$

ويكون المتجه المناظر هو $r = (2, -1, 1)^T$ وعلى ذلك تكون المصفوفة الأساسية هى

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2e^{-t}\\ 0 & e^{t} & -e^{-t}\\ 0 & e^{t} & e^{-t}\end{pmatrix}$$

ليكن لدينا النظام الخطى المتجانس

$$\underline{\dot{x}}=A\underline{x} \qquad (9)$$

حيث A مصفوفة ثابتة $n\times n$. عندما تكون $n=1$ أى $A=a$ عدد ثابت فإن (9) تكون معادلة من الرتبة الأولى ويكون حلها e^{at}. عندما تكون $n>1$ فإن A تكون مصفوفة و $\underline{x}$ يكون متجها ويكون الحل له نفس الصورة e^{tA}.

تعريف (١): ليكن A مصفوفة $n\times n$. فإن المصفوفة الأسية e^{A} تعرف بالمتسلسلة

$$e^{A}=I+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^{k}}{K!}$$

حيث I مصفوفة الوحدة من الرتبة $n\times n$. وهذه المتسلسلة تقاربية.

نظرية (٢): إذا كانت A مصفوفة ثابتة من الرتبة $n\times n$ فإن $\Phi(t)=e^{tA}$ يكون مصفوفة أساسية للنظام $\underline{\dot{x}}=A\underline{x}$. وإذا كان $\Phi(t_0)=E$ فإن

$$\Phi(t)=Ee^{(t-t_0)A}$$

البرهان: حيث أن $\Phi'=Ae^{tA}=A\Phi$ لجميع $t\in J$، $\Phi(t)=e^{tA}$ يكون حلا وعلاوة على ذلك $\Phi(0)=I$ وعلى ذلك $\det\Phi(t)=e^{t(TrA)}$. وبالتالى فإن Φ مصفوفة أساسية

ليكن أى حل $\chi(t)=e^{-tA}\Phi(t)$ فإن

$$\chi'(t)=e^{-tA}\Phi'(t)-e^{-tA}A\Phi(t)$$
$$=e^{-tA}[\Phi'(t)-A\Phi(t)]=0$$

وعلى ذلك فإن χ هو متجه ثابت c. وبالتالى

$$\chi(t_0)=c=e^{-t_0A}\Phi(t)$$

أى

$$\Phi(t)=ce^{tA}=\Phi(t_0)e^{-t_0A}\,e^{tA}=\Phi(t_0)e^{(t-t_0)A}=Ee^{(t-t_0)A}$$

حيث $t_0A\,,tA$ يتبادلان. فيمكن كتابة $e^{-t_0A}e^{tA}=e^{(t-t_0)A}$

ملحوظة (٢): تعطى دالة المصفوفة e^{tA} بالعلاقة

$$e^{tA}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n t^n}{n!}$$

حيث $A^0=I$. وعلاوة على ذلك التعبير $\exp[\int_0^t A(t)dt]$ ليس حلا للنظام $\underline{x}'=A(t)\underline{x}$ إلا إذا كان $A(t),\int A(s)ds$ تبادليان. وهما يتبادلان إذا كانت A مصفوفة ثابتة أو $A(t)$ مصفوفة قطرية أو اى دالة فى t مضروبة فى مصفوفة ثابتة أى $f(t)A_0$ مثلا.

أما إذا اعتبرنا النظام غير متجانس

$$\underline{\dot{x}}=A\underline{x}+\underline{f}(t)$$

والذى يحقق الشرط الابتدائى $x(t_0)\equiv I$ فيلى ذلك أن

$$\Phi(t)=Ee^{(t-t_0)A}+\int_{t_0}^{t}e^{(t-\tau)A}f(\tau)d\tau.$$

حيث $E(t)$ متجه متصل لكل $t\in J$

ملحوظة (٣): حساب e^{tA} قد يكون صعباً إلى حد ما ولذلك تعطى المثالين التاليين:

مثال (٢): ليكن $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ فإن

$$e^{tA}=I+tA+\frac{t^2}{2!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tA)^k}{K!}$$

ويكون لدينا

$$e^{tA}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 4\end{pmatrix}+\ldots=\begin{pmatrix}e^t & f(t)\\ 0 & e^{2t}\end{pmatrix}$$

حيث $f(t)=2t+\frac{6t^2}{2!}+\frac{14t^2}{3!}+\ldots$

مثال (٣): ليكن $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ فإن

$$e^{tA}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\begin{pmatrix}t^k & 0\\ 0 & (2t)^k\end{pmatrix}$$

وبالتالى

$$e^{tA}=\begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!} & 0\\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2t)^k}{k!}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^{2t}\end{pmatrix}$$

١٣-٥ المصفوفات القطرية ومصفوفة جوردان (Jordan)

عندما تكون المصفوفة A فى الصورة القطرية فإن مصفوفة الحل Φ يمكن حسابها بسهولة .

ليكن D مصفوفة قطرية على الصورة.

$$D=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

فإن

$$e^{tD}=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}\frac{t}{1!}+\begin{bmatrix} d_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_n^2 \end{bmatrix}\frac{t}{2!}+\dots$$

$$+\begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^k & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_n^k \end{bmatrix}\frac{t^k}{k!}+\dots=\begin{bmatrix} e^{td_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{td_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & e^{td_n} \end{bmatrix}$$

نظرية (١): إذا كان $A=PDP^{-1}$، حيث D مصفوفة قطرية، فإن

$$e^{tA}=Pe^{tD}P^{-1}$$

تكون مصفوفة اساسية للنظام $\dot{\underline{x}}=A\underline{x}$ حيث P مصفوفة غير شاذه.

البرهان: حيث أن $A=PDP^{-1}$ يكون لدينا $A^k=PD^kP^{-1}$ لأى عدد صحيح موجب k. وبالتالى يكون لدينا

$$e^{tA}=I+\frac{t}{1!}A+\frac{t^2}{2!}A^2+\dots$$

$$=PIP^{-1}+P\frac{t}{1!}DP^{-1}+P\frac{t^2}{2!}D^2P^{-1}+\dots$$

$$=P\left(1+\frac{tD}{1!}+\frac{t^2D^2}{2!}+\dots\right)P^{-1}$$

$$=Pe^{tD}P^{-1}$$

وهو المطلوب.

مثال (١): ليكن $\underline{x}' = A\underline{x}$ ، $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. والمصفوفة A لها القيمتان الذاتيتان 1 ، 4 والمتجهان الذاتيان المناظران كأعمدة فى P هما $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ وتحسب P^{-1} فنجد أن

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

وتكون المصفوفة الاساسية

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{t} + \frac{1}{3}e^{4t} & -\frac{2}{3}e^{t} + \frac{2}{3}e^{4t} \\ -\frac{1}{3}e^{t} + \frac{1}{3}e^{4t} & \frac{1}{3}e^{t} + \frac{2}{3}e^{4t} \end{bmatrix}$$

ويكون الحل المطلوب هو

$$\underline{\phi}(t) = e^{tA}\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1\left(\frac{2}{3}e^{t} + \frac{1}{3}e^{4t}\right) + c_2\left(-\frac{2}{3}e^{t} + \frac{2}{3}e^{4t}\right) \\ c_1\left(-\frac{1}{3}e^{t} + \frac{1}{3}e^{4t}\right) + c_2\left(\frac{1}{3}e^{t} + \frac{2}{3}e^{4t}\right) \end{bmatrix}$$

وإذا كان $a_1 = \frac{1}{3}(-c_1 + c_2)$ ، $a_2 = \frac{1}{3}(c_1 + 2c_2)$ فإن $\underline{\phi}$ تأخذ الصورة

$$\underline{\phi}(t) = a_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + a_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t}$$

ملحوظة (١): نلاحظ أن المتجهين الثابتين فى التعبير السابق ما هما إلا المتجهان الذاتيان السابق تحديدهما. وهذا عموما يكون صحيحا. ولذلك لأى مصفوفة قطرية التى لها متجهات ذاتية مستقلة لاتحتاج إلى حساب e^{tA} صراحة.

١٣-٦ النظم المرافقة (النظم القرينة Adjoint systems)

إذا كان Φ مصفوفة اساسية للنظام $\underline{x}'=A(t)\underline{x}$ فإن $\Phi\Phi^{-1}=I$ وباشتقاق هذه العلاقة نحصل على $\Phi'\Phi^{-1}+\Phi(\Phi^{-1})'=0$ التى تعطى

$$(\Phi^{-1})'=-\Phi^{-1}\Phi'\Phi^{-1}=-\Phi^{-1}A\Phi\Phi^{-1}=-\Phi^{-1}A$$

وعلى ذلك يكون $(\Phi^{T-1})'=-A^T\Phi^{T-1}$ وعلى ذلك يكون $(\Phi^{-1})^T$ حلا للنظام

$$\underline{x}'=-A^T(t)\underline{x} \qquad \text{(i)}$$

أى Φ^{T-1} أو $(\Phi^T)^{-1}$ هى مصفوفة أساسية للنظام (i) حيث T تعنى مدور المصفوفة (transpose).

وتسمى المعادلة المصفوفية $\dot{X}=-A^TX$ بالنظام المترافق (القرين) للنظام الأصلى $\Phi'=A\Phi$.

نظرية (١): إذا كان Φ مصفوفة اساسية للنظام $\underline{x}'=A(t)\underline{x}$ فإن ψ تكون مصفوفة اساسية للنظام $\underline{x}'=-A^T(t)\underline{x}$ إذا وفقط إذا كان $\psi^T\Phi=c$ حيث c مصفوفة ثابتة غير شاذة.

البرهان: إذا كان Φ مصفوفة أساسية للنظام $\underline{x}'=A(t)\underline{x}$ و ψ مصفوفة أساسية للنظام $\underline{x}'=-A^T(t)\underline{x}$ فإن

$$\psi=(\Phi^T)^{-1}D$$

لمصفوفة ثابتة غير شاذه D. وحيث أن $\Phi^{T^{-1}}$مصفوفة أساسية للنظام (i) فإن

$\Phi^T\psi = D$ وعلى ذلك $\psi^T\Phi = C$ حيث $C = D^T$ لاثبات العكس ليكن Φ

مصفوفة أساسية للنظام $\underline{x}' = A\underline{x}$ يحقق الشرط $\Psi^T\Phi = C$ فإن

$$\Psi^T = C\Phi^{-1} \quad \Rightarrow \quad \Psi = (\Phi^T)^{-1}C^T$$

وبالتالى تكون Ψ مصفوفة اساسية للنظام $(\Phi^{-1})' = -A^T\Phi^{-1}$.

وهو المطلوب.

تمهيدية (١): إذا كان $\Phi(t)$ مصفوفة أساسية للنظام $\underline{x}' = A\underline{x}$ حيث A مصفوفة ثابتة، $\Phi(0) = I$ فإن

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(\alpha) = \Phi(t-\alpha), \qquad \text{لكل } \alpha$$

البرهان: لأى عدد حقيقى α ليكن $\Omega_1 = \Phi(t)\Phi^{-1}(\alpha)$. وحيث أن $\Phi(t)$ تحقق $\Phi' = A\Phi$ فإن Ω_1 تحقق نفس المعادلة ويكون الشرط الابتدائى $\Omega(\alpha) = I$ وبالمثل فإن $\Omega_2(t) = \Phi(t-\alpha)$ تحقق

$$\Omega_2(\alpha) = \Phi(0) = I$$

كما تحقق ايضاً

$$\Omega_2'(t) = A\Phi(t-\alpha) = A\Omega_2(t)$$

ومن نظرية الوحدوية يجب أن يكون $\Omega_2(t) = \Omega_1(t)$.

ملحوظة (٢): لاتتحقق هذه الخاصية إذا كانت A مصفوفة غير ثابتة إلا إذا كانت A تحقق $A(t-\alpha) = A(t)$ مصفوفة دورية ولها الدورة α.

ملحوظة (٣): باستخدم التمهيدية السابقة، إذا كان $x(t)$ حلا للنظام

$$\underline{x}' = A\underline{x} + B(t)$$

A مصفوفة ثابتة، B دالة متصلة وكان $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ فإن

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-s)B(s)ds$$

حيث $\Phi(t)$ حل النظام المتجانس $\underline{x}' = A\underline{x}(t)$ ، $\Phi(0) = I$ ، $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$.

۷-۱۳ سلوك حلول المعادلات التفاضلية من الرتبة n

سندرس هنا سلوك حلول المعادلة التفاضلية

$$L(D)y = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_n y = 0 \qquad (1)$$

حيث a_i ، $(i = 1,...,n)$ ثوابت حقيقية، $-\infty < t < \infty$.

نظرية (۱): إذا كانت جميع الجذور الذاتية لكثيرة الحدود الذاتية $L(\lambda)$ للمعادلة (1) لها أجزاء حقيقية سالبة فإنه لأى حل $y(t)$ للمعادلة (1) يوجد ثابتان موجبان α، M بحيث أن

$$|y(t)| \le Me^{-\alpha t} \qquad t \ge 0$$

وبالتالى

$$\lim_{t\to\infty} |y(t)| = 0$$

البرهان: ليكن $\lambda_j = u_j + iv_j$ جذرا للمعادلة $L(\lambda) = 0$. ومن الافتراض يكون لدينا $u_j < 0$ وبالتالى يمكن ان نجد ثابتا $\alpha > 0$ (مهما كان صغيرا) بحيث أن $u_j + \alpha < 0$. والحل المناظر إلى λ_j يكون على الصورة

$$y_j(t) = p(t)\exp(\lambda_j t)$$

حيث $p(t)$ كثيرة حدود من درجة $r-1$ فى t و r هى تكرار الجذر λ_j وبالتالى

$$y_j(t)e^{+\alpha t} = p(t)\exp[(u_j + \alpha) + v_j]t]$$

وحيث أن $u_j + \alpha < 0$ فإن $|y_j(t)e^{\alpha t}| \to 0$ عندما $t \to \infty$

وهذا يؤدى إلى وجود ثابت $m_j > 0$ (مهما كان كبيرا) بحيث أن

$$\left|y_j(t)e^{\alpha t}\right| \le m_j \quad \Rightarrow \quad \left|y_j(t)\right| \le m_j e^{-\alpha t} \quad , \quad t \ge 0$$

وعلاوة على ذلك أى حل للمعادلة (1) يمكن التعبير عنه بالصورة

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(t)$$

حيث $y_1, y_2, ..., y_n$ هى الحلول الأساسية و $c_1, c_2, ..., c_n$ ثوابت اختيارية.

إذا وضعنا

$$M_0 = \max_j |c_j| \ , \ M = M_0\left(\sum_{j=1}^{n} m_j\right)$$

فإنه لكل $t \ge 0$ يكون لدينا

$$|y(t)| \le \sum_{j=1}^{n} |c_j||y(t)| \le M_0 \sum_{j=1}^{n} m_j e^{-\alpha t} = M_0\left(\sum_{j=1}^{n} m_j\right)e^{-\alpha t} = Me^{-\alpha t}$$

وهو المطلوب

تعريف (١): يقال أن الحل $y(t) = y(t, 0, y_0)$ للمعادلة (1) محدود على $[0, \infty)$ إذا وجد ثابت موجب M بحيث أن

لكل $t \in [0, \infty)$ ، $|y(t)| \le M$

ويمكن أن تعتمد M على كل حل

نتيجة (١): إذا كانت كل الجذور المميزة لكثيرة الحدود $L(\lambda)$ مع تكرار اكبر من الواحد لها اجزاء حقيقة سالبة وأن كل الجذور المميزة غير المكررة ليس لها اجزاء حقيقية غير موجبة فأن كل حلول المعادلة (1) تكون محدودة على $[0, \infty)$.

البرهان: ليكن $\lambda_j = u_j + iv_j$، $(j = 1,2,...,r)$ هى جذور $L(\lambda)$ غير المكررة وليس لها أجزاء حقيقية موجبه فإن $u_j \le 0$ ويكون الحل المناظر لها هو

$$|y_j(t)| \le |\exp(i_j v_j t)| = 1, \quad t \ge 0$$

والجذور المميزة الباقية λ_j $(j = r+1,...,n)$, لها التكرار اكبر من الواحد وهى ذات اجزاء حقيقية سالبة فإنه من النظرية السابقة يكون لدينا

$$|y_j(t)| \le m_j e^{\alpha t}, \quad j = r+1, r+2,...,n$$

وعلى ذلك يكون لدينا

$$|y_j(t)| = \left| \sum_{j=1}^{r} c_j y_j(t) + \sum_{j=r+1}^{n} c_j y_j(t) \right| \le M_0 r + M_1 e^{-\alpha t}$$

حيث

$$M_1 = M_0 \left(\sum_{j=r+1}^{n} m_j \right)$$

وهذا يعنى أن الحل $y(t)$ يكون محدودا

ملحوظة (١): الخاصية $\lim_{t \to \infty} |y(t)| = 0$ تؤدى إلى محدودية الحلول للمعادلة (1)، $t \ge 0$.

ومن النظرية السابقة والنتيجة يمكن أن نحدد سلوك حلول المعادلة (1) وهى أنه لابد أن تعرف مقدماً طبيعة الجذور المميزة للمعادلة (1). إذا كانت درجة $L(\lambda)$ كبيرة بدرجة ما فإن مسألة تعيين هذه الجذور تكون صعبة. ففى هذه الحالة نلجأ إلى معيار روث وهيروتز (Ruth-Hurwitz).

١٣-٨ معيار روث وهيروتز:

الشرط الضرورى والكافى لتكون الاجزاء الحقيقية سالبة لجميع جذور كثيرة الحدود

$$L(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+...+a_n \qquad (1)$$

ذات معاملات حقيقية هو ان تكون جميع الأقطار الرئيسية للمحيددات فى المصفوفة

$$H_n=\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & ... & 1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & ... & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & a_n \end{pmatrix}$$

موجبة

أى

$$D_1=|a_1|, D_2=\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}=a_1a_2-a_3>0,...$$

وتكون معيار هيروتز غير مجزى إذا كانت n كبيرة جداً ومثالا على ذلك فى كثيرات الحدود من الدرجة الثانية والثالثة والرابعة يكون

(i) $\lambda^2+a_1\lambda+a_2$

يكون المعيار هو $a_1>0, a_2>0$

(ii) $\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3$

يكون المعيار هو $a_1>0, a_2>0, a_3>0, a_1a_2-a_3>0$

(iii) $\lambda^4+a_1\lambda^3+a_2\lambda^2+a_3\lambda+a_4$

يكون المعيار هو $a_1>0, a_2>0, a_3>0, a_4>0, a_1a_2a_3-a_3^2-a_1^2a_4>0$

من شروط هيروتز ينتج أن شرط جميع المعاملات موجبة ليس كافيا لكى تكون الاجزاء الحقيقية لجميع جذور $L(\lambda)$ سالبة. ولتحقيق ذلك إذا كانت هذه الجذور لها اجزاء حقيقية سالبة يكون الشرط الضرورى التالى مفيدا. نفترض أن a_i جميعها حقيقية.

نظرية (١): إذا كانت كثيرة الحدود المميزة $L(\lambda)$ لها اجزاء حقيقية سالبة فإن a_1، a_2،...، a_n تكون موجبة

البرهان: يمكن تحليل $L(\lambda)$ إلى حدود على النوع $\lambda+\alpha$ أو $\lambda^2+\beta\lambda+\gamma$ حيث α ، β، γ حقيقية. وحيث أن جذور $L(\lambda)$ لها أجزاء حقيقية سالبة فيلى ذلك أن $\alpha>0$، $\beta>0$، $\gamma>0$. وهذا يؤدى إلى أن معاملات $L(\lambda)$ تكون موجبة.

تعريف (١): يقال لكثيرة الحدود المميزة $L(\lambda)$ للنظام (1) أنها مستقرة (stable) إذا كان لجميع جذورها اجزاء حقيقة سالبة

مثال (١): (i) كثيرة الحدود

$$L(\lambda)=\lambda^3+5\lambda^2+9\lambda+5$$

تكون مستقرة لأن المعاملات جميعها موجبة وأن

$$a_1a_2-a_3=5(9)-5=40>0$$

وان جميع الحلول $y(t)$ للمعادلة التفاضلية

$$y'''+5y''+9y'+5y=0$$

تحقق $\lim_{t\to\infty}|y(t)|=0$

(ii) كثيرة الحدود المميزة

$$L(\lambda)=\lambda^3+2\lambda^2+\alpha\lambda+3$$

تكون مستقرة إذا كان $\alpha > 0$ ، $2\alpha - 3 > 0$ وبالتالى تكون كل الحلول $y(t)$ للمعادلة التفاضلية

$$y''' + 2y'' + \alpha y' + 3y = 0$$

حيث α بارامتر تحقق $\lim_{t\to\infty} |y(t)| = 0, \ \alpha > 3/2$

(iii) كثيرة الحدود المميزة

$$L(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 2$$

ليست مستقرة لأن $a_1 = -2 < 0, a_4 = -2 < 0$. وبالتالى كل حلول المعادلة

$$y^{(4)} - 2y^{(3)} + y'' + 2y' - 2y = 0$$

لاتقترب من الصفر عندما $t \to \infty$.

(iv) كثيرة الحدود المميزة

$$L(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 2\lambda^2 + 6\lambda + 2$$

ليست مستقرة لأن

$$a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_4 a_1^2 = 4.2.6 - 6^2 - 2.16 = -20 < 0$$

وبالتالى كل الحلول $y(t)$ للمعادلة التفاضلية

$$y^{(4)} + 4y^{(3)} + 2y'' + 6y' + 2y = 0$$

لاتقترب من الصفر عندما $t \to \infty$ أى $\lim_{t\to\infty} |y(t)| \neq 0$

نعود مرة أخرى إلى النظام الخطى

$$\underline{x}' = A\underline{x} \qquad (2)$$

والذى له الشرط الأبتدائى

$$x(t_0) = x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \qquad (3)$$

ويوجد حل وحيد للمعادلة التفاضلية (2) يحقق (3). والآن سندرس سلوك الحلول للنظام (2) عندما $t \to \infty$.

تعريف (٢): يقال أن المصفوفة A مستقرة إذا كانت لجميع جذورها المميزة أجزاء حقيقية سالبة.

نظرية (٢): إذا كانت لجميع الجذور المميزة للمصفوفة A اجزاء حقيقية سالبة، فإن أى حل $x(t)$ للنظام (2) يحقق الشرط

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0$$

البرهان: حيث أن جميع الجذور المميزة للمصفوفة A أجزاء حقيقية سالبة، من التعريف فإن كثيرة الحدود $f(\lambda) = \det[A - \lambda I]$ تكون مستقرة. إذا كان

$$\underline{\varphi}_i(t) = (\varphi_{1i}(t), \varphi_{2i}(t) \dots \varphi_{ni}(t)), \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

حلول أساسية للنظام (2) فإن

$$\varphi_{ji}(t) = \rho_{ji}(t) e^{\lambda_i t}, \qquad i, j = 1, 2, \dots, n$$

حيث $\rho_{ij}(t)$ كثيرة حدود، λ هى جذور $f(\lambda)$. وحيث أن الاجزاء الحقيقية سالبة، فإنه يلى من نظرية (١) (بند ٧) أنه يوجد ثابتان موجبان α، M بحيث

$$|\varphi_{ji}(t)| \le M e^{-\alpha t}, \quad t \ge 0, \qquad i, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

وهذا يعنى أن

$$\|\underline{\varphi}_i\| = \sum_{j=1}^{n} |\varphi_{ji}(t)| \le n M e^{-\alpha t}, \quad t \ge 0$$

ولأى حل

$$\underline{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_i \, \underline{\varphi}_i(t)$$

للنظام (2) يكون لدينا

$$\|\underline{x}(t)\| \leq \sum_{j=1}^{n} |c_i| \|\underline{\varphi}_i(t)\| \leq Ke^{-\alpha t}, \quad t \geq 0$$

حيث c_i ثوابت اختيارية، $K = nM \sum_{i=1}^{n} |c_i|$

وهى النتيجة المطلوبة.

مثال (٢): ليكن لدينا النظام

$$x_1' = -5x_1 + 4x_2 \ , \ x_2' = 3x_3 \ , \ x_3' = 12x_1 + 8x_2 - 6x_3$$

أى أن $\underline{\dot{x}} = A\underline{x}$ حيث

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -12 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

وتكون كثيرة الحدود هى

$$-f(\lambda) = \lambda^2 + 11\lambda^2 + 6\lambda + 24$$

وهى مستقرة حيث أن جميع المعاملات موجبه وأن $a_1a_2 - a_3 = 42 > 0$

وبالتالى فإن الحل $x(t)$ للمعادلة (4) يحقق

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0$$

١٣-٩ السلوك التقاربى Asymptotic Behaviour

سندرس سلوك النظام

$$\underline{x}' = (A + B(t))\underline{x} \tag{1}$$

حيث A مصفوفة $n \times n$ ثابتة و $x \in R^n$ و $B(t)$ مصفوفة $n \times n$ متصلة على $0 \leq t < \infty$. وسنفترض أن $B(t)$ صغيرة عندما $t \to \infty$. وسنفترض أيضا أن $B(t)$ تحقق الشرطين

$\|B(t)\| \to 0 \quad , \qquad t \to \infty$ عندما (2-a)

$$\int_{0}^{\infty} \|B(s)\| ds < \infty \qquad (2\text{-b})$$

ملحوظة (١): (i) المعادلة التفاضلية

$$u^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} (a_i + p_i(t)) u^{(n-1)} = 0 \qquad (3)$$

حالة خاصة من النظام (1) حيث a_i ثوابت و $p_i(t)$ دوال متصلة على $[0,\infty]$.

وكذلك المعادلة

$$u'' + (a + p(t)) u = 0 \qquad (4)$$

حالة خاصة من (3).

تعتبر النظام (1) كأنها معادلة مضطربة (محاده) للنظام

$$\underline{x}' = A \underline{x} \qquad (5)$$

يكون من المهم والضرورى أن نعرف ما إذا كانت أى خاصية لحلول النظام (5) لاتتغير عندما يتعرض النظام للتغير (الاضطراب) على الصورة (1)

نظرية (١): إذا كانت جميع حلول النظام (5) محدودة على $[0,\infty]$ فإن جميع حلول النظام (1) تكون محدودة على $[0,\infty]$ بشرط تحقق (2-b).

البرهان: نكتب النظام (1) على الصورة

$$\underline{x}' = A \underline{x} + B(t) \underline{x} \qquad (6)$$

ونعتبر $B\underline{x}$ كحد غير متجانس للنظام المتجانس (5) ونستخدم طريقة تغيير الوسائط (البارامترات) فنجد أن كل حل للنظام (6) يحقق المعادلة التكاملية الخطية

$$\underline{x}(t) = \underline{y}(t) + \int_0^t \Phi(t-s) B(s) \underline{x}(s) ds \qquad (7)$$

حيث $y(t)$ هو حل للنظام (5) بحيث أن $\underline{y}(0) = \underline{x}(0) = \underline{x}_0$ ولأن Φ هى مصفوفة الحل للنظام $\Phi' = A\Phi,\ \Phi(0) = I$

ونعرف أن كل حل $y(t)$ للنظام (5) يمكن كتابته على الصورة

$$\underline{y}(t) = \Phi(t) \underline{x}_0$$

وحيث ان كل حلول النظام (5) محدودة فإن

$$c_1 = \max\left(\sup_{t \ge 0} \|y(t)\|, \sup_{t \ge 0} \|\Phi(t)\|\right)$$

ومن (7) نجد أن

$$\|x(t)\| \le c_1 + c_1 \int_0^t \|B(s)\| \|x(s)\| ds$$

وباستخدام متباينة جرونويل (الباب الثانى عشر بند ٥) نجد أن

$$\|x(t)\| \le c_1 \exp\left[c_1 \int_0^t \|B(s)\| ds\right] \le c_1 \exp\left[c_1 \int_0^\infty \|B(s)\|\right] ds = M < \infty$$

مثال (١): اثبت عندما $a > 0$، $b > 0$ فإن جميع حلول المعادلة

$$\ddot{x} + a\dot{x} + (b + ce^{-t} \cos t) x = 0$$

تكون محدودة لجميع $t \ge t_0$ لاى t_0.

الحل: المعادلة تكافئ النظام

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -ce^{-t} \cos t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

وبالتالى يكون

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -ce^{-t}\cos t & 0 \end{pmatrix}$$

وتكون القيم الذاتية للمصفوفة A سالبة إذا كان $a > 0$، $b > 0$ وكذلك

$$\int_{t_0}^{t} \|B(t)\| dt = |c| \int_{t_0}^{t} e^{-t} |\cos t| dt < \infty$$

وتكون شروط النظرية متحققة وبذلك يكون الحل محدودا.

نظرية (٢): إذا كانت جميع الجذور المميزة للمصفوفة A لها أجزاء حقيقية سالبة فإن جميع حلول النظام (1) تقترب من الصفر عندما $t \to \infty$ بشرط تحقق (2-a)

البرهان: كما فى النظرية السابقة يكون لدينا

$$\underline{x}(t) = \underline{y}(t) + \int_{0}^{t} \Phi(t-s) B(s) \underline{x}(s) ds \qquad (8)$$

وحيث أن جميع الجذور المميزة لها اجزاء حقيقية سالبة فإنه يوجد ثابتان α، M بحيث أن

$$\|\underline{y}(t)\| \le Me^{\alpha t}, \quad t \ge 0$$

وعلاوة على ذلك

$$\|\Phi(t)\| \le c_2 e^{-\alpha t}$$

حيث c_2 ثابت موجب. وبما أن $\|B(t)\| \to 0$ عندما $t \to \infty$، $B(t)$ متصلة فإنه يوجد ثابت موجب c_1 بحيث أن

$$\|B(t)\| \le c_1, \qquad t \ge 0$$

نختار c_2 بحيث أن $c_1 c_2 < \alpha$. وهذا الاختيار ممكن بسبب الشرط الابتدائى $\|\underline{x}_0\|$ وبالتالى من المعادلة (8) نحصل على

$$\|\underline{x}(t)\| \leq Me^{-\alpha t} + c_1 c_2 \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \|\underline{x}(s)\| ds$$

أو

$$\|\underline{x}(t)\| e^{\alpha t} \leq M + c_1 c_2 \int_0^t e^{\alpha s} \|\underline{x}(s)\| ds$$

وباستخدام متباينة جرونويل نجد ان

$$\|\underline{x}(t)\| e^{\alpha t} \leq M \exp(c_1 c_2 t)$$

أو

$$\|\underline{x}(t)\| \leq M \exp[(c_1 c_2 - \alpha)t]$$

وينتج المطلوب حيث $c_1 c_2 < \alpha$

المثال التالى يبين ان الشرط (2-a) وحده ليس كافياً لتأكيد أن حلول النظام (1) تكون محدودة عندما تكون حلول (5) محدودة.

مثال (٢): ليكن لدينا المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية

$$u'' + u = 0 \ , \qquad u'' - \frac{2a}{at+b} u' + u = 0$$

حيث a, b ثابتان موجبان

إذا وضعنا $u_1 = u$ ، $u_2 = u'$ نحصل على النظام

$$u_2' + u_1 = 0$$

$$u_2' - \frac{2a}{at+b} u_2 + u_1 = 0$$

نضع المعادلتين السابقتين فى الصورة

$$\underline{x}' = A\underline{x} \qquad \text{(a)}$$

$$\underline{x}' = (A + B(t))\underline{x} \qquad \text{(b)}$$

حيث

$$\underline{x}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},B(t)=\begin{pmatrix}0&0\\0&\dfrac{2a}{at+b}\end{pmatrix}$$

ويكون حل النظام (a) هو $\cos t,\sin t$ وبالتالى جميع الحلول تكون محدودة. وعلى الجانب الآخر تكون حلول النظام (b) هى $a\sin t-(at+b)\cos t$، $a\cos t+(at+b)\sin t$ وبالتالى نجد أن جميع حلول (b) غير الصفرية تكون غير محددة عندما $t\to\infty$ وهذا ليس بمستغرب لأن

$$\int_0^t \|B(s)\|ds=\int_0^t \frac{2a}{as+b}ds=\ln\left(\frac{at+b}{b}\right)^2\to\infty$$

عندما $t\to\infty$ حتى ولو كان $\|B(t)\|\to 0$ عندما $t\to\infty$.

١٣- ١٠ نظم ذات معاملات متغيرة:

نعتبر النظامين الخطيين

$$\underline{y}'=A(t)\underline{y} \qquad (1)$$

$$\underline{z}'=(A(t)+B(t))\underline{z} \qquad (2)$$

حيث $\underline{y},\underline{z}\in R^n$، $A(t)$، $B(t)$ من الرتبة $n\times n$ ومتصلتان على $0\le t<\infty$.

نظرية (١): إذا كانت كل حلول (1) محدودة فإن كل حلول (2) تكون محدودة بشرط تحقق

$$\int^{\infty} \|B(t)\|dt<\infty \qquad (3\text{-a})$$

و

$$\lim_{t\to\infty}\int^{t} TrA(s)ds > -\infty \tag{3-b}$$

أو

$$TrA(t)=0 \ , \tag{3-c}$$

البرهان: نعبر عن الحل z للنظام (2) بدلالة الحل y للنظام (1) أى

$$\underline{z}(t)=\underline{y}(t)+\int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)B(s)\underline{z}(s)ds$$

حيث $\Phi(t)$ مصفوفة اساسية للنظام (1) بحيث أن $\Phi(0)=I$ وأن $y(0)=z(0)=z_0$. نلاحظ أن $\underline{y}(t)=\Phi(t)\underline{z}_0$. وحيث أن كل حلول النظام (1) تكون محدودة فإن $\|\Phi\|$ يكون محدودا. وأن

$$\det\Phi(t)=\exp\left[\int_0^t TrA(s)ds\right]$$

وبالتالى

$$\Phi^{-1}(t)=\frac{adj\,\Phi(t)}{\det\Phi(t)}=\frac{adj\,\Phi(t)}{\exp\left[\int_0^t TrA(s)ds\right]}$$

وباستخدام (3-b) وأن $\|\Phi\|$ يكون محدودا، نجد أن $\|\Phi^{-1}\|$ يكون ايضا محدودا.

ليكن

$$c_1=\max\left(\sup_{t\ge0}\|\Phi\| \ , \ \sup_{t\ge0}\|\Phi^{-1}\|\right)$$

وبالتالى

$$\|z(t)\| \le c_1 \|z_0\| + c_1^2 \int_0^t \|B(s)\| \|z(s)\| ds$$

وباستخدام متباينة جرونويل نحصل على

$$\|z(t)\| \le c_1 \|z_0\| \exp\left[c_1^2 \int_0^t \|B(s)\| ds\right] \le c_1 \|z_0\| \exp\left[c_1^2 \int_0^\infty \|B(s)\| ds\right]$$

ومن (3-a) نحصل على المطلوب.

ملحوظة: يمكن تطبيق الشرط (3-b) على المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية

$$u'' + (a(t) + b(t))u = 0$$

الذى يكافىء نظاما ذا بعدين يحقق (3-b).

نظرية (٢): إذا كانت جميع حلول النظام (1) تقترب من الصفر عندما $t \to \infty$ فإن جميع حلول النظام (2) تقترب من الصفر عندما $t \to \infty$ بشرط تحقق (3-a)، (3-b) أو (3-c).

البرهان: كما فى النظرية السابقه يكون لدينا

$$\underline{z}(t) = \underline{y}(t) + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)B(s)\underline{z}(s)ds \qquad (4)$$

حيث

$$\underline{y}(t) = \Phi(t)\underline{z}_0, \underline{z}(0) = y(0) = \underline{z}_0$$

وحيث أن جميع حلول (1) تقترب من الصفر عندما $t \to \infty$ يكون $\|\Phi(t)\| \to 0$ عندما $t \to \infty$.

وبالتالى من (3-b)، وان $\|\Phi(t)\| \to 0$ عندما $t \to \infty$ نحصل على $\|\Phi^{-1}(t)\| \to 0$ عندما $t \to \infty$.

وحيث أن كل من $\|\Phi(t)\|$ و $\|\Phi^{-1}(t)\|$ يقترب من الصفر عندما $t \to \infty$

وهما متصلتان فإنهما تكونان محدودتين لجميع $t \geq 0$.

ليكن

$$c_1 = \max\left(\sup_{t\geq 0}\|\Phi(t)\|, \sup_{t\geq 0}\|\Phi^{-1}(t)\|\right)$$

فيكون لدينا من (4)

$$\|\underline{z}(t)\| \leq \|\Phi(t)\|\|\underline{z}_0\| + \int_0^t \|\Phi(t)\|\|\Phi^{-1}(t)\|\|B(s)\|\|\underline{z}(s)\|ds$$

$$= \|\Phi(t)\|\left[\|\underline{z}_0\| + \int_0^t \|\Phi^{-1}(s)\|\|B(s)\|\|\underline{z}(s)\|\right]ds$$

أى

$$\frac{\|z(t)\|}{\|\Phi(t)\|} \leq \|\underline{z}_0\| + c_1\int_0^t \|B(s)\|\|\underline{z}(s)\|ds$$

$$\leq \|\underline{z}_0\| + c_1\int_0^t \|\Phi(t)\|\|B(s)\|\frac{\|z(t)\|}{\|\Phi(t)\|}ds$$

$$\leq \|z_0\| + c_1^2\int_0^t \|B(s)\|\frac{\|z(t)\|}{\|\Phi(t)\|}ds$$

وباستخدام متباينة جرونويل نجد أن

$$\frac{\|z(t)\|}{\|\Phi(t)\|} \leq \|\underline{z}_0\|\exp\left[c_1^2\int_0^t \|B(s)\|\right]ds \leq \|z_0\|\exp\left[c_1^2\int_0^\infty \|B(s)\|ds\right]$$

$$\leq \|\underline{z}_0\|K$$

وبالتالى

$$\|\underline{z}\| \leq K\|\underline{z}_0\|\|\Phi(t)\|$$

وحيث ان جميع حلول (1) تقترب من الصفر عندما $t \to \infty$ فنحصل على المطلوب.

نعتبر الأن النظام غير الخطى

$$\underline{y}' = A\,\underline{y} + \underline{f}(t,\underline{y}) \tag{5}$$

حيث $A = (a_{ij})$ مصفوفة $n \times n$ ثابتة $f \in C[J \times R^n, R^n]$ ، $J = [0,\infty)$. وفى مثل هذا النظام الذى يعتبر مضطربا (perturbed) نقارن حلوله مع حلول النظام غير المضطرب (1). ولعمل ذلك نفترض

$$\|\underline{f}(t,\underline{x})\| \le \alpha(t)(\|\underline{x}\|) \tag{6}$$

حيث $\alpha(t)$ دالة موجبة ومتصلة على J. وأن

$$\int_0^\infty \alpha(t)dt < \infty \tag{7}$$

نظرية (٣): إذا كانت كل حلول النظام (1) محدودة فإن كل حلول النظام (5) تكون محدودة. بشرط تحقق (6) و (7)

البرهان: نعبر عن $\underline{z}(t)$ للنظام (5) بدلالة الحلول $\underline{y}(t)$ للنظام (1) فيكون لدينا

$$\underline{z}(t) = \underline{y}(t) + \int_0^t \Phi(t-s) f(s, \underline{z}(s))ds \tag{8}$$

حيث $\Phi(t)$ مصفوفة الحل الأساسية للنظام (1)، $\Phi(0) = I$. ويلاحظ أن $\underline{y}(t) = \Phi(t)\underline{z}_0$ ، $\underline{y}(0) = \underline{z}(0) = \underline{z}_0$. وحيث إن جميع حلول النظام (1) تكون محدودة، ليكن

$$c_1 = \max\left(\sup_{t\ge 0}\|y(t)\|, \sup_{t\ge 0}\|\Phi(t)\|\right)$$

ومن (6)، (7) نحصل على

$$\|\underline{z}(t)\| \le c_1 + c_1 \int_0^t \alpha(s) \|\underline{z}(s)\| ds$$

وباستخدام متباينة جرونويل والشرط (7) تنتج محدودية حلول النظام (5)

نظرية (٤): إذا كانت لجميع الجذور المميزة للمصفوفة A أجزاء حقيقية سالبة فإن جميع حلول النظام (5) تقترب من الصفر عندما $t \to \infty$ بشرط تحقق

(i) الشرط (6) (ii) $\alpha \to 0$ عندما $t \to \infty$

البرهان: كما فى النظرية السابقة يكون لدينا

$$\underline{z}(t) = \underline{y}(t) + \int_0^t \Phi(t-s) \underline{f}(s, \underline{z}(s)) ds \qquad (9)$$

وحيث أن جميع الجذور الذاتية للمصفوفة A لها اجزاء حقيقية سالبة فإنه يوجد ثابتان M، β بحيث أن

$$\|\underline{y}(t)\| \le M e^{-\beta t}, \qquad t \ge 0$$

$$\|\Phi(t)\| \le c_2 e^{-\beta t}, \qquad c_2 > 0$$

ومن اتصال الدالة $\alpha(t)$ ومن الشرط (ii) ينتج وجود ثابت c_1 بحيث أن

$$\alpha(t) < c_1, \qquad t \ge 0$$

نختار c_2 بحيث أن $c_1 c_2 < \beta$. وعلى ذلك من (9) والشرط (i) نحصل على

$$\|\underline{z}(t)\| \le M e^{-\beta t} + c_1 c_2 \int_0^t e^{-\beta(t-s)} \|\underline{z}(s)\| ds$$

أى

$$\|\underline{z}(t)\| e^{\beta t} \le M + c_1 c_2 \int_0^t e^{\beta s} \|\underline{z}(s)\| ds$$

وباستخدام متابينة جرونويل نحصل على

$\|\underline{z}(t)\| e^{\beta t} \leq M e^{c_1 c_2 t}$ أو $\|\underline{z}(t)\| \leq M e^{(c_1 c_2 - \beta) t}$

وحيث أن $c_1 c_2 < \beta$ ينتج المطلوب.

نتيجة (١): إذا كانت كل حلول النظام (1) محدودة فإن كل حلول النظام (2) تكون محدودة بشرط تحقق (6) و (7) مع (3-b) أو (3-c).

نتيجة (٢): إذا كانت جميع حلول النظام (1) تقترب من الصفر عندما $t \to \infty$ فإن هذا يتحقق لجميع حلول النظام (2) بشرط تحقق (6)، (7) مع (3-b) أو (3-c).

تمارين

١- حول المعادلة $y''+4y'+40y=0$ إلى نظام من المعادلات واوجد حل النظام مستخدماً الشروط الابتدائية $y(1)=0\ ,\ y'(0)=0$

٢- نظام المعادلات $y_1'=y_1+\varepsilon y_2, y_2'=\varepsilon y_1+y_2$

عند $\varepsilon=0$ يختزل إلى $y_1'=y_1, y_2'=y_2$

عين الحلول $\Phi_1(t)$ ، $\Phi_2(t)$ للنظام مع الشروط $y_2(0)=-1,\ y_1(0)=1$

واثبت أن $\Phi_1\to\Phi_2$ عندما $\varepsilon\to 0$ لجميع قيم t.

٣- اثبت ان $\psi(t)=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$

هى مصفوفة الحل للنظام $Y'=AY\ ,A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

٤- اثبت أن:

(i) إذا كانت جميع القيم الذاتية للمصفوفة A لها أجزاء حقيقية سالبة فإن كل حل للنظام $Y'=AY$ يقترب من الصفر عندما $t\to\infty$

(ii) إذا كانت جميع القيم الذاتية للمصفوفة A لها اجزاء حقيقية سالبة وبعضها يساوى الصفر، فإن $Y'=AY$ لها حل محدود لجميع $t>0$.

(iii) إذا كان أحد القيم الذاتية للمصفوفة A له جزء حقيقى موجب فإن النظام $Y'=AY$ حل غير محدود لجميع $t>0$

٥- ليكن $\|G(t)\|\le Me^{a}$ ، $t>T>0$ ولثابتين M, a فى $Y'=AY+G$

اثبت أنه لثابتين k, b يكون $\|\Phi(t)\|\le ke^{bt}$

٦- عين الشرط على $w(t)$ بحيث أن جميع حلول المعادلة

$$u''' + pu' = w(t)$$

حيث p عدد حقيقى موجب، تكون محدودة على $[0,\infty]$

٧- اثبت ان حل مسألة القيمة الحدية

$$u' + 2u + e^t u^2 = 0, \quad u(0) = u_0 > 0$$

يقترب من الصفر عندما $t \to \infty$

٨- اعتبر المعادلة التفاضلية $u'' + p^2 u = g(t)$

حيث p عدد حقيقى موجب، g دالة متصلة على $[0,\infty)$ بحيث أن

$$\int_0^\infty |g(t)| ds < \infty$$

اثبت أن

(i) جميع حلول المعادلة التفاضلية محدودة على $[0,\infty)$

(ii) يوجد حل وحيد $u(t)$ للمعادلة بحيث أن $u \to 0$ عندما $t \to 0$

٩- ليكن $\Phi(t)$ مصفوفة أساسية للنظام $\underline{x}' = A(x)\underline{x}$ بحيث أن $\|\Phi(t)\| < k$

$t \geq 0$ ، $\lim\limits_{t \to 0} f \int_0^t TrA(s) ds > -\infty$ إذا كان $B(t)$ مصفوفة $n \times n$ متصلة

حيث $\int_0^\infty \|B(s) - A(s)\| ds < \infty$ اثبت أن كل حل للنظام $\underline{y}' = B(t)\underline{y}$ يكون

محدودا على $[0,\infty)$.

١٠- باستخدام المسألة السابقة اثبت أن لآى حل $x(t)$ على $[0,\infty)$ للنظام

$\underline{x}' = A(t)\underline{x}$ يوجد حل وحيد $y(t)$ للنظام $\underline{y}' = B(t)\underline{y}$ بحيث ان

$$\|y(t) - x(t)\| \to 0, \quad t \to \infty$$

(تنويه استخدم المعادلة التكاملية)

$$y(t) = x(t) - \int_t^{\infty} \Phi(t)\Phi^{-1}(s)(B(s) - A(s))y(s)ds]$$

١١- ناقش سلوك المعادلة $u'' + \alpha(t)u - \beta(t) = 0$ حيث α، β دوال متصلة على $[0,\infty)$ بحيث أن $\int_0^{\infty} \|\beta(s)\| ds < \infty$ ، اذا كانت جميع حلول

(i) $u'' + \alpha(t)u = 0$ محدودة على $[0,\infty)$

(ii) $u'' + \alpha(t)u = 0$ تقترب من الصفر عندما $t \to \infty$

١٢- أوجد حل النظام

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t$$

١٣- اثبت أن أى حل غير صفرى للمعادلة $\dot{x} = x$ يكون غير محدود وغير مستقر بينما كل حل للمعادلة $\dot{x} = 1$ يكون غير محدود ولكنه مستقر.

١٤- اعتبر النظام $\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{f}$ حيث $\underline{f} = \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، اثبت أن $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 2te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$ هى مصفوفة الحل للنظام $\underline{x}' = A\underline{x}$ ثم اوجد حل النظام غير المتجانس حيث $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

الباب الرابع عشر

النظرية الكيفية

Qualitative Theory

١٤-١ **مقدمة:** يمكن صياغة حلول كثيرا من المعادلات التفاضلية الخطية بدلالة دوال معلومة مثل الدوال الأسية، دوال بسل... وغيرها. اما حلول المعادلات التفاضلية غير الخطية، فنادراً ما يمكن أن يعطى الحل فى صورة صريحة (closed form) وللحصول على نتيجة كيفية، تستخدم عادة طرق تحليلية أو طريقة الحيود (الاضطراب perturbation).

فى هذا الباب سنتناول معالجة هندسية والتى تؤدى إلى فهم كيفى لحلول المعادلات التفاضلية غير الخطية. وقد وضع بوانكريه (Poincare`) أساس النظرية الكيفية فى القرن التاسع عشر فى حالات ثنائية البعد والتى أمكن تعميمها إلى أبعاد أعلى بواسطة بيركوف (Birkhoff)، والنظرية الكيفية مجال واسع للبحث والدراسة.

تكون المعادلة التفاضاية من الرتبة النونية على الصورة

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}, t\right) \qquad (1)$$

حيث x متغير تابع، t متغير مستقل.

ويمكن كتابة المعادلة (1) كنظام من معادلات من الرتبة الأولى مثل

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}, t) \qquad (2)$$

أو

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

حيث $\underline{x}$ متجه عمود (column) ومركباته x_i، والنقطة $(\cdot)$ ترمز إلى الاشتقاق بالنسبة إلى t.

والشرط الابتدائى المصاحب مع المعادلة (1) هو

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \qquad (3)$$

يكون للمعادلة (2) حلا وحيداً في جوار $(\underline{x}_0, t_0)$ إذا كانت $\underline{f}$ قابلة للاشتقاق باستمرار لبعض $\underline{x} \in D, t \in J$ حيث D هي النطاق الذي يحتوي $\underline{x}_0$، J فترة مفتوحة تحتوي t_0 .

وكمثال للحل غير الوحيد لمعادلة احادية البعد هي

$$\dot{x} = \sqrt{x} \quad , \quad x(0) = 0 \tag{4}$$

والتي لها حلان

$$x(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^2 \quad , \quad x(t) = 0 \tag{5}$$

وعدم وحدوية الحل ناتج من عدم اتصال المشتقة للدالة $\sqrt{x}$ عند $t = 0$.

تعريف (١): يسمى النظام بنظام ذاتي إذا لم تعتمد الدالة f في (2) على t صراحة. إذا أمكن تعميم حل نظام ذاتي لجميع قيم t في الفترة $-\infty < t < \infty$ فإن النظام يسمى بنظام ديناميكي (dynamical system).

وكمثال للنظام الذاتي

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) \quad , \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \tag{6}$$

لايوجد فقد العموم إذا اخذنا $t_0 = 0$.

ويمكن اعتبار حل النظام (6) كمنحنى في فراغ البعد النوني، هو فراغ الطور (phase space) ويسمى المنحنى بمنحنى تكاملي (integral curve) أو مسار (trajectory, orbit) خلال x_0.

إذا كانت $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ يمكن الحصول على منحنيات تكاملية بقسمة مجموعة المعادلات في (6) على f_1 وتحصل على المعادلات

$$\frac{dx_k}{dx_1} = \frac{f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad k = 2, 3, \dots, n \tag{7}$$

وإذا كان $f_1 = 0$ لبعض قيم $\underline{x}$ نستبدل f_1 بالدالة f_2 أو f_k بشرط $f_k \neq 0$.

تعريف (٢): إذا كانت جميع $f_i = 0$ عند $\underline{x} = \underline{x}_e$ أي $\underline{f} = (\underline{x}_e) = 0$، فإن $\underline{x}_e$ تسمى بنقطة حرجة أو سكون أو نقطة اتزان أو شاذة أو ساكنة (critical point, equilibrium point, singular point or stationary point).

تكون النقطة $\underline{x}_e$ نقطة حرجة معزولة (isolaled) إذا لم توجد نقطة حرجة أخرى في جوار $\underline{x}_e$.

عديد من العمليات فى الرياضيات البحته والتطبيقية تكون أنظمة ذاتية وسوف نسرد بعض خواص حلولها.

(أ) إذا كان $\underline{x}(t)$ حل المعادلات (6) فإن $\underline{x}(t-a)$ هو أيضاً حلا لأى ثابت a. والمسار يمثل حلول عديدة والتى تختلف عن بعضها البعض بإزاحة a.

(ب) لا تمر المسارات بالنقاط الحرجة.

(جـ) إذا انتهى المسار عند نقطة، فتكون هذه النقطة نقطة إتزان.

(د) لاتتقاطع المسارات مع بعضها البعض.

(هـ) مسارات الحل الدورى هى منحنيات مغلقه.

بفحص الخواص الهندسية للمسارات يمكن استنتاج الخواص الكيفية مثل محدودية أو دورية الحلول. ولتسهيل ذلك ندرس أولاً نظاماً ذاتياً ذا بعدين. وفى هذه الحالة يكون فراغ الطور هو مستوى الطور وبذلك يمكن فهم خواص المنحنيات فى المستوى. ودراسة الخواص فى المستوى لها تطبيقات عديدة لأن كثيراً من المعادلات فى الميكانيكا والكهرباء هى معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية.

١٤-٢ نظام خطى ذو بعدين Two-dimensionmal linear system

يمكن كتابة النظام ذى البعدين فى الصورة

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad , \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \tag{1}$$

ليكن (x_{1e}, x_{2e}) هى نقطة حرجة فإنه يمكن إزاحة النقطة الحرجة إلى نقطة الأصل. وباستخدام متسلسلة تيلور يمكن فك f_1 ، f_2 حول نقطة الأصل أى

$$f_1(x_1,x_2) = x_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2}(x_1^2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} + 2x_1x_1\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} + x_2^2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2}) + \dots$$

(2)

$$f_2(x_1,x_2) = x_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}(x_1^2\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} + 2x_1x_1\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} + x^2\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}) + \dots$$

حيث تحسب جميع قيم المشتقات عند $(0, 0)$. ويوضع ذلك على صورة نظام يكون لدينا

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + o(|x|^2) \tag{3}$$

أو

$$\underline{\dot{x}} = D\underline{f}(\underline{0})\underline{x} + o(|x|^2)$$

حيث عناصر مصفوفة الجاكوبى $D\underline{f}(\underline{0})$ هى ثوابت وإذا أمكن إهمال الحدود من الرتبة $|x|^2$ نحصل على

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

أو

$$\underline{\dot{x}} = A\underline{x}$$

وهو ما نسميه النظام الخطى المناظر للنظام (3).حيث a_{ij} هى عناصر A فى الجاكوبى $D\underline{f}(0)$.

لحل هذا النظام نفترض أن الحل على الصورة

$$\underline{x} = \underline{c}e^{\lambda t}, \quad (5)$$

حيث λ، c ثوابت وبالتعويض فى المعادلة (4) نحصل على

$$(A - \lambda I)\underline{c}e^{\lambda t} = 0, \quad (6)$$

حيث I مصفوفة الوحدة.

والحل غير الصفرى للمعادلة (6) يتطلب أن يكون $(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0$ أى أن λ هى قيمة ذاتية للمصفوفة A وعلى ذلك تعطى القيمتان الذاتيتان للمصفوفة A بالعلاقة

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{12} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

ويكون حل المعادلة (7) هى

$$(\lambda_1, \lambda_2) = \left[(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}} \right] / 2 \quad (8)$$

بالاعتماد على قيم a_{ij} يكون لدينا الاحتمالات التالية

(أ) $\Delta = (a_{11} + a_{22})^2 + 4a_{12}a_{22} > 0$: يكون الجذران (λ_1, λ_2) فى هذه الحالة جذران حقيقيان ومختلفان ولا يساويان الصفر.

(ب) $\Delta < 0$ يكون الجذران فى هذه الحالة مركبان حيث a_{ij} حقيقى، λ_1، λ_2 مركبان مترافقان.

(جـ) $\Delta = 0$ يكون $\lambda_1 = \lambda_2$

الحالة الأولى: $\lambda_2 \neq \lambda_1$ وحقيقيتان:

حيث القيمتان الذاتيان مختلفتان والمتجهان الذاتيان $\underline{v}_1$، $\underline{v}_2$ المصاحبين مع λ_1، λ_2 مستقلين خطياً.

نعرف مصفوفة غير شاذه P بالعلاقة

$$\underline{P} = [\underline{v}_1, \underline{v}_2] \qquad (9)$$

وباستخدام التحويل الخطى

$$\underline{x} = \underline{P}\,\underline{y} \qquad (10)$$

تصبح المعادلة (4)

$$\dot{\underline{y}} = P^{-1}AP\,\underline{y} = \underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{y} \qquad (11)$$

حيث $\underline{\underline{\Lambda}}$ مصفوفة قطرية عناصرها λ_1، λ_2.

والتحويل الخطى لايؤثر على الخواص الكيفية للحل ولذلك ندرس حلول النظام (11) بدلا من (4). ويمكن كتابة المعادلة (11) بدلالة مركباتها على الصورة

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 \quad , \quad \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 \qquad (12)$$

ويكون الحل هو

$$y_1 = y_{10}e^{\lambda_1 t} \quad , \quad y_2 = y_{20}e^{\lambda_2 t} \qquad (13)$$

حيث (y_{10}, y_{20}) هى القيم الابتدائية لقيم (y_1, y_2) وبحذف t نحصل على

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{\lambda_1 y_1}{\lambda_2 y_2} \qquad (14)$$

والمسارات التى حصلنا عليها من حل المعادلة (14) هى

$$y_1 = K y_2^{\lambda_1/\lambda_2} \qquad (15)$$

حيث K ثابت يتحدد من القيم الابتدائية

لدينا الحالات التالية

(أ) إذا كان كل من λ_1، λ_2 سالب، فاننا نستنتج من (13) أن كل من y_1، y_2 يؤول إلى نقطة الأصل عندما $t \to \infty$. تسمى نقطة الاتزان $(\underline{x} = \underline{0})$ عقدة مستقرة تقاربيا (asymptotically stable node)

(ب) إذا كان كل من λ_1، λ_2 موجبة فإن y_1، y_2 تؤول إلى ما لانهاية عندما $t \to \infty$. فإن نقطة الاتزان تسمى عقدة غير مستقرة (unstable node)

(جـ) إذا كان λ_1، λ_2 مختلفتى الاشارة ($\lambda_1 > 0$، $\lambda_2 < 0$) أى y_1 تؤول إلى ∞ ، y_2 تؤول إلى الصفر فإن نقطة الاتزان تسمى نقطة سرج غير مستقرة (unstable saddle).

ونوضح هذه الحالات بالأمثلة التالية:

مثال (١): إدرس الانظمة التالية:-

$$\text{(i)}\quad \dot{y}_1 = y_1 \quad , \quad \dot{y}_2 = 2y_2 \tag{16}$$

$$\text{(ii)}\quad \dot{y}_1 = -2y_1 \quad , \quad \dot{y}_2 = -y_2 \tag{17}$$

$$\text{(iii)}\quad \dot{y}_1 = 2y_1 \quad , \quad \dot{y}_2 = -2y_2 \tag{18}$$

الحل: (i) يكون حل النظام (16) هو

$$y_1 = y_{10}e^{t} \quad , \quad y_2 = y_{20}e^{2t} \tag{19}$$

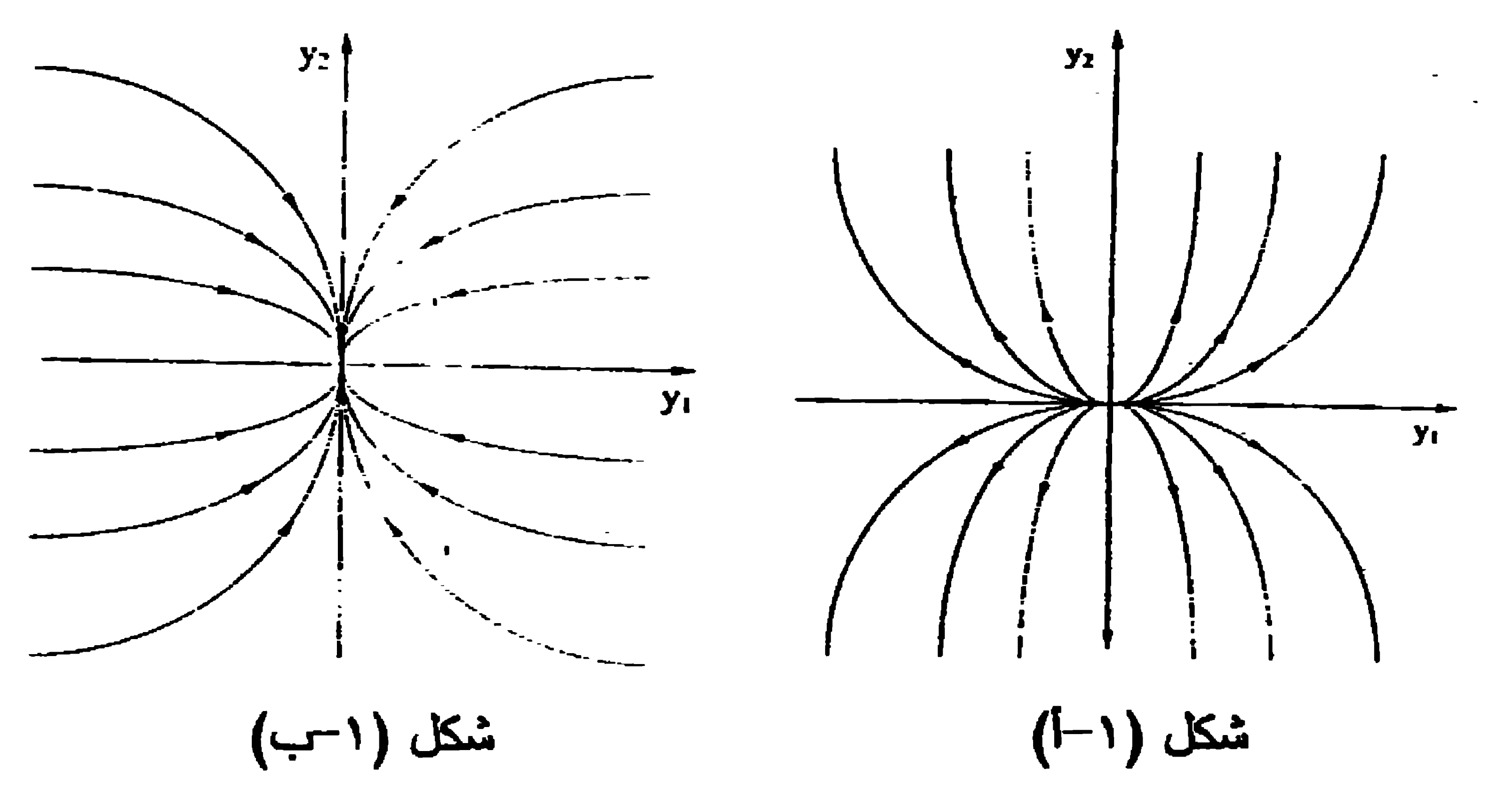
عندما $t \to \infty$ فإن $(y_1, y_2) \to \pm\infty$ طبقاً لاشارة (y_{10}, y_{20}). ومن (19) نجد أن

$$y_2 = (y_1 / K)^2 \tag{20}$$

وهى قطوع مكافئة (parabolas). والمسارات مبينة بالشكل (١-أ) وتشير الاسهم إلى اتجاه زيادة t. ولتحديد K نحتاج لوضع شروط ابتدائية. إذا كان $(y_{10}, y_{20}) = (1,1)$ فتكون $K = 1$ وتصبح المعادلة (20)

$$y_2 = y_1^2 \tag{21}$$

والمسارات مبينة بالشكل (١-ب)



شكل (١-ب) شكل (١-أ)

(ii) وبحل النظام (17) نجد أن

$$y_1 = y_{10}e^{-2t} \quad , \quad y_2 = y_{20}e^{-t} \tag{22}$$

للدالتان $y_1(t)$ ، $y_2(t)$ يؤلان إلى نقطة الاصل عندما $t \to \infty$ والمسارات هى قطوع مكافئة

$$y_1^2 = K y_2 \tag{23}$$

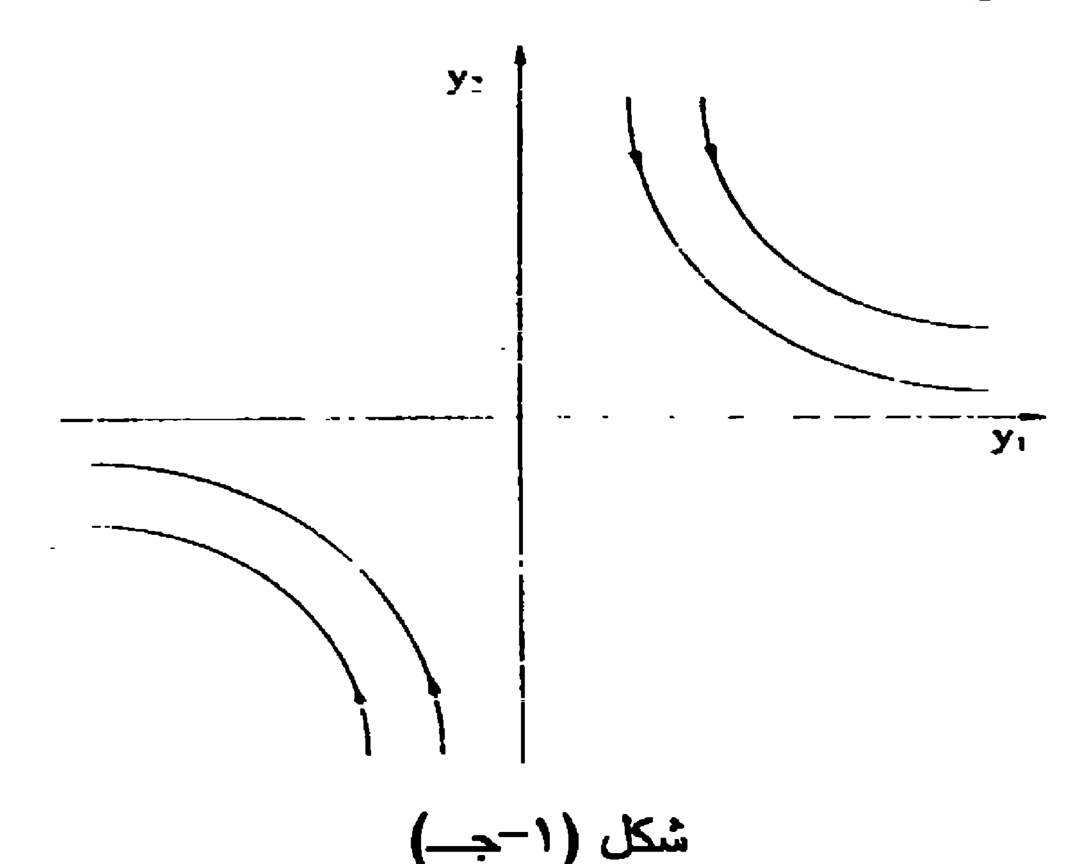
(iii) وبحل النظام (18) نجد أن

$$y_1 = y_{10} e^{2t} \quad , \quad y_2 = y_{20} e^{-2t} \tag{24}$$

فى هذه الحالة $y_1 \to \pm\infty$ طبقا لاشارة y_{10}، $y_2 \to 0$ عندما $t \to \infty$ وتعطى المسارات بالمعادلة

$$y_1 = K y_2^{-1} \quad , \quad y_1 y_2 = K \tag{25}$$

والمسارات قطوع زائدة كما فى شكل (١-جـ)



شكل (١-جـ)

نلاحظ أن إذا كانت $y_{10} = 0$ فيكون المسار هو المحور y_2 وإذا كانت $y_{20} = 0$ فيكون المسار هو المحور y_1.

الحالة الثانية: إذا كان الجذران λ_1، λ_2 مركبان مترافقان أى

$$\lambda_1 = \rho + i\omega \quad , \quad \lambda_2 = \rho - i\omega \tag{26}$$

بدلا من التعامل مع الاعداد المركبة فإننا نحول المصفوفة A فى المعادلة (4) إلى الصورة القياسية (canonical) وتصبح المعادلة (4) على الصورة

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & -\omega \\ \omega & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{27}$$

يكون من الاسهل حل (27) باستخدام الاحداثيات القطنية

$$y_1 = r\cos\theta \quad , \quad y_2 = r\sin\theta \tag{28}$$

ومن (27)، (28) نحصل على

$$\begin{aligned} \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta &= r(\rho\cos\theta - \omega\sin\theta) \\ \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta &= r(\rho\sin\theta + \omega\cos\theta) \end{aligned} \tag{29}$$

بضرب الأولى في $\cos\theta$ والثانية في $\sin\theta$ في المعادلة (29) والجمع فتحصل على

$$\dot{r} = \rho r \quad , \quad \dot{\theta} = \omega \tag{30}$$

ويكون الحل على الصورة

$$r = ae^{\rho t} \quad , \quad \theta = \omega t + c \tag{31}$$

حيث a، c ثابتان. ومن المعادلة (30) نجد أن

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\rho r}{\omega} \tag{32}$$

ويكون الحل هو

$$r = b\exp(\rho\theta/\omega) \tag{33}$$

وتكون المسارات لولبية spral.

إذا كانت $\omega > 0$ فأننا نستنتج من (30) أن θ تزداد مع الزمن وان اللولبيات (spirals) تكون في عكس اتجاه عقارب الساعه.

وإذا كانت $\omega < 0$ تكون اللولبيات في اتجاه عقارب الساعه. من المعادلتين (28)، (31) نجد أن

$$y_1 = ae^{\rho t}\cos(\omega t + c)\ , \quad y_2 = ae^{\rho t}\sin(\omega t + c) \tag{34}$$

وبحذف t نحصل على المسارات

$$\sqrt{y_1^2 + y_2^2} = ae^{\rho t} \tag{35}$$

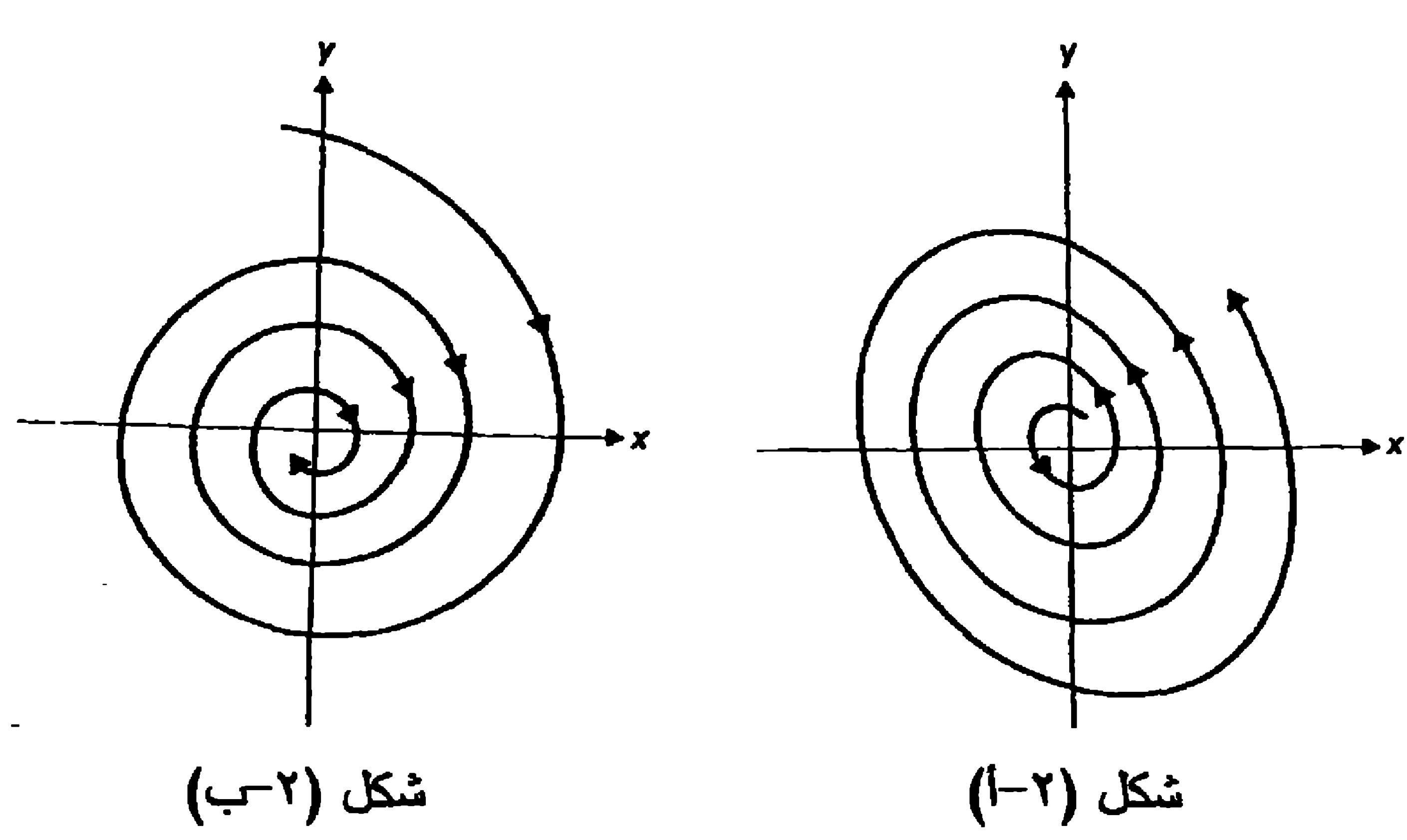
وكما بينا سابقاً فهي لولبيات. ويحدد الثابتان a، c من الشروط الابتدائية. وإذا كانت الشروط الابتدائية للحل (y_1, y_2) هي (y_{10}, y_{20}) فإننا من (34) نستنتج أن

$$a = \sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2}\ ,\ \ c = \omega^{-1} \tan^{-1}(y_{20} / y_{10}) \tag{36}$$

ومن (34) نرى أن طبيعة الحلول تعتمد على ρ.

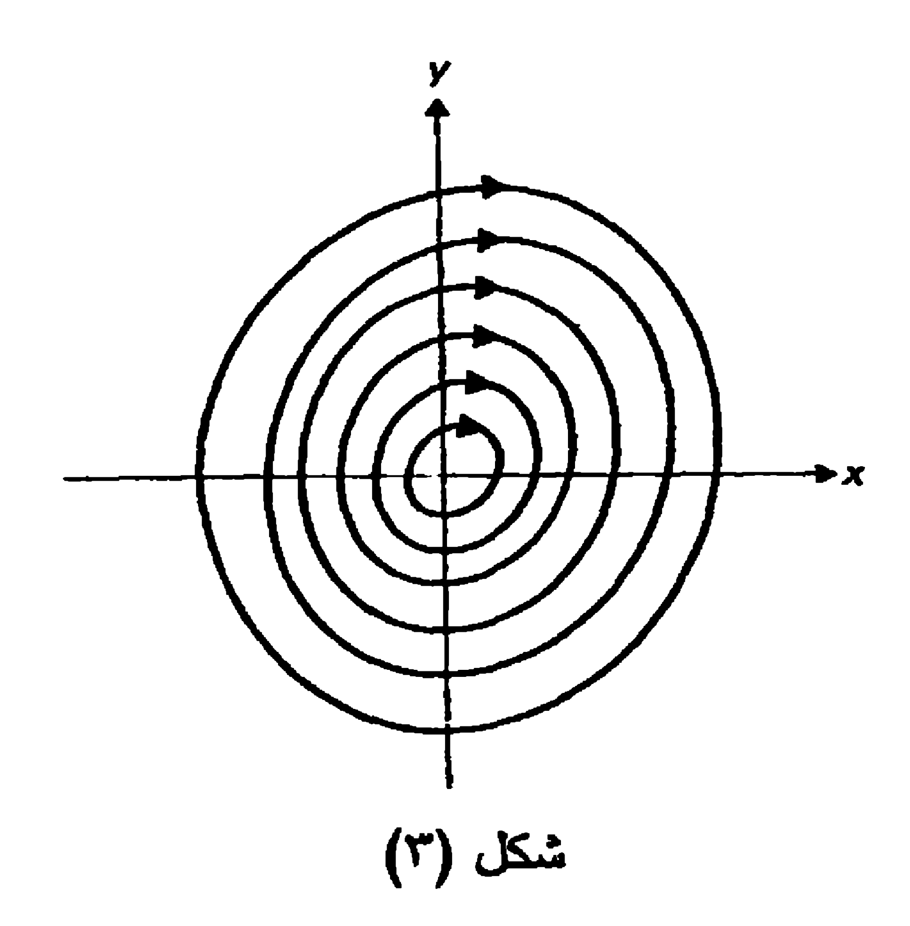
فإذا كان $\rho > 0$، $|y_1| \to \infty$، $|y_2| \to \infty$ عندما $t \to \infty$ وتكون نقطة الاصل بؤرة (focus) غير مستقرة شكل (٢-أ).

وإذا كان $\rho < 0$، y_1, y_2 يؤولان إلى الصفر عندما $t \to \infty$ فإن نقطة الاصل تكون بؤرة مستقرة تقاربياً شكل (٢-ب).



شكل (٢-ب) شكل (٢-أ)

إذا كان $\rho = 0$ فان المسارات تكون دوائر وتكون نقطة الاصل ليست على المسارات فتكون نقطة الاصل مركز (center) مستقرة كما في شكل (٣)



شكل (٣)

والمثال التالى يوضح البؤرة المستقرة.

مثال (٢): ناقش طبيعة نقطة الاتزان للنظام

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{37}$$

الحل: نقطة الأصل هى نقطة الاتزان. والقيم الذاتية للمصفوفة هى

$$-(1-\lambda)(3+\lambda)+8=0 \tag{38}$$

وحليها هما

$$\lambda_1 = -1+2i \quad , \quad \lambda_2 = -1-2i \tag{39}$$

المتجه الذاتى $\underline{v}_1$ ذا المركبتين (v_{11}, v_{12}) نحصل عليه من

$$\begin{bmatrix} 1+1-2i & -4 \\ 2 & -3+1-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{40}$$

ويمكن كتابة (40) كمعادلتين مرتبطتين خطياً، الأول هو

$$(2-2i)v_{11} - 4v_{12} = 0 \tag{41}$$

$$2v_1 - (2+2i)v_{12} = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (42)$$

نختار مصفوفة التحويل P على الصورة

$$P = [\mathrm{Im}(v_1)\,\mathrm{Re}(v_1)] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (43)$$

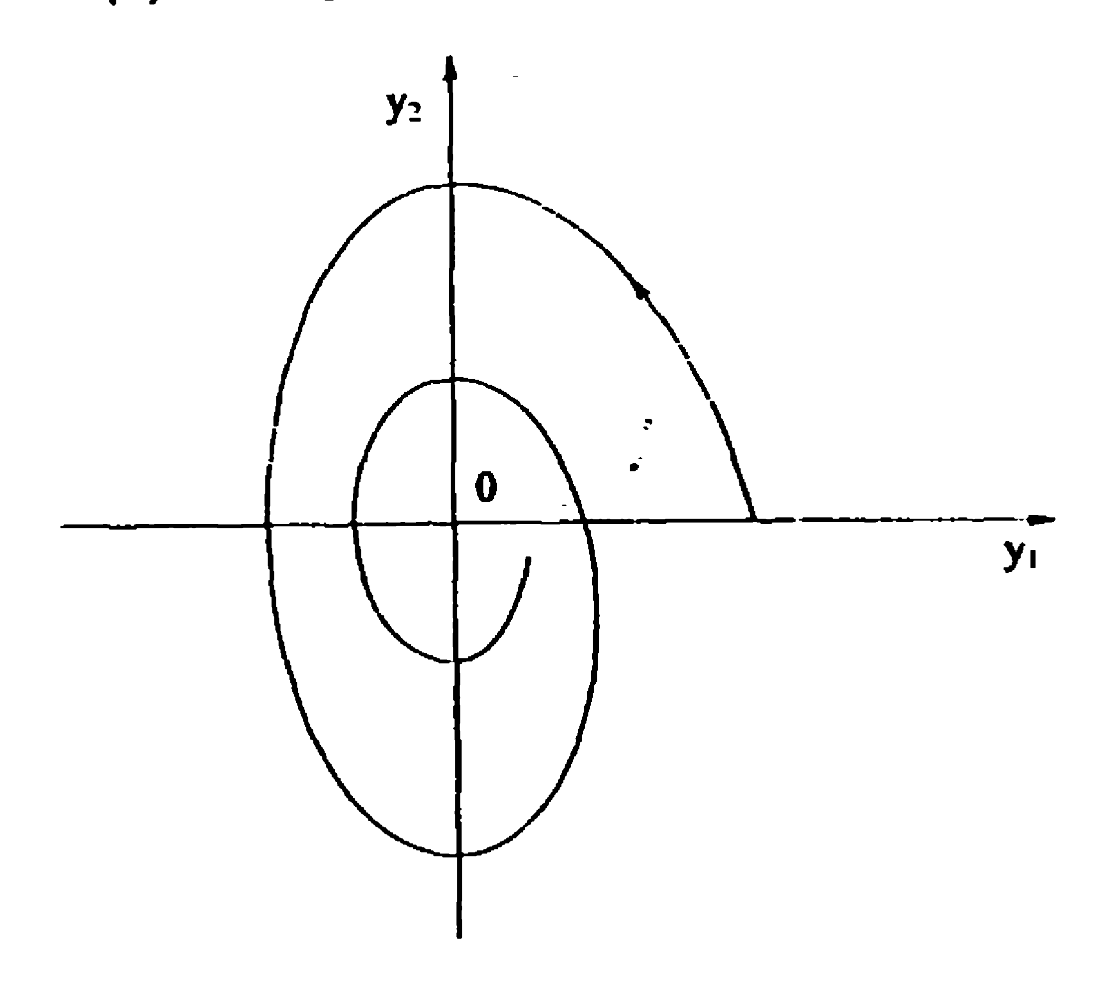
حيث Im، Re تعنى الجزء التخيلى والجزء الحقيقى على الترتيب. ومن (10)، (11)، (43) نجد أن

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad (44)$$

نلاحظ أن المعادلتين (27)، (44) هما نفس الصورة ويكون الحل هو

$$y_1 = ae^{-t}\cos(2t+c) \quad , \quad y_2 = ae^{-t}\sin(2t+c) \qquad (45)$$

ويكون نقطة الاصل بؤرة مستقرة والمسارات كما فى الشكل (٤)



شكل (٤)

باستخدام (10) ، (43)، (45) نستنتج أن

$$x_1 = 2ae^{-t}\sin(2t+c) \quad , \quad x_2 = ae^{-t}[\sin(2t+c) - \cos(2t+c)] \qquad (46)$$

والمسارات هى لولبيات ونقطة الاتزان هى بؤرة مستقرة والخواص الكيفية للنظام لا متغيرة (invariant) بالنسبة إلى التحويل الخطى.

الحالة الثالثة: الجذور متساوية $(\lambda = \lambda_1 = \lambda_2)$

لا نضمن فى هذه الحالة أن نحصل على متجهين ذاتين مستقلين خطياً. وبالاعتماد على وجود متجهين ذاتين مستقلين خطيا يكون لدينا احتمال صيغتين قياستين فى هذه الحالة

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

والمعادلات التى نحتاج لفحصها هى

$$\dot{y}_1 = \lambda y_1 \quad , \quad \dot{y}_2 = \lambda y_2 \qquad (47)$$

أو

$$\dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2 \quad , \quad \dot{y}_2 = \lambda y_2 \qquad (48)$$

نأخذ المعادلة (47)

ويكون حلول (47) هى

$$y_1 = y_{10} e^{\lambda t} \quad , \quad y_2 = y_{20} e^{\lambda t} \qquad (49)$$

وتكون المسارات خطوط مستقيمة وهى

$$y_1 = (y_{10} / y_{20}) y_2 \qquad (50)$$

إذا كان $\lambda < 0$ فإن المسارات $\leftarrow 0$ عندما $t \to \infty$ وتكون نقطة الاصل عقدة مستقرة تقاربياً. إذا كان $\lambda > 0$ فإن المسارات $\leftarrow \infty$ عندما $t \to \infty$ وتكون نقطة الأصل عقدة غير مستقرة. (بعض المؤلفين يشير إلى هذه العقد بالنجم star)

ننظر الآن إلى حلول المعادلة الثانية (48)

ويكون حلول (48) هى

$$y_1 = y_{10} e^{\lambda t} + t y_{20} e^{\lambda t} \quad , \quad y_2 = y_{20} e^{\lambda t} \qquad (51)$$

وتكون معادلة المسارات

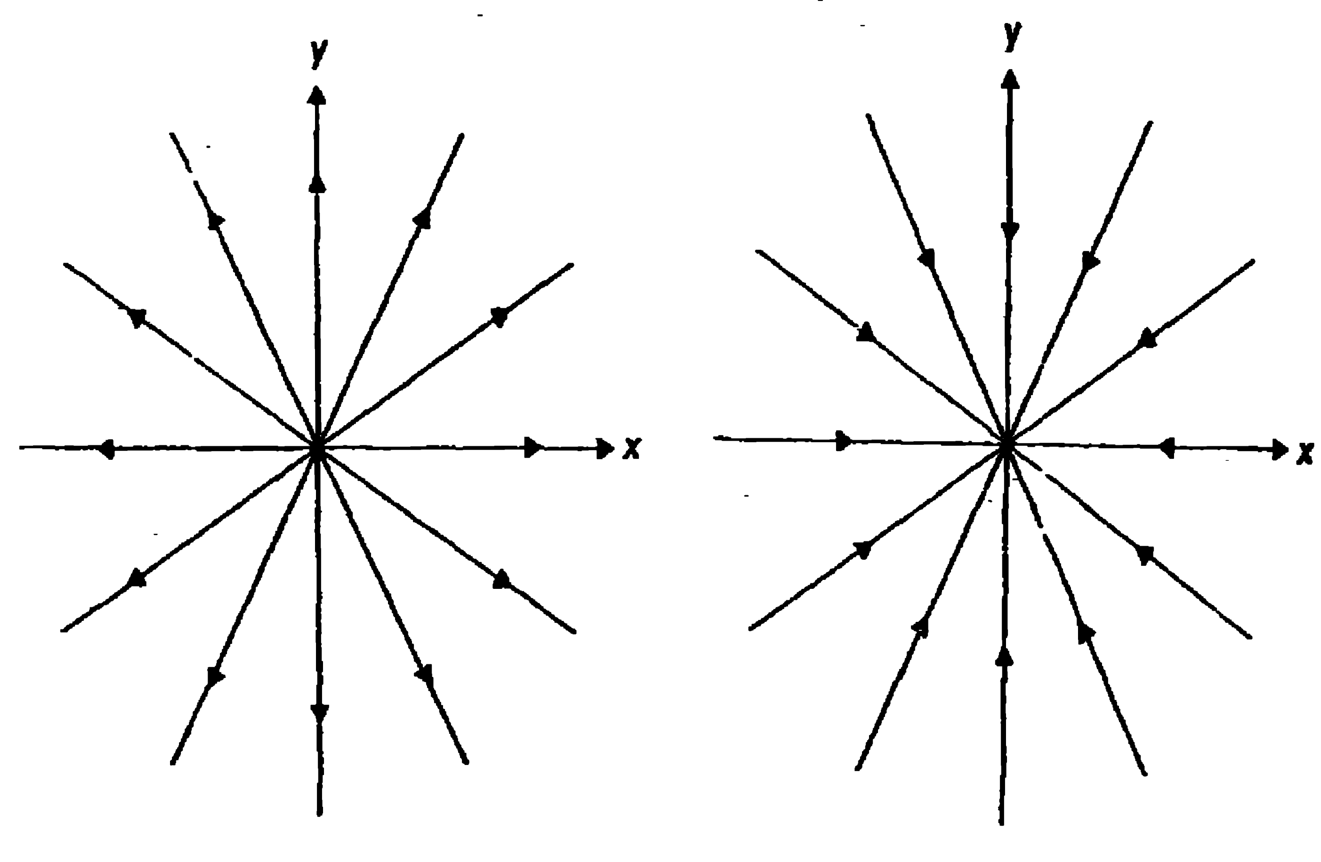
$$\frac{dy_1}{dy_2}=\frac{\lambda y_1+y_2}{\lambda y_2} \tag{52}$$

ويكون حل هذه المعادلة المتجانسة هو

$$\lambda y_1 = y_2 \ln y_2 + c y_2 \tag{53}$$

حيث c ثابت [يساوى $(\lambda y_{10} - y_{20}\ln y_2)/y_{20}$]

ومن المعادلتين (51) ، (52) نستنتج أن عندما $t \to \infty$ فإن $\frac{dy_1}{dt} \to \infty$
وهذا يعنى أن المسارات تتقارب الى المحور y_1. إذا كان $y_{20}=0$ تكون المسارات هى المحور y_1.
إذا كان $\lambda<0$، فإن y_1، y_2 يؤولان نقطة الأصل عندما $t \to \infty$ فتكون نقطة الأصل عقدة مستقرة تقاربياً. أما إذا كان $\lambda>0$ فتكون نقطة الأصل عقدة غير مستقرة. (ويسميها بعض المؤلفين عقدة غير صحيحة (improper node) .
كما يسميها البعض الآخر بالعقدة نجمية الشكل
(star-shaped stable or unstable node) وقد تكون مستقرة أو غير مستقرة كما فى الشكل (٥)



شكل (٥)

عقدة نجمية الشكل مستقرة — عقدة نجمية الشكل غير مستقرة

مثال (٣): لوجد حل النظام

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 25 \\ -4 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (54)$$

والقيم الذاتية للمصفوفة هى

$$-(11-\lambda)(9-\lambda)+100=0 \qquad (55)$$

ومنها نجد أن

$$\lambda = 1,\ 1 \qquad (56)$$

فى هذه الحالة يكون لدينا متجه ذاتى واحد $\underline{v}_1$ الذى يتناسب مع $[5,-2]^T$ ولا يمكن وضع المصفوفة فى صورة مصفوفة قطرية. ومن نظرية كايلى وهاملتون (Cayley , Hamilton) نستنتج أن لأى مصفوفة 2×2 ذات جذر مكرر ولأى متجه $\underline{v}$ ، ان

$$[A-\lambda I]^2 \underline{v} = 0 \qquad (57)$$

ولنكن $\underline{v}_1$ معرفة بالعلاقة

$$\underline{v}_1 = [\underline{\underline{A}} - \lambda I]\underline{v} \qquad (58)$$

من (57)، (58) نستنتج أن $\underline{v}_1$ متجه ذاتى. ونختارمصفوفة التحويل P بحيث تكون $[\underline{v}_1, \underline{v}]$. ونكون قد افترضنا أن $\underline{v}$، $\underline{v}_1$ مستقلين خطياً، وأن $\underline{v}_1$ ليس متجه صفرى.

فى مثالنا: سوف نفترض أن $\underline{v} = [1,0]^T$، T تعنى مدور المصفوفة، وأن $\underline{v}_1$ معطى بالعلاقة

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 11 & 25 \\ -4 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad (59)$$

ويكون المصفوفة P هى

$$P = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad (60)$$

ومن (10)، (11)، (54) ينتج أن

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad (61)$$

ويكون حل (61) هو

$$y_1 = \left(y_{10} + t y_{20} \right) e^{t} \quad , \quad y_2 = y_{20} e^{t} \qquad (62)$$

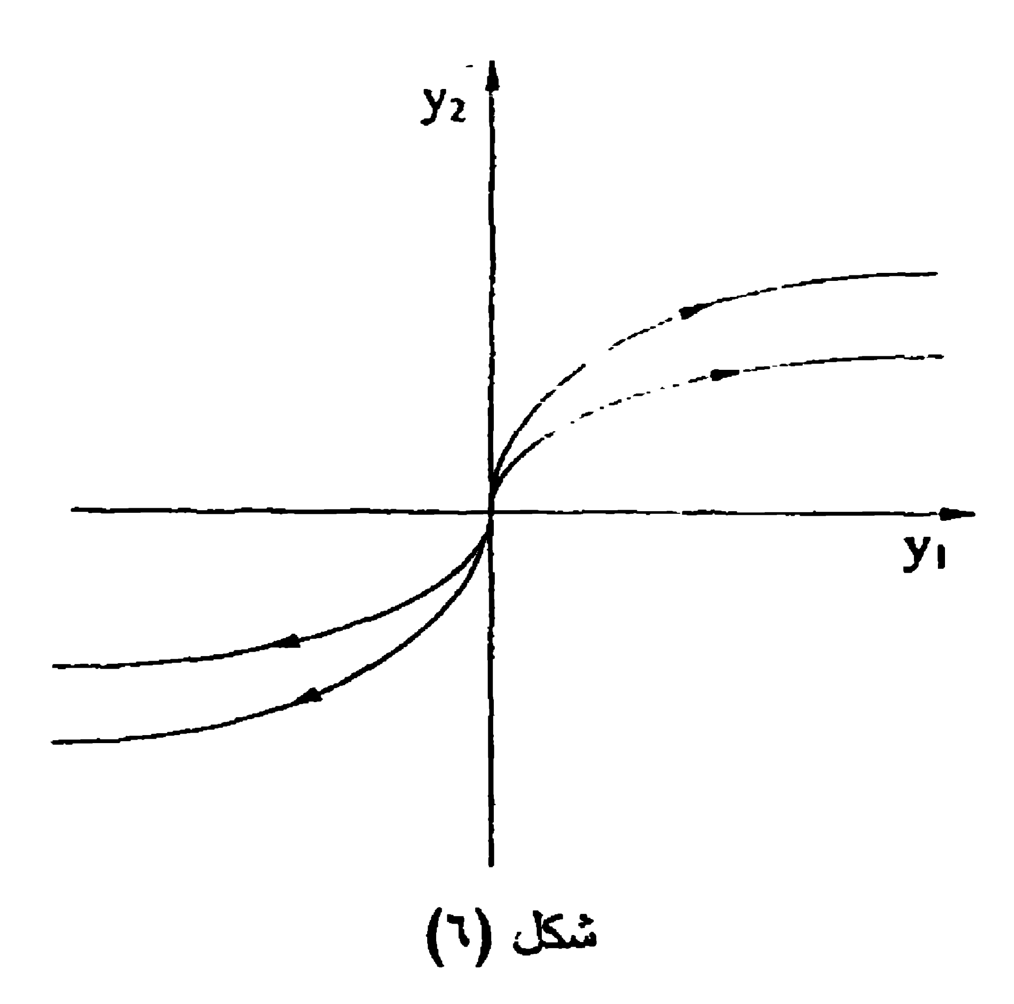
وتكون المسارات هى

$$y_1 = y_2 \ln y + c y_2 \qquad (63)$$

ومن (52)، (62) نستنتج الخواص التالية

(أ) عندما $t \to \infty$ كل من $|y_1|$، $|y_2| \to \infty$ وأن النسبة $(y_1 / y_2) \to \infty$. وتكون نقطة الأصل عقدة غير مستقرة وتكون المسارات متقاربة (asymptotic) للمحور y_1.

(ب) الميل (dy_1 / dy_2) يتلاشى على الخط المستقيم $y_1 = -y_2$. الشكل (٦) يبين المسارات.



شكل (٦)

ملحوظة: إذا كانت لدينا المعادلة على الصورة $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ax + by}{cx + dy}$ فإنه يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{dx}{dt} = ax - by, \frac{dy}{dt} = cx + dy \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ونتبع نفس طرية الحل.

تلخيص لبعض الخواص والنتائج:

يمكن كتابة المعادلة (8) بدلالة $tr\,A$ (أى trace A) وأن $\det \underline{A}$ (محددة A) على الصورة

$$(\lambda_1, \lambda_2) = \{trA \pm \sqrt{(trA)^2 - 4\det A}\}/2 \qquad (64)$$

والنتائج التى حصلنا عليها للنظام الخطى يمكن تلخيصها كما يلى:

(أ) إذا كان $(trA)^2 > 4\det A > 0$، فإن القيم الذاتية تكون حقيقية ومختلفة

وإذا كان $trA < 0$ تكون نقطة الاتزان عقدة مستقرة تقاربياً

وإذا كان $trA > 0$ تكون نقطة الاتزان عقدة غير مستقرة

(ب) إذا كان $4\det A > (trA)^2 \geq 0$ تكون القيم الذاتية أعداد مركبة.

وإذا كان $trA < 0$ فإن نقطة الأصل تكون بؤرة مستقرة تقاربياً كما فى شكل (٢ – ب).

وإذا كان $trA > 0$ تكون نقطة الأصل بؤرة غيرمستقرة كما فى شكل (٢–أ)

وإذا كان $trA = 0$ تكون نقطة الأصل مركز مستقر كما فى شكل (٣)

(جـ) إذا كان $(trA)^2 - 4\det A = 0$ تكون القيم الذاتية متساوية وتكون نقطة الاصل مستقرة تقاربياً إذا كان $trA < 0$ وتكون غير مستقرة إذا كان $trA > 0$.

فى جميع الحالات الثلاث، $\det A > 0$. فإذا كان $\det A < 0$، فإن القيم الذاتية تكون حقيقية ولها اشارات مختلفة. وتكون نقطة الأصل نقطة سرج غير مستقرة.

لقد عرفنا أن نقطة الأتزان تكون مستقرة تقاربياً إذا كانت المسارات تؤول إلى نقطة الأتزان عندما $t \to \infty$. أما إذا كانت المسارات $\leftarrow \infty$ عندما $t \to \infty$ فتكون نقطة الأتزان غير مستقرة. وإذا كانت المسارات محدودة (bounded)

فإن نقطة الأتزان (المركز) تكون مستقرة. وفى باب مستقل سوف نتعرض لدراسة مفهوم الاستقرار بتوسع.

ملحوظة: إذا كانت الأجزاء الحقيقية للقيم الذاتية فى $D\underline{f}(\underline{0})$ لاتساوى الصفر فإن النظام يسمى نظاما زائديا (hyperbolic).

إذا جعلنا f_1 ، f_2 دوال خطية فى المعادلة (1) ، نكون قادرين على الحصول على حلول صريحه (explicit) للنظام.

وفى البند التالى سوف نمد (extend) النتائج التى حصلنا عليها إلى النظم غير الخطية. وفى هذه النظم يكون الحصول على حلول صريحه غير ممكن فى معظم الأحوال.

١٤-٣ نظم غير خطية فى بعدين

Two-dimensional nonlinear systems

نفترض أن نقطة الأصل هى نقطة الاتزان للنظام (1) فى البند (٢) ونريد معرفة سلوك المسارات لهذا النظام بجوار نقطة الأصل. وسوف نفترض أيضاً أن f_1 ، f_2 ومشتقاتها الجزئية متصلة بالقرب من نقطة الأصل ويمكن كتابة المعادلة

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad , \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

على الصورة

$$\underline{\dot{x}} = A\underline{x} + \underline{h}(\underline{x}) \qquad (1)$$

والمصفوفة A غير شاذه $(\det A \neq 0)$ ، $\underline{h}(\underline{x})$ تحقق الشرط

(2-a) عندما $\underline{x} \to 0$ فإن $\|\underline{h}(\underline{x})\| / \|\underline{x}\| \to 0$

أو

$$\lim_{r \to 0} h_i(x_1, x_2)/r = 0 \quad , \quad i = 1,2 \ , \ \|\underline{x}\| = r \qquad (2\text{-b})$$

الشروط التى وضعناها تتطلب أن نقطة الأصل تكون نقطة اتزان منعزله وأن $\|\underline{h}(\underline{x})\|$ صغيرة بالمقارنة مع $\|\underline{x}\|$. المعادلتان (1)، (2) تصف النظم غير الخطية.

يمكن أن نتوقع فى معظم الحالات تكون المسارات بالقرب من نقطة الاتزان للنظم الخطية وغير الخطية متشابهه ما عدا الحالتين عندما تكون القيم الذاتية للمصفوفة A تخيلية صرفه (pure) أو متساوية. وتغير بسيط فى النظام سوف يؤدى إلى تغير فى الجزء الحقيقى فى القيمة الذاتية وسيتحول المركز إلى لولبى مستقر أو غير مستقر. وكذلك تحت تأثير حيود (perturbation) صغير، الجذران المتساويان يصبحا غير متساويين أو قيم ذاتية مركبة. وسوف نقارن نوع واستقرار نقطة الاتزان للنظام الخطى وغير الخطى فى الجدول التالى. و λ_1، λ_2 هما القيمتان الذاتيان للمصفوفة A.

قيم ذاتية	خطى		غير خطى	
	النوع	الاستقرار	النوع	الاستقرار
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	عقدة	مستقر تقاربيا	عقدة	مستقر تقاربيا
$\lambda_1 < \lambda_2 > 0$	عقدة	غير مستقر	عقدة	غير مستقر
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	سرج	غير مستقر	سرج	غير مستقر
$\lambda_{1,2} = \rho \pm i\omega$				
$\rho < 0$	لولبى	مستقر تقاربيا	لولبى	مستقر تقاربيا
$\rho > 0$	لولبى	غير مستقر	لولبى	غير مستقر
$\lambda_{1,2} = \pm i\omega$	مركز	مستقر	مركز أو لولبى	غير محدد
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	عقدة	غير مستقر	عقدة او لولبى	غير مستقر
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	عقدة	مستقر تقاربيا	عقدة او لولبى	مستقر تقاربيا

١٤-٤ أمثلة:

مثال (١): اوجد نقاط الاتزان للنظام

$$\dot{x}_1 = x_2 - \mu x_1(x_1^2 + x_2^2) \quad \dot{x}_2 = -\dot{x}_1 - \mu x_2(x_1^2 + x_2^2) \tag{3}$$

وعين نوعها واستقرارها.

الحل: نقاط الأتزان تعطى من

$$x_2 - \mu(x_1)(x_1^2 + x_2^2) = -x_1 - \mu x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0 \tag{4}$$

والحل الوحيد هو

$$x_1 = x_2 = 0 \tag{5}$$

ونقطة الأصل هى نقطة الأتزان الوحيدة فى النظام (3) والنظام الخطى المناصر للنظام (3) هو

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

وتكون القيم الذاتية هى

$$\lambda_{1,2} = \pm i \tag{7}$$

ونقطة الاتزان للنظام الخطى هى مركز مستقر. ولحل النظام غير الخطى نستخدم الاحداثيات القطنية فنحصل على

$$\begin{aligned} \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta &= r\sin\theta - \mu r^3\cos\theta \\ \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta &= -r\cos\theta - \mu r^3\sin\theta \end{aligned} \tag{8}$$

وبحل هاتين المعادلتين ينتج أن

$$\dot{r} = -\mu r^3 \quad , \quad \dot{\theta} = -1 \tag{9}$$

وبحل المعادلتين فى (9) نحصل على

$$r = r_0 / \sqrt{1 + 2\mu t r_0^2} \quad , \quad \theta = \theta_0 - 1 \tag{10}$$

حيث r_0، θ_0 هم القيم الابتدائية لكل من r، θ.

نلاحظ أن فى النظام غير الخطى تكون اتجاه المسارات اللولبية فى اتجاه عقارب الساعه. إذا كان $\mu > 0$، لجميع قيم $t > 0$، فإن r تتناقص مع زيادة t عندما $t \to \infty$ فإن $r \to 0$. ويكون نقطة الأصل بؤرة مستقرة. وإذا كان $\mu < 0$ لجميع قيم t، $t > 0$ فإن r تتزايد بزيادة t وعندما $t \to \frac{1}{2}|\mu| r_0^2$ فإن $r \to \infty$. وبذلك تكون نقطة الأتزان غير مستقرة. وإذا كان $\mu = 0$ فيكون النظام خطى وتكون المسارات دوائر $(r = r_0)$. والمركز فى النظام الخطى

يصبح لولبياً مستقراً إذا كان $\mu > 0$ ولولبياً غير مستقر إذا كان $\mu < 0$ فى النظام غير الخطى.

ملحوظة: نود أن نؤكد أن النتائج فى الجدول السابق تكون محققة فقط للمسارات بالقرب من نقطة الأتزان. إذا كانت نقطة الأتزان بؤرة غير مستقرة فإن المسارات للنظام الخطى وغير الخطى تدور لولبياً بعيداً عن نقطة الأصل. وللنظم الخطية تؤول المسارات إلى ∞ عندما $t \to \infty$. ويمكن أن تؤول إلى منحنى مغلق (حل دورى) للنظام غير الخطى. ويسمى هذا المنحنى المغلق دائرة النهاية (limit cycle) كما يتضح من المثال التالى

مثال (٢): حدد نوع واستقرار نقطة الاتزان للنظام

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1 - \mu x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2 - \mu x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned} \qquad (11)$$

الحل: نقطة الأصل هو نقطة الأتزان الوحيدة للنظام الخطى وهو

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

وتكون القيمتان الذاتينان

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i \qquad (13)$$

وتكون نقطة الأتزان لولبياً غير مستقرة. أى أن عندما $t \to \infty$ فإن المسارات $\to \infty$.

ولحل النظام (11) نستخدم الاحداثيات القطنية كما فى المثال السابق ويحل المعادلتين نحصل على

$$\dot{r} = r(1 - \mu r^2) \quad , \quad \dot{\theta} = -1 \qquad (14)$$

ويمكن كتابة المعادلة الأولى على الصورة

$$\int \left[\frac{1}{r} + \frac{\sqrt{\mu}}{2(1 - r\sqrt{\mu})} - \frac{\sqrt{\mu}}{2(1 + r\sqrt{\mu})} \right] dr = \int dt$$

ويحل المعادلتين فى (14) نجد أن

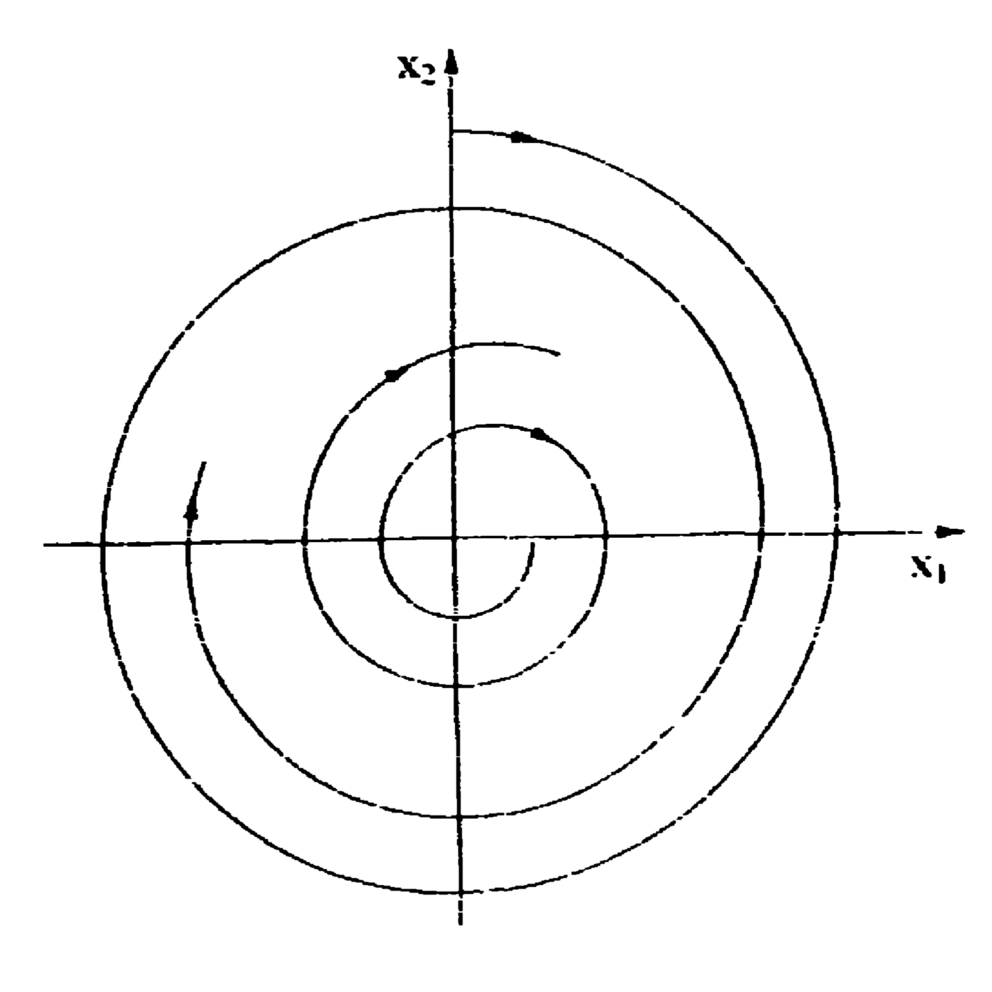
$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 - t \\ r &= r_0 / \sqrt{\mu r_0^2 + (1 - \mu r_0^2) e^{-2t}} \end{aligned} \qquad (15)$$

حيث θ_0، r_0 قيم ابتدائية لكل من θ، r.

تكون نقطة الأتزان، فى النظم غير الخطية ، تدور لولبياً فى اتجاه عقارب الساعه مع زيادة r مع زيادة t . ومن المعادلة (15) نستنتج أن عندما

$t\to\infty$ فإن $r\to 1/\sqrt{\mu}$. وإذا كانت $\mu=0$ نحصل على النظام الخطى وفيه $r\to\infty$ عندما $t\to\infty$.

ملحوظة: نلاحظ من المعادلة (14) ان النقطتين التى عندهما $\dot{r}=0$ هما $r=0$ ، $r=1/\sqrt{\mu}$. وبالتالى المسار الذى يبدأ بالقرب من نقطة الأصل يدور لولبياً بعيداً إلى الدائرة التى نصف قطرها $1/\sqrt{\mu}$ كما فى الشكل (٦)



شكل (٦)

والان ندرس استقرار دائرة النهاية (حل دورى) إذا كان $r_0^2>1/\mu$ فإننا نستنتج من المعادلة (15) (أو (14)) أن r تتناقص بزيادة t وأن عندما $t\to\infty$ فإن $r\to 1/\sqrt{\mu}$. وبالتالى جميع المسارات التى تبدأ بالقرب من داشرة النهاية ($r=1/\sqrt{\mu}$) تدور لولبياً إلى دائرة النهاية كما فى شكل (٦). وتكون دائرة النهاية مستقرة.

يوضح هذا المثال أهمية الحدود غير الخطية فى إعداد النماذج. فبينما النموذج الخطى يتنبأ بحل غير محدود فإن النموذج غير الخطى يتنبأ بحل محدود أو حل دورى. وفى المثال التالى سوف نقارن بين النظامين الخطى وغير الخطى.

مثال (٣): إدرس حركة البندول المخمد (damped).

الحل: معادلة الحركة للبندول المخمد يمكن كتابتها على الصورة

$$m\ell^2\ddot{\theta}+k\,\ell\dot{\theta}+mg\,\ell\sin\theta=0 \qquad (16)$$

حيث m، ℓ هي كتلة وطول البندول على الترتيب، θ هي الزاوية بين البندول والخط الرأسي لأسفل ، g هي عجلة الجاذبية الارضية و k ثابت موجب. نلاحظ في المعادلة (16) أننا افترضنا أن المقاومة تتناسب مع السرعة. وعلى ذلك تؤول المعادلة (16) إلى

$$\ddot{\theta}+\alpha\dot{\theta}+\omega^2\sin\theta=0 \qquad (17)$$

حيث $\alpha=k/m\ell$، $\omega^2=g/\ell$ ويمكن كتابة (17) على صورة نظام

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2-\omega^2\sin x_1 \end{aligned} \qquad (18)$$

تعطى نقاط الاتزان بالعلاقة

$$x_2=\alpha x_2+\omega^2\sin x_1=0 \qquad (19)$$

وتكون الحلول هى

$$x_2=0 \quad , \quad x_1=n\pi \quad , \quad (n=0,\pm,2,\ldots) \qquad (20)$$

نفحص استقرار نقطة الأصل. والنظام الخطى المناظر للنظام (18) هو

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & -\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \qquad (21)$$

وقيمتاه الذاتيتان هما

$$\lambda_{1,2}=\left[-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\omega^2}\right]/2 \qquad (22)$$

(أ) إذا كان $\alpha^2>4\omega^2$ (الاخماد يكون كبيرا)، $\lambda_{1,2}$ يكونا حقيقيان وسالبان ومختلفان وبالتالى تكون نقطة الأصل عقدة مستقرة تقاربياً.

(ب) وإذا كان $\alpha^2 = 4\omega^2$ فإن $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ فإن نقطة الأصل تكون عقدة مستقرة تقاربياً.

(جـ) وإذا كان $\alpha^2 < 4\omega^2$ فإن λ_1، λ_2 يكونا عددين مركبين مترافقين ولهما اجزاء حقيقية سالبه وبالتالى تكون نقطة الأصل بؤرة مستقرة تقاربياً.

الحالة $x_1 = 0$ عندما يكون البندول رأسياً إلى أسفل، نتوقع أن نقطة الأصل تكون مستقرة كما بينا بفحص النظام الخطي. نعتبر نقطة الأتزان $(\pi,0)$. وتنقل النقطة $(\pi,0)$ إلى $(0,0)$ تكتب

$$x_1^* = x_1 - \pi \quad , \quad x_2^* = x_2 \tag{23}$$

بتعويض المعادلات (23) فى المعادلات (18) نجد أن

$$\dot{x}_1^* = x_2^* \,, \quad \dot{x}_2^* = -\alpha x_2^* - \omega^2 \sin(x_1^* + \pi) = -\alpha x_2^* + \omega^2 \sin x_1^* \tag{24}$$

والصورة الخطية للمعادلات (24) هى

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1^* \\ \dot{x}_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

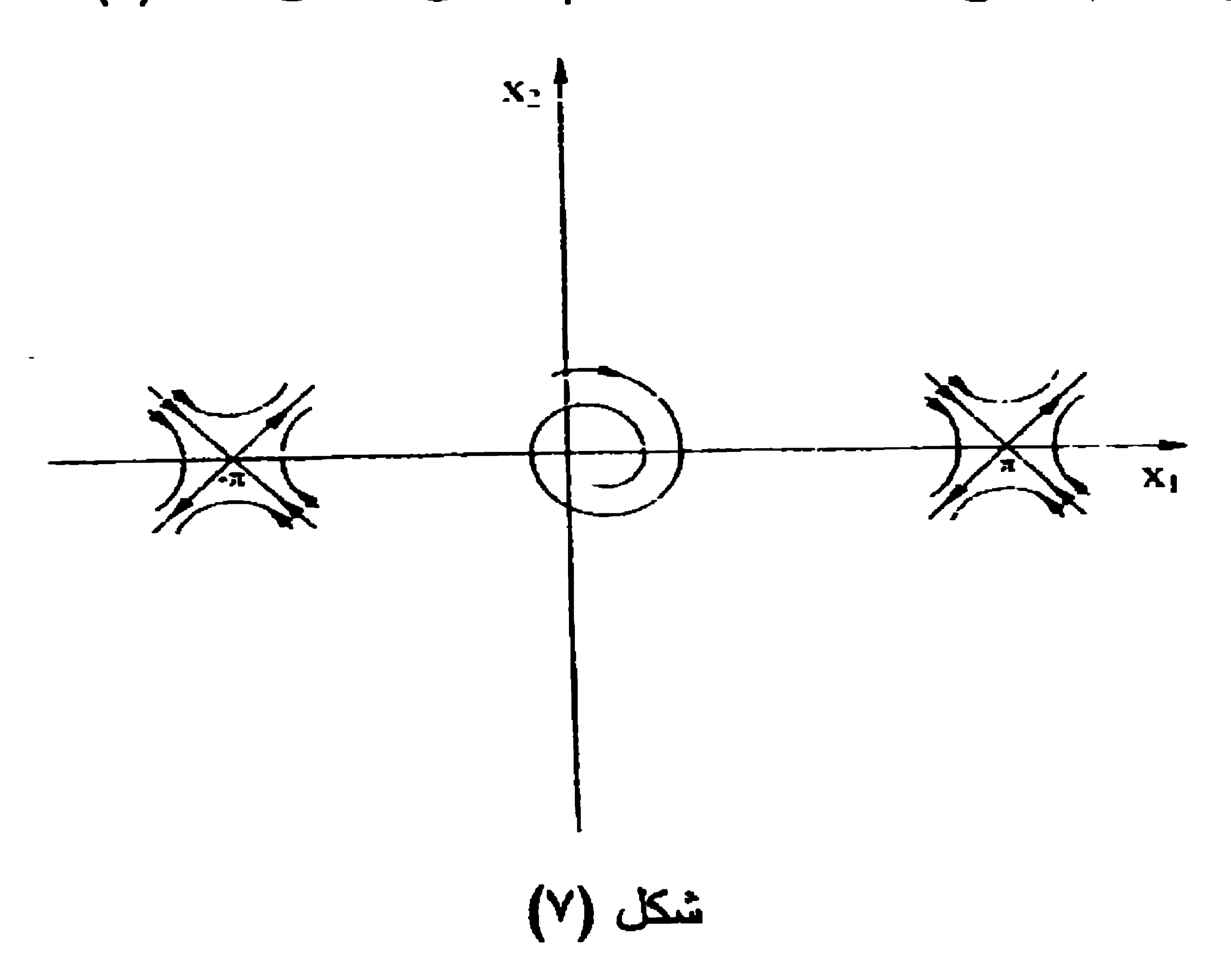
وقيمها الذاتية

$$\lambda_{1,2} = \left[-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\omega^2} \right] / 2 \tag{25}$$

فى هذه الحالة تكون λ_1، λ_2 حقيقيتان ولهما إشارة مختلفة وتكون نقطة الاتزان نقطة سرج غير مستقرة بالرغم من قيمة الاخماد. وتسمى نقطة الأتزان الحالية طبقاً للبندول فى وضع رأسى لأعلى ومن الاعتبارات الفيزيائية، فإننا نتوقع أن هذا الوضع يكون غير مستقر.

حيث $\sin x_1$ دورية ولها الدورة 2π فإننا نستنتج أن نقاط الأتزان هى $(\pm 2n\pi,0)$ تكون مستقرة تقاربياً وأن $[\pm(2n+1)\pi,0]$ تكون غير مستقرة. وفى غياب الاخماد $(\alpha = 0)$. تبين المعادلات (22)، (25) ان نقاط الأتزان $(2n\pi,0)$ هى مراكز (قيمة ذاتية تخيلية صرفه) وأن $[(2n+1)\pi,0]$ هى نقط سرج.

وتكون المسارات فى مستوى الطور للنظام الخطى كما فى شكل (٧)

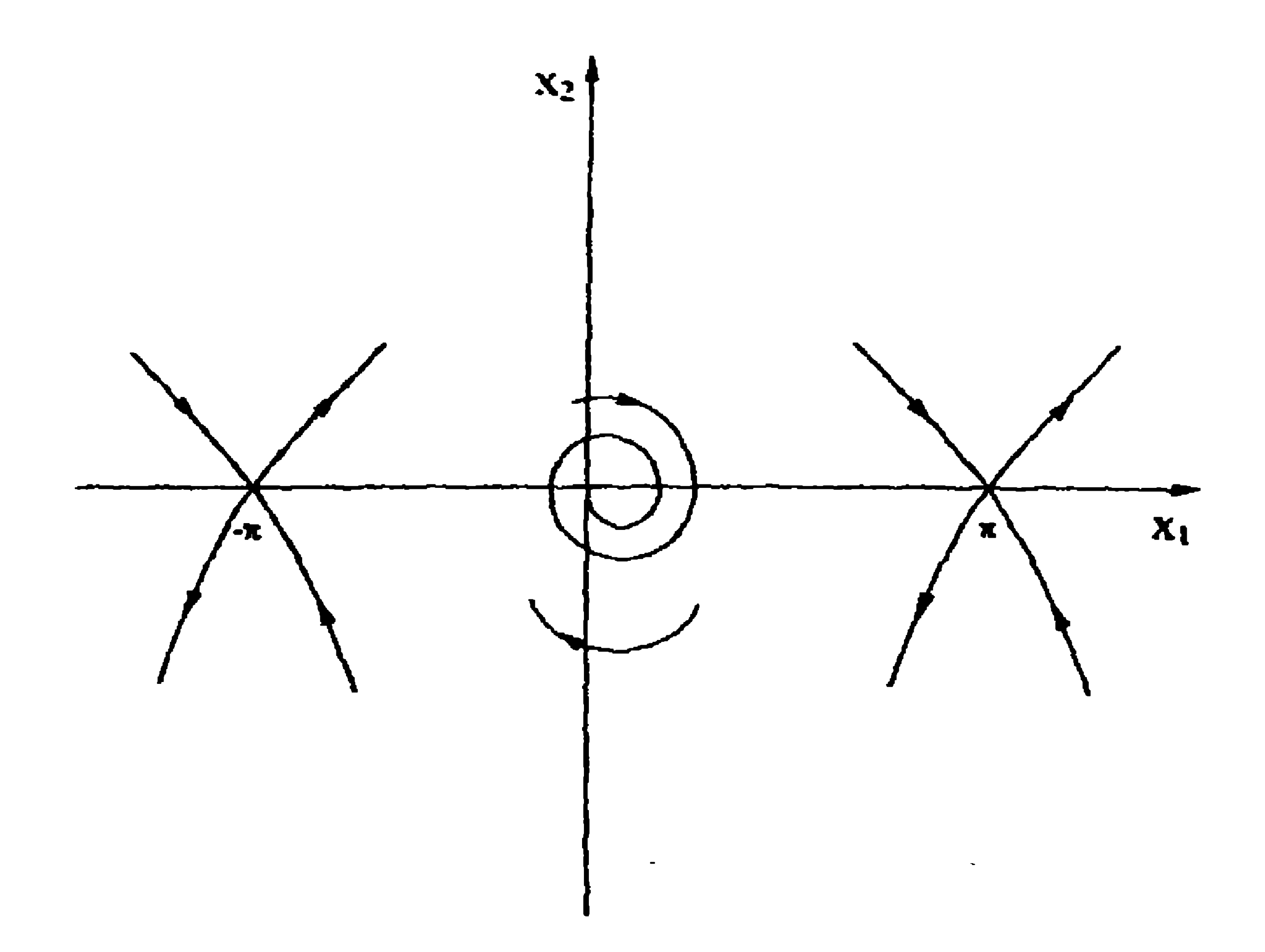


شكل (٧)

وللحصول على المسارات للنظام غير الخطى نحل المعادلات (18) وبحذف t نحصل على

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\left[\frac{x_2}{\alpha x_2 + \omega^2 \sin x_1}\right] \qquad (26)$$

وهذه المعادلة من الصعب حلها. ولكن من الجدول السابق نستنتج للنظام غير الخطى ان نقطة الأصل $(0,0)$ تكون عقدة مستقرة تقاربيا، $(-\pi,0)$ و $(\pi,0)$نقطتى عقدة. وكل المسارات بجوار $(0,0) \leftarrow (0,0)$ عندما $t \to \infty$ ويوجد مسار وحيد الذى يمر خلال $(\pi,0)$. هذا المسار يكون فاصل (separatrix). وبالمثل يوجد أيضاً فاصل آخر الذى يمر خلال $(-\pi,0)$. وجميع المسارات التى تبدأ فى المنطقة المحدودة بهذين الفاصلين (separatrices) تكون منجذبه إلى نقطة الأصل وهذه المنطقة هى حوض الجذب (basin of attraction) لنقطة الأصل. وبنفس المنطق يمكن تطبيقه على المنطقة $\pi \le x \le 3\pi$, $-3\pi \le x \le -\pi$ ومستوى الطور للنظام خير الخطى ممثل فى الشكل (٨)



شكل (٨)

مثال (٤): معادلة لوتكا – فولتيرا (Lotka-Volterra): ادرس الحل الكيفى لمعادلة لوتكا – فولتيرا.

الحل: نعرف ان معادلة لوتكا فولتيرا على الصورة

$$\frac{dN_1}{dt}=a_1N_1-b_1N_1N_2,\quad \frac{dN_2}{dt}=b_2N_1N_2-a_2N_2 \qquad (27)$$

حيث N_1، N_2 هما تعداد (كثافة) الفريسه (prey) والمفترس (predator). وفى غياب المفترس فإن معدل زيادة N_1 يتناسب مع N_1 وفى غياب الفريسه يموت المفترس بمعدل يتناسب مع N_2، وعدد المواجه بينهما يتناسب مع N_1N_2. وفى كل مواجهه يلتهم المفترس الفريسه وينتج منها نقصان N_1 وزيادة فى N_2. a_1، a_2، b_1، b_2 ثوابت موجبة.

وباستخدام التحويل

$$x_1=\frac{N_1b_2}{a_2}\ ,\ x_2=\frac{N_2b_1}{a_1}\ ,\ \tau=ta_1 \qquad (28)$$

فإن (27) تأخذ الصورة

$$\frac{dx_1}{d\tau}=x_1(1-x_2)\quad ,\quad \frac{dx_2}{d\tau}=\alpha x_2(x_1-1) \qquad (29)$$

حيث $\alpha = a_2 / a_1$. نقاط الأتزان هى $(0,0)$، $(1,1)$ والنظام الخطى بالقرب من $(0,0)$ هى

$$\begin{bmatrix} dx_1/d\tau \\ dx_2/d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{30}$$

والقيم الذاتية هى

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = -\alpha \tag{31}$$

وتكون نقطة الأصل نقطة سرج غير مستقرة. وتبين المعادلة (30) أن x_1 ينمو أسيا (exponentially) مع الزمن وأن x_2 يتناقص أسيا.

ندرس الآن الحلول بالقرب من $(1,1)$ لذلك ننقل نقطة الأصل ونكتب

$$x_1^* = x_1 - 1 \quad , \quad x_2^* = x_2 - 1 \tag{32}$$

وتصبح المعادلة (29) على الصورة

$$\begin{aligned} \frac{dx_1^*}{d\tau} &= -x_2^*(1 + x_1^*) \\ \frac{dx_2^*}{d\tau} &= \alpha x_1^*(1 + x_2^*) \end{aligned} \tag{33}$$

ويكون النظام الخطى المناظر

$$\begin{bmatrix} dx_1^*/d\tau \\ dx_2^*/d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} \tag{34}$$

والقيم الذاتية هى

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha} \tag{35}$$

وتكون نقطة الأتزان $(1,1)$ مركز مستقر وأن الحل يكون دوريا. ومن المعادلة (34) نستنتج بالقرب من $(1,1)$ أن المسارات تكون قطوع ناقصه (ellipses) وتعطى بالعلاقة

$$\alpha(x_1^*)^2 + (x_2^*)^2 = \text{ثابت} \tag{36}$$

ونلاحظ من الجدول السابق للنظام غير الخطى، أن نقطة الأصل $(0,0)$ تكون غير مستقرة ولا يوجد نتيجة محددة يمكن الاشارة بها إلى نقطة الاتزان $(1,1)$.

وتمثل المسارات بالمعادلة

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_1(1 - x_2)}{\alpha x_2(x_1 - 1)} \tag{37}$$

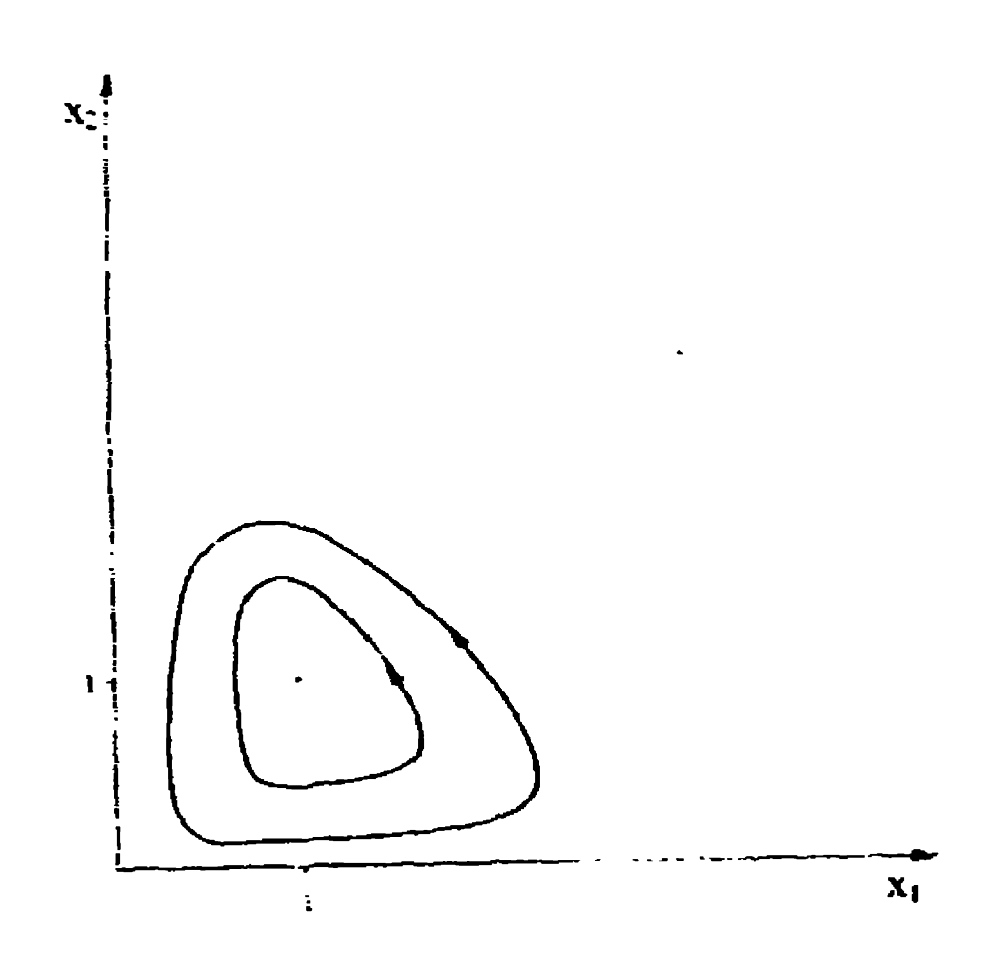
ويكون حلها هو

$$\alpha(x_1 - \ln x_1) = \ln x_2 - x_2 + \ln c$$

أو

$$c x_1^{\alpha} x_2 = e^{\alpha x_1 + x_2} \tag{38}$$

حيث c ثابت يعتمد على الشرط الابتدائي.
ورسم المعادلة (38) لقيم ثابتة للثابت c هى منحنيات مغلقة تحيط بنقطة الأتزان (1,1) كما شكل (٩)



شكل (٩)

وفى هذا المثال، فإن كل من النظام الخطى وغير الخطى ينتج حلولا دورية وأى تغيير فى الشروط الأبتدائية يؤدى إلى مسارات مختلفة.

تطوير النموذج: وأهمية هذا المثال أنه فى غياب المفترس، فإن الفريسه تزداد اسيا إلى ∞. وهذا النمو الماليثى (Malthusian) لايوجد فى التطبيق. واقترح فيرهلست (Verhulst) معادلة الأمداد أو (اللوجستيه logistic) لتأكيد أن يكون النموذج أقرب إلى الحقيقة أن يأخذ الصورة التالية

$$\frac{dN_1}{dt} = a_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K}\right) \tag{39}$$

حيث K ثابت موجب.

ويكون النقاط الحرجة هى

$$N_1 = 0 \quad , \quad N_1 = K \tag{40}$$

ونقطة الأتزان $(N_1 = 0)$ تكون غير مستقرة. ولدراسة طبيعة الحل بجوار $N_1 = K$ نكتب

$$N_1^* = N_1 - K \tag{41}$$

وتصبح المعادلة

$$\frac{dN_1^*}{dt} = -\frac{a_1 N_1^*}{K}(N_1^* + K) = -a_1 N_1^* \tag{42}$$

والدالة N_1^* تقل أسياً إلى الصفر وان نقطة الأتزان $(N_1 = K)$ تكون مستقرة تقاربياً. إذا كان التعداد الأولى $N_{10} < K$، N_1 تزداد بزيادة t حتى $N_1 = K$ وتبقى بعدها ثابتة. إذا كان $N_{10} > K$، N_1 دالة تناقصية فى t وتؤول إلى نهاية محددة K. والتعداد النهائى يكون K بغض النظر بالحجم الابتدائى للتعداد وتسمى K بالسعة الاستعابيه (carrying capacity) للبيئة.

يمكن حل المعادلة (39) تماما ويكون حلها

$$N_1 = KN_{10} / \left[N_{10} + (K - N_{10}) e^{-a_1 t} \right] \tag{43}$$

والمعادلة (43) تؤكد النتيجة التى حصلنا عليها للنظام الخطى باحلال حد النمو الأسى فى (27) بالمعادلة اللوجستيه نجد أن

$$\frac{dN_1}{dt} = a_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K} \right) - b_1 N_1 N_2 \tag{44}$$

ومن (28)، (44) نحصل على

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= x_1 (1 - \beta x_1 - x_2) \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= \alpha x_2 (x_1 - 1) \end{aligned} \tag{45}$$

حيث $\beta = a_2 / Kb_2$

وللسهولة نستخدم المعادلة (29) هنا. وتكون نقاط الأتزان هى $(0,0)$ ، $(1/\beta,0)$، $(1,1-\beta)$. وعرفنا أن نقطة الأصل هى نقطة سرج غير مستقرة. ولدراسة طبيعة $(1/\beta,0)$ تنقل نقطة الأصل إلى $(1/\beta,0)$ بكتابة

$$\bar{x}_1 = x_1 - 1/\beta \quad , \quad \bar{x}_2 = x_2 \tag{46}$$

وباستخدام (46) فى (45) و (29) ونبقى فقط الحدود الخطية نحصل على

$$\begin{bmatrix} d\bar{x}_1 / d\tau \\ d\bar{x}_1 / d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1/\beta \\ 0 & \alpha(1-\beta)/\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \tag{47}$$

وتكون القيم الذاتية هى

$$\lambda_1 = -1 \quad , \quad \lambda_2 = \alpha(1-\beta)/\beta \tag{48}$$

وعلى ذلك تكون النقطة $(1/\beta,0)$ نقطة سرج غير مستقرة

بالمثل النقطة $(1,1-\beta)$ يمكن ان تكتب

$$x_1^* = x_1 - 1 \quad , \quad x_2^* = x_2 - 1 + \beta \tag{49}$$

ويكون النظام الخطى المناظر بالقرب من $(1,1-\beta)$ هو

$$\begin{bmatrix} dx_1^* / d\tau \\ dx_2^* / d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta & -1 \\ \alpha(1-\beta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} \tag{50}$$

والقيم الذاتية هى

$$\lambda_1 = \left(-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\beta - 4\alpha}\right)/2 \tag{51-a}$$

$$\lambda_2 = \left(-\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\beta - 4\alpha}\right)/2 \tag{51-b}$$

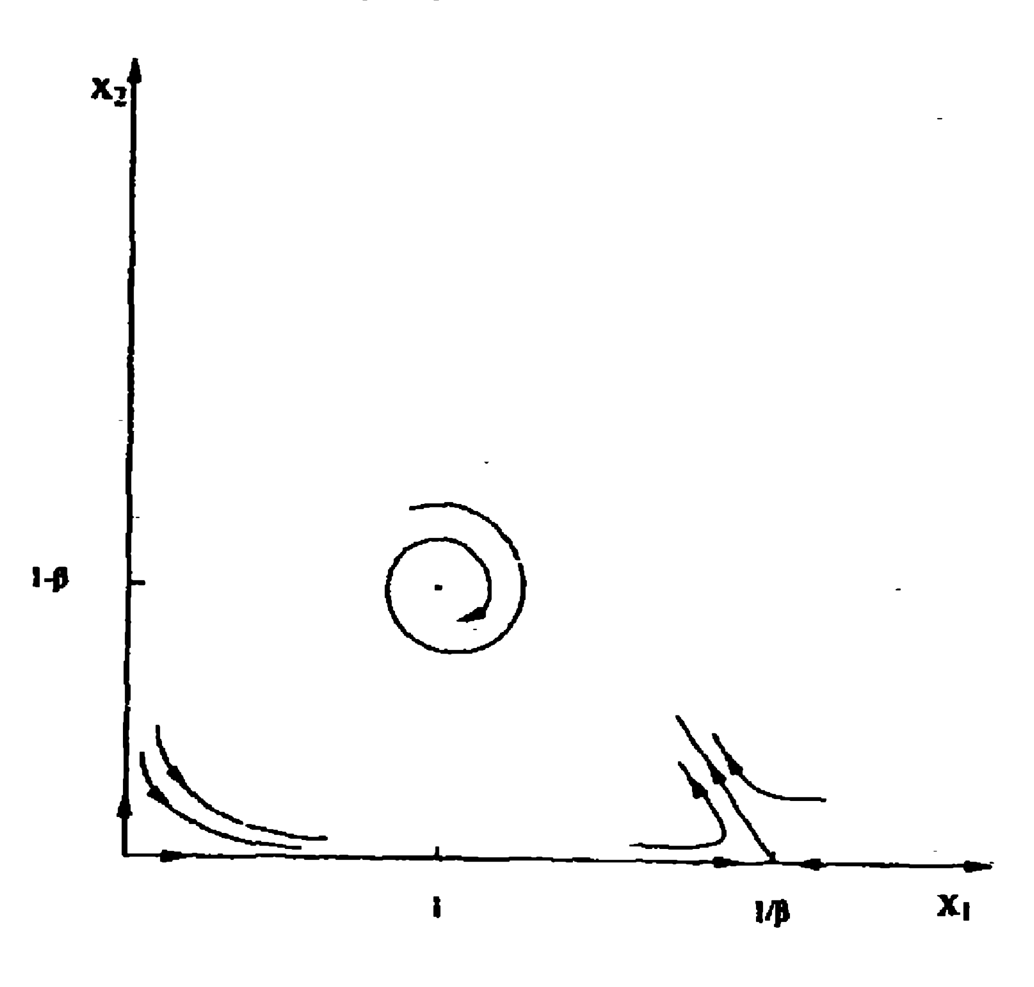
وطبيعة النقطة $(1,1-\beta)$ تعتمد على اشارة $\beta^2 + 4\alpha\beta - 4\alpha$ ويمثل إتزان تعداد المفترس بالعدد $(1-\beta)$ وهذا يؤدى إلى $\beta < 1$. ولدينا الحالات الثلاث التالية :

(أ) إذا كان $\beta^2+4\alpha\beta-4\beta>0$ فإن λ_1، λ_2 يكونان حقيقيين وسالبين وتكون النقطة $(1,1-\beta)$ عقدة مستقرة تقاربياً.

(ب) وإذا كان $\beta^2+4\alpha\beta-4\beta<0$ فإن λ_1، λ_2 عددان مركبان مترافقان مع اجزاء حقيقية سالبة وتكون نقطة الاتزان بؤرة مستقرة تقاربياً.

(جـ) وفى بعض الأحيان يكون $\alpha<<\beta$ وفى هذه الحالة تكون $(1,1-\beta)$ بؤرة مستقرة تقاربياً.

والمسار فى حالة $\alpha<<\beta$ مبين فى الشكل (١٠)



شكل (١٠)

والمسارات التى تبدأ بالقرب من $(0,0)$، $(1/\beta,0)$ تبتعد عن هذه النقاط. والمسارات تبدأ بالقرب من $(1,1-\beta)$ تدور لولبيا حولها وتؤول إليها بالفعل. أى يمكن القول، الحلول مع القيم الابتدائية تساوى تقريبا $(1,1-\beta)$ وتؤول إلى حل الحالة (المستديمه) المنتظمة (steady state) ويعطى بالعلاقة

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=1-\beta \tag{52}$$

ولوصف المسارات التى تبدأ من نقاط الأتزان يجب علينا حل المعادلة

$$\frac{dx_1}{dx_2}=\frac{x_1(1-\beta x_1-x_2)}{\alpha x_2(x_1-1)} \qquad (53)$$

وهذه المعادلة تستنتج من (24, 45). ولا يوجد حل تحليلى بسيط لهذه المعادلة. والمسارات التى تبدأ بعيدا عن نقاط الاتزان يمكن أن تدور حولها حلزونيا إلى $(1,1-\beta)$ او يتحد وينضم (merge) إلى دائرة النهاية إذا وجد حل دورى.

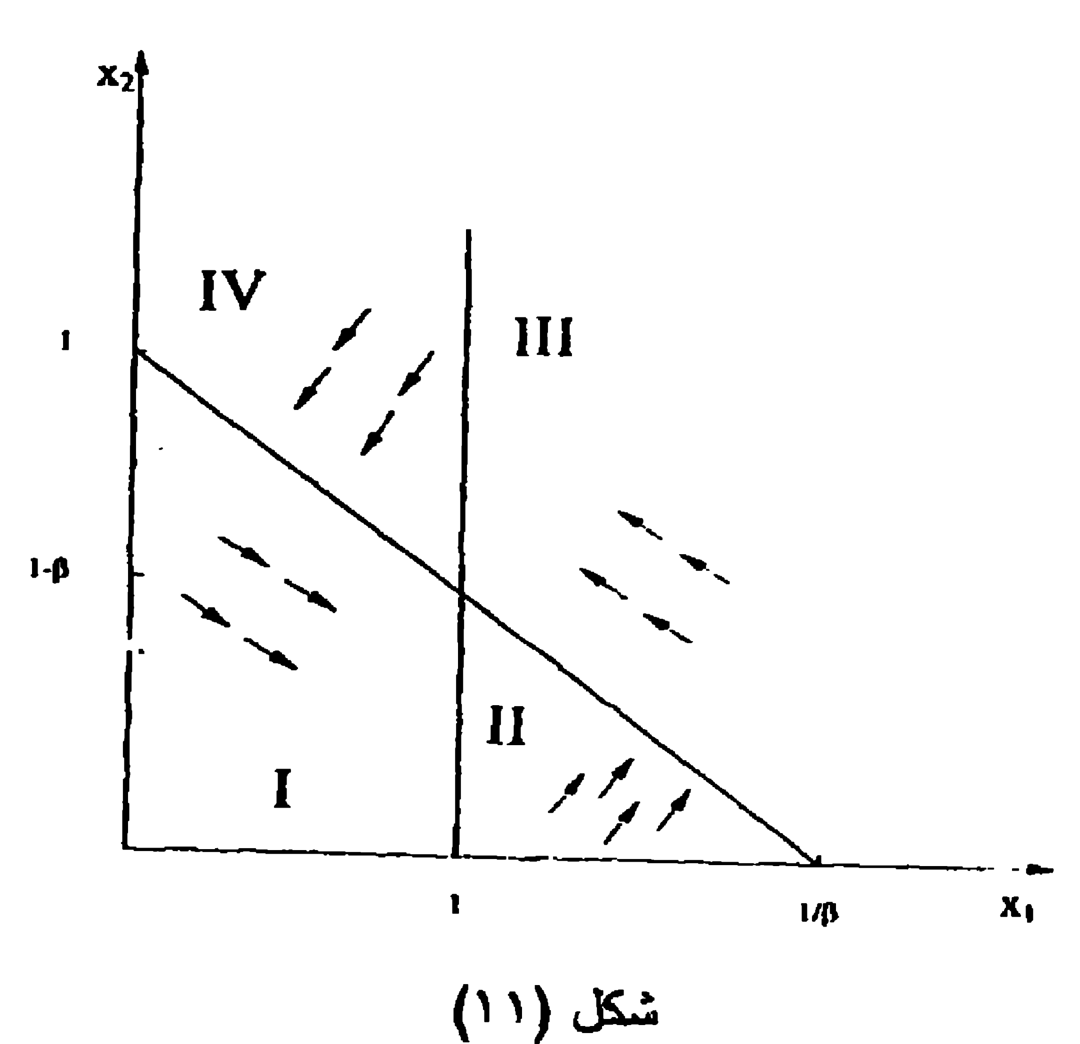
والان ندرس السلوك الكيفى للمعادلة (45) مع ملاحظة أن $\dot{x}_1=0$ عندما

$$x_1=0 \quad , \quad x_2=1-\beta x_1 \qquad (54)$$

وهذه الخطوط هى خطوط إنعدام (nullclines) x_1. حيث أن x_1 ليست سالبة فإنه يلى أن $\dot{x}_1$ موجبة (أو سالبة) إذا كان $1-\beta x_1-x_2$ موجبا (أو سالبة). وخطوط انعدام $-\ x_2$ هى

$$x_2=0 \quad , \quad x_1=1 \qquad (55)$$

نستنتج من (29) أن $\dot{x}_2$ موجبة (أو سالبة) إذا كان $x_1>1$ (أو $x_1<1$). فى الشكل (١١) رسمنا الخطوط (خطوط الانعدام) التى تقسم الربع الاول إلى أربع مناطق.



شكل (١١)

فى المنطقة I $\dot{x}_1 > 0$، $\dot{x}_2 < 0$ فالمسار يتحرك إلى أسفل وإلى اليمين وهذا مبين بالاسهم فى الشكل.

فى المنطقة II $\dot{x}_1 > 0$، $\dot{x}_2 > 0$ والمسارات تتحرك إلى أعلى وإلى اليمين.

وفى المنطقة III $\dot{x}_1 < 0$، $\dot{x}_2 > 0$ والمسارات تتحرك إلى أعلى وإلى اليسار.

وفى المنطقة IV $\dot{x}_1 < 0$، $\dot{x}_2 < 0$ والمسارات تتحرك إلى أسفل وإلى اليسار. والمسارات التى تعبر خط إنعدام x_1 (أو x_2) خط الانعدام له مستقيمات مماسة موازية للمحور x_2 (أو x_1). ويربط الشكلين (١٠)، (١١) نستنتج أن المسارات التى تبدأ من أى نقطة فى الربع الأول تدور حولها لولبياً وتنتهى عند النقطة $(1,1-\beta)$.

مثال (٦): (نموذج تنافس competition model) كون نموذج تنافس وادرس سلوك حلوله الكيفية.

الحل: فى هذه الحالة نعتبر نوعين من الكائنات (population) N_1، N_2 يتنافسان على مصدر محدود من الغذاء وأنهما لايفترسان بعضهما البعض وينمو تعداد (كثافة) كل نوع فى غياب الآخر طبقاً للمعادلة اللوجستية. ويؤدى تأثير التنافس إلى تأخير معدل نمو كل من N_1، N_2. ونعتبر نموذج بسيط على الصورة

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= a_1 N_1\left[1-\left(\frac{N_1}{K_1}\right)-b_1 N_2 / K_1\right]\\ \frac{dN_2}{dt} &= a_2 N_2\left[1-\frac{N_2}{K_2}-b_2\frac{N_1}{K_2}\right]\end{aligned} \qquad (56)$$

حيث a_1، a_2، b_1، K_1، K_2 ثوابت موجبة

نضع

$$\begin{aligned}&x_1 = N_1 / K_1 \;,\; x_2 = N_2 / K_2 \;,\; \tau = a_1 t \;,\; \rho = a_2 / a_1\\ &\beta_1 = b_1 K_2 / K_1 \;,\; \beta_2 = b_2 K_1 / K_2\end{aligned} \qquad (57)$$

ومن (56)، (57) نجد أن

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_1\left(1 - x_1 - \beta x_2\right)$$
$$\frac{dx_2}{d\tau} = \rho x_2\left(1 - x_2 - \beta_2 x_1\right) \tag{58}$$

وتكون نقاط الاتزان (0,0)، (0,1)، (1,0) وحل مجموعة المعادلات الآتيه

$$x_1 + \beta_1 x_2 = 1 \ , \qquad \beta_2 x_1 + x_2 = 1 \tag{59}$$

وهو

$$x_1 = (1-\beta_1)/(1-\beta_1\beta_2) \ , \ x_2 = (1-\beta_2)/(1-\beta_1\beta_2) \tag{60}$$

ويكون الحل محقق فقط إذا كان x_1، x_2 غير سالبين وهذا يؤدى إلى أن β_1، β_2 يجب أن يحققا المتباينات التالية

$\beta_1 \leq 1 \ , \ \beta_2 \leq 1 \ , \ (\beta_1\beta_2 < 1)$ أو $\beta_1 \geq 1 \ , \ \beta_2 \geq 1 \ , \ (\beta_1\beta_2 > 1)$

سوف نعتبر الحالة الأولى مع $\beta_1 = 1.5$، $\beta_2 = 2$. ولقد أعطينا قيما عددية إلى β_1، β_2 لتسهيل الحسابات.

والنظام الخطى المناظر للنظام (58) بالقرب من نقطة الأصل هو

$$\begin{bmatrix} dx_1/d\tau \\ dx_2/d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{61}$$

وتكون القيم الذاتية 1، ρ وتكون نقطة الأصل عقدة غير مستقرة. ولدراسة الاستقرار للنقطة (0,1) نستخدم للتحويل

$$\bar{x}_1 = x_1 \quad , \quad \bar{x}_2 = x_2 - 1 \tag{62}$$

بالتعويض من (62) فى (58) مع $\beta_1 = 1.5$ ، $\beta_2 = 2$ ونحصل على النظام الخطى

$$\begin{bmatrix} d\bar{x}_1/d\tau \\ d\bar{x}_2/d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -2\rho & -\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \tag{63}$$

وتكون القيم الذاتية

$$\lambda_1 = -0.5 \quad , \quad \lambda_2 = -\rho \tag{64}$$

وتكون نقطة الاتزان (0,1) عقده مستقرة تقاربيا. وبالمثل النقطة (1,0) تكون عقدة مستقرة تقاربيا. ولتحليل طبيعة نقطة الاتزان (0.25, 0.5) نستخدم التعويض

$$x_1^* = x_1 - 0.25 \quad , \quad x_2^* = x_2 - 0.5 \tag{65}$$

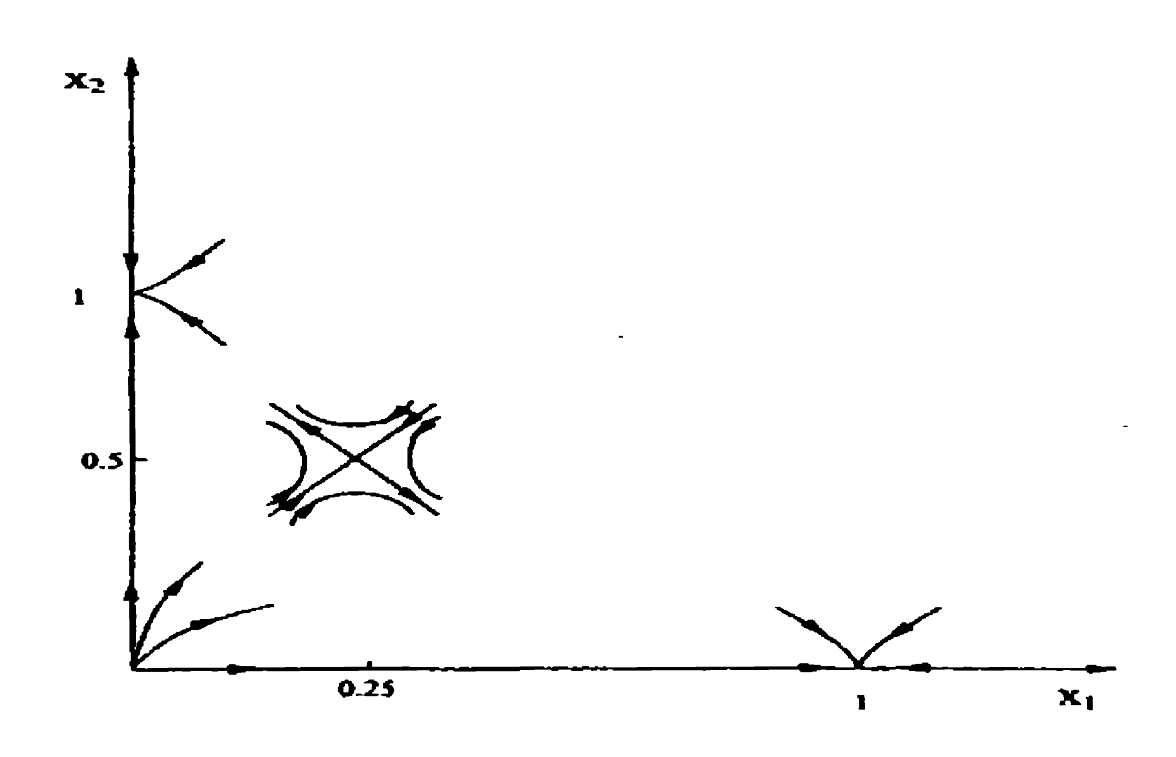
وتكون النظام الخطى المناظر

$$\begin{bmatrix} dx_1^*/d\tau \\ dx_2^*/d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 & -0.375 \\ -\rho & -0.5\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} \tag{66}$$

وتكون القيم الذاتية هى

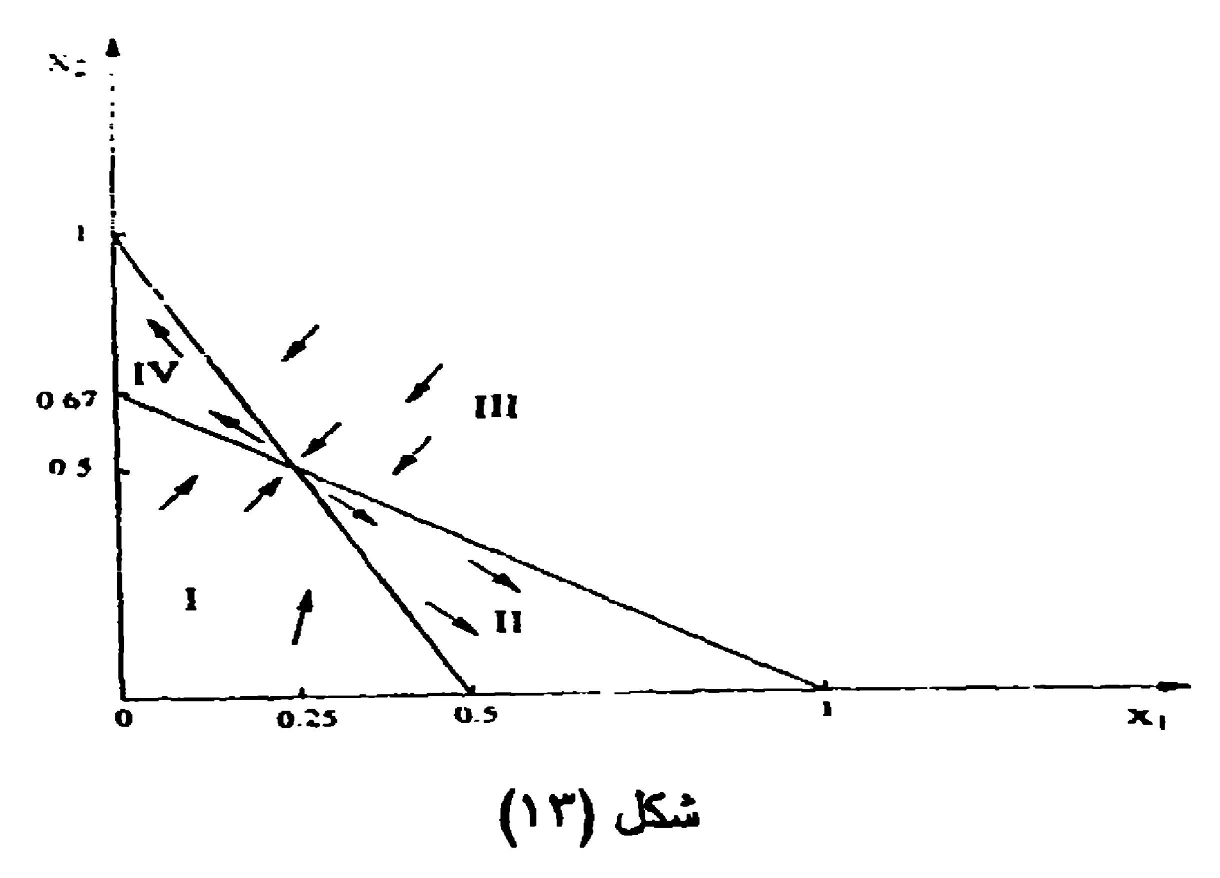
$$\lambda_{1,2} = [-(0.5\rho + 0.25) \pm \sqrt{(0.5\rho + 0.25)^2 + \rho}]/2 \tag{67}$$

واشارتا القيمتان الذاتيتان مختلفتان وبذلك تكون نقطة الاتزان نقطة سرج غير مستقرة. وفقط اثنان من المسارات ينتهى عند هذه النقطة واثنان فقط يبتعدان عن هذه النقطة كما هو مبين بالشكل ١٢.



شكل (١٢)

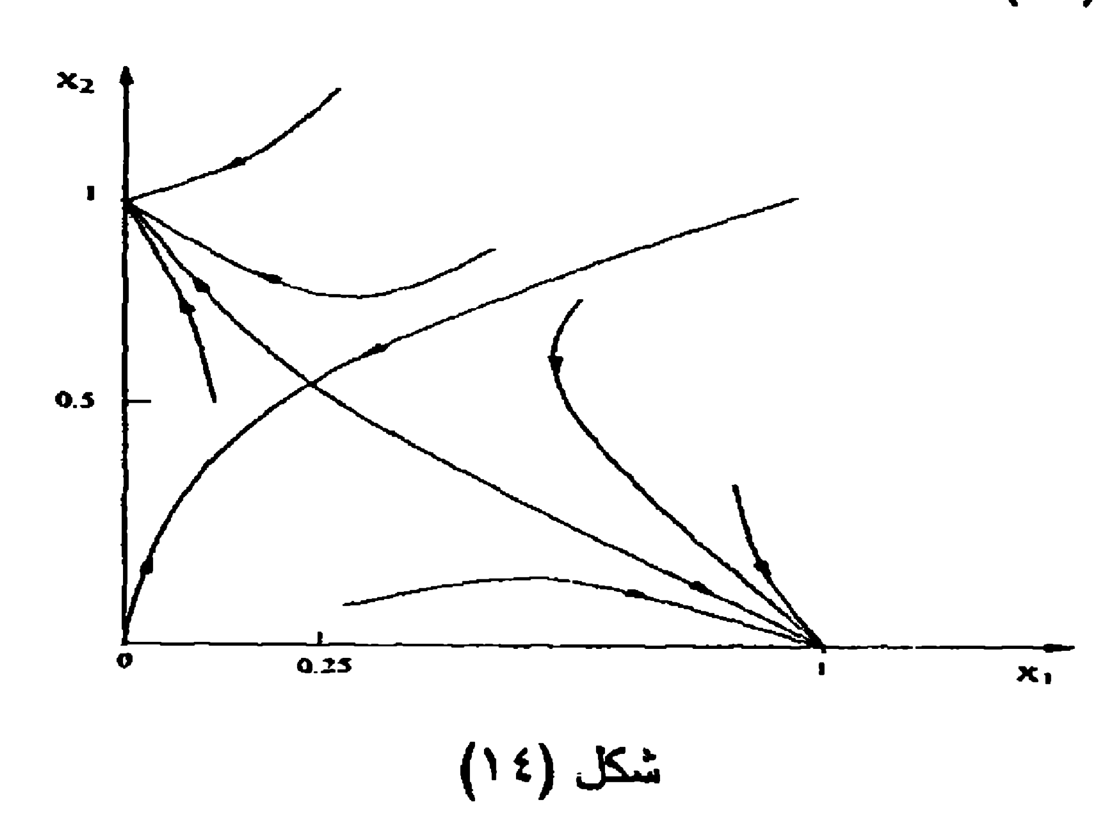
وخطوط إنعدام x_1، x_2 التى تصل النقاط الحرجة (المعادلة 59) مبينة فى شكل (١٣) وهى تقسم الربع الموجب إلى اربع مناطق من I إلى IV.



شكل (١٣)

فى المنطقة I، $\dot{x}_1$، $\dot{x}_2$ موجبان. فى المنطقة II:، $\dot{x}_1 > 0$، $\dot{x}_2 < 0$. فى المنطقة III: $\dot{x}_1 < 0$، $\dot{x}_2 < 0$. فى المنطقة IV: $\dot{x}_1 < 0$، $\dot{x}_2 > 0$. واتجاه المسارات مبين بالاسهم .

ومن الشكلين (١٢)، (١٣) نستنتج أن المسارين اللذين ينتهيان عند نقطة السرج (0.25, 0.5) يكونان الفواصل separatrices التى تقسم المسارات التى تنتهى عند (1, 0) من التى تنتهى عند (0, 1). والشكل المركب (composite) منهما هو الشكل (١٤).



شكل (١٤)

لقيم β_1، β_2 التى اخترناهما يوجد فقط مجموعة واحدة من القيم الابتدائية التى تؤدى إلى وجود النوعين وجميع القيم الابتدائية الأخرى تؤدى إلى إنقراض أحدهما.

ندرس الأن الشروط لتعايش النوعين. ونقطة الأتزان التى تسمح لوجودهما معا هى التى تعطى بالمعادلة (60) ونرمز لهما x_{1e}، x_{2e} ولتحليل طبيعة نقطة الأتزان هذه ننقل نقطة الأصل لهذه النقطة بوضع

$$x_1^* = x_1 - x_{1e} \quad , \quad x_2^* = x_2 - x_{2e} \tag{68}$$

ويكون النظام الخطى المناظر بالقرب من (x_{1e}, x_{2e}) هو

$$\begin{bmatrix} dx_1^*/d\tau \\ dx_2^*/d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_{1e} & -\beta_1 x_{1e} \\ -\rho\beta_2 x_{2e} & -\rho x_{2e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} \tag{69}$$

وتكون القيم الذاتية هى

$$\lambda_{1,2} = [-(x_{1e} + \rho x_{2e}) \pm \sqrt{(x_{1e} + \rho x_{2e})^2 - 4\rho x_{1e} x_{2e}(1 - \beta_1\beta_2)}]/2 \tag{70}$$

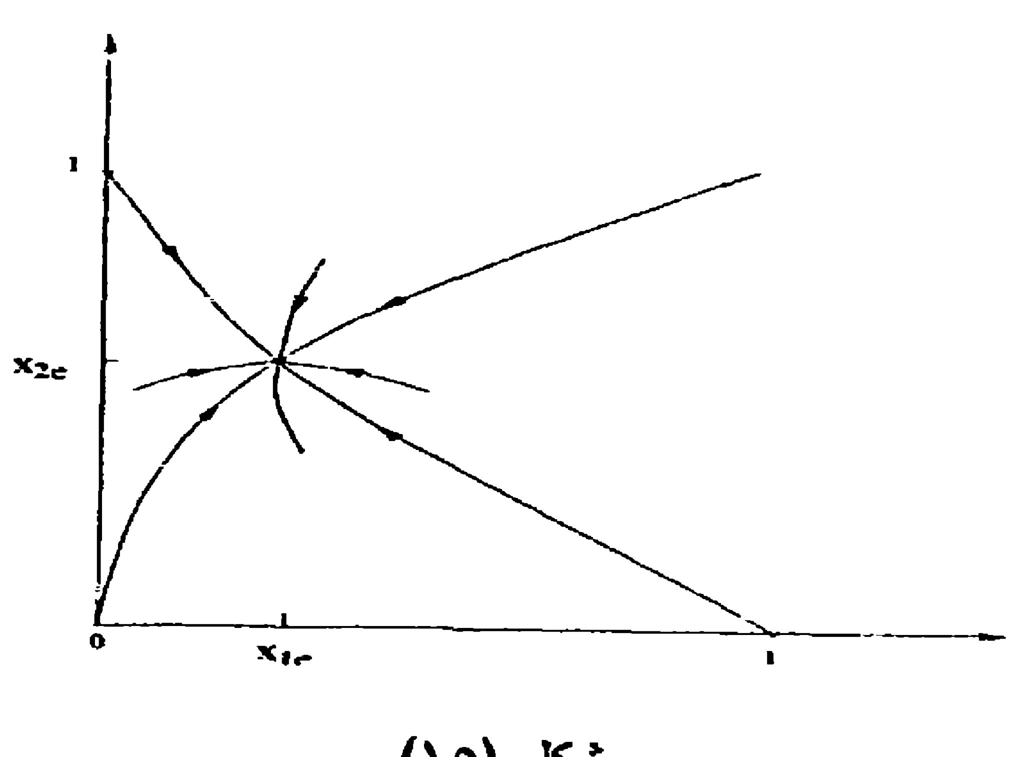
لقد رأينا سابقاً بالنسبة إلى (x_{1e}, x_{2e}) لتكون فى الربع الموجب، يتطلب إما $\beta_1 > 1$، $\beta_2 > 1$ أو $\beta_1 < 1$، $\beta_2 < 1$. ومن المعادلة (70) نستنتج أن إذا كان $\beta_1 > 1$، $\beta_2 > 1$ فإن λ_1, λ_2 يكون لهما اشارتين مختلفتين وأن (x_{1e}, x_{2e}) تكون نقطة سرج غير مساقرة.

وإذا كان $\beta_2 < 1$، $\beta_1 < 1$ فإن λ_1، λ_2 يكونا سالبين وأن $(x_{1e}.x_{2e})$ تكون عقدة مستقرة. والأن نفحص استقرار نقط الأتزان الأخرى عندما تكون $\beta_1 < 1$، $\beta_2 < 1$. وتكون النظام الخطى المناظر بالقرب من نقطة الأصل (معادلة (61)) وهو لايعتمد على β_1 ، β_2 وبذلك تكون نقطة الأصل عقدة غير مستقرة. والنظام الخطى المناظر فى حوار (0,1) نحصل عليه بجعل مركبات المعادلة (58)، (62) خطية وهذا يعطى

$$\begin{bmatrix} d\bar{x}_1/d\tau \\ d\bar{x}_2/d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\beta_1) & 0 \\ -\rho\beta_2 & -\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \tag{71}$$

وتكون القيم الذاتية هى $-\rho$ ، $(1-\beta_1)$، عندما تكون $\beta_1 < 1$ تكون كل من القيمتين الذاتيتين لهما اشارتين مختلفتين وبالتالى تكون $(0,1)$ نقطة سرج غير مستقرة. وبالمثل عندما $\beta_2 < 1$ تكون نقطة الأتزان $(1,0)$ نقطة سرج غير مستقرة وتكون المسارات فى الربع الموجب كما فى شكل (١٥) عندما $\beta_1 < 1$ ، $\beta_2 < 1$.

ويكون شرط تعايش النوعين معا (coexistence) هو $\beta_1 < 1$ ،$\beta_2 < 1$. ويكون التواجد معا ممكنا إذا كان التنافس ليس كبيرا.



شكل (١٥)

إذا كان $\beta_1 > 1$ ،$\beta_2 > 1$ فإنه، عموما، تؤدى إلى إنقراض (extinction) أحدهما كما فى حالة $\beta_1 = 1.5$ ،$\beta_2 = 2$. وهذا يفسر الملاحظة المرتبطة بالكائنات لها متطلبات متشابهه أن لا يشغلوا نفس الحيز. ويسمى علماء الاجتماع هذا بمبدأ التنافس الانقراضى

competitive exclusion principle أو بمبدأ جاوس Gauss

مثال (١٧): التبادل (mutualism او symbiosis)

ناقش السلوك الكيفى لحلول النظام

$$\frac{dN_1}{dt}=a_1N_1\left(1-\frac{N_1}{K_1}+b_1\frac{N_2}{K_1}\right)$$
$$\frac{dN_2}{dt}=a_2N_2\left(1-\frac{N_2}{K_2}+b_2\frac{N_1}{K_2}\right) \qquad (72)$$

حيث a_1 ، a_2 ، b_1 ، b_2 ، K_1 ، K_2 ثوابت موجبة.

الحل: تصف المعادلات (72) نموذج تفاعل (interaction) نوعين لهما فائدة مشتركة واشارتى b_1 ، b_2 عكس الاشارة فى المعادلات (56). ويحدث هذا النموذج عادة فى الحياة.

باستخدام التعويض (57) فى (72) تصبح

$$\frac{dx_1}{d\tau}=x_1(1-x_1+\beta_1x_2)$$
$$\frac{dx_2}{d\tau}=x_2(1-x_2+\beta_2x_1) \qquad (73)$$

وتكون نقاط الاتزان الاربعة هى

$$(0,0),(0,1),(1,0),x_{1e}=(1+\beta_1)/(1-\beta_1\beta_2),x_{2e}=(1+\beta_2)/(1-\beta_1\beta_2)$$

نقطة الأتزان (x_{1e},x_{2e}) يعتمد عليها فقط إذا كان $1-\beta_1\beta_2>0$. ونقطة الأصل كما فى المثال السابق عقدة غير مستقرة. لفحص طبيعة النقطة $(0,1)$ ننقل نقطة الأصل إلى $(0,1)$ بكتابة

$$\bar{x}_1=x_1 \quad , \quad \bar{x}_2=x_2-1 \qquad (74)$$

ويكون النظام الخطى المناظر للنظام (73) هو

$$\begin{bmatrix} d\bar{x}_1/d\tau \\ d\bar{x}_2/d\tau \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+\beta_1 & 0 \\ \rho\beta_2 & -\rho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \qquad (75)$$

وتكون القيم الذاتية هى $(1+\beta_1),(-\rho)$ وبذلك تكون نقطة الأتزان نقطة سرج غير مستقرة. وبالمثل النقطة $(1,0)$ تكون نقطة سرج غير مستقرة.

والنظام الخطى المناظر للنظام (73) بجوار النقطة (x_{1e},x_{2e}) هو

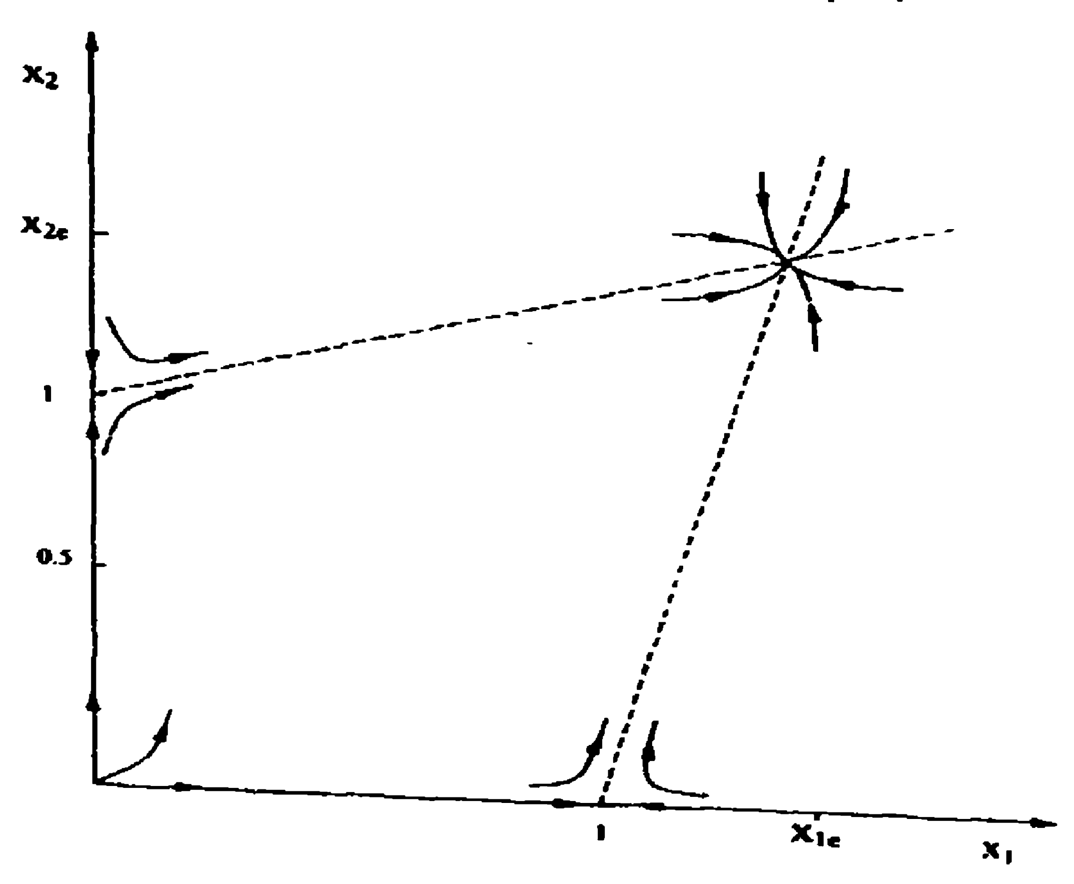
$$\begin{bmatrix} dx_1^*/d\tau \\ dx_2^*/d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_{1e} & -\beta_1 x_{1e} \\ -\rho\beta_2 x_{2e} & -\rho x_{2e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} \qquad (76)$$

حيث $x_1^* = x_1 - x_{1e} \quad , \quad x_2^* = x_2 - x_{2e}$

وتكون القيم الذاتية هى

$$\lambda_{1,2} = [-(x_{1e} + \rho x_{2e}) \pm \sqrt{(x_{1e} + \rho x_{2e})^2 - 4\rho x_{1e} x_{2e}(1 - \rho\beta_1\beta_2)}]/2 \qquad (77)$$

هاتان القيمتان حقيقيتان سالبتان وبذلك تكون نقطة السكون (x_{1e}, x_{2e}) عقدة مستقرة كما فى شكل (١٦)



شكل (١٦)

إذا كان $1 - \beta_1\beta_2 > 0$، فإن x_{2e}, x_{1e} يكون لكبر من الواحد وبالتالى فإن الحل يؤول (x_{1e}, x_{2e}) عندما $t \to \infty$. وهذا يعنى أنه بتعاون النوعين يمكن ان يؤدى بتحمل البيئة تعداد (كثافة) اكبر من سعة الاستيعاب (الحمل).

إذا كان $1 - \beta_1\beta_2 < 0$ فإن x_{2e}, x_{1e} يكونا سالبين ولايعتمد عليهما. وعلى ذلك لاتوجد نقطة اتزان (x_{1e}, x_{2e}). والنقاط الأخرى الثلاثة الباقية جميعها غير مستقرة. وفى هذه الحالة فإن x_1، x_2 تنمو إلى ما لانهاية.

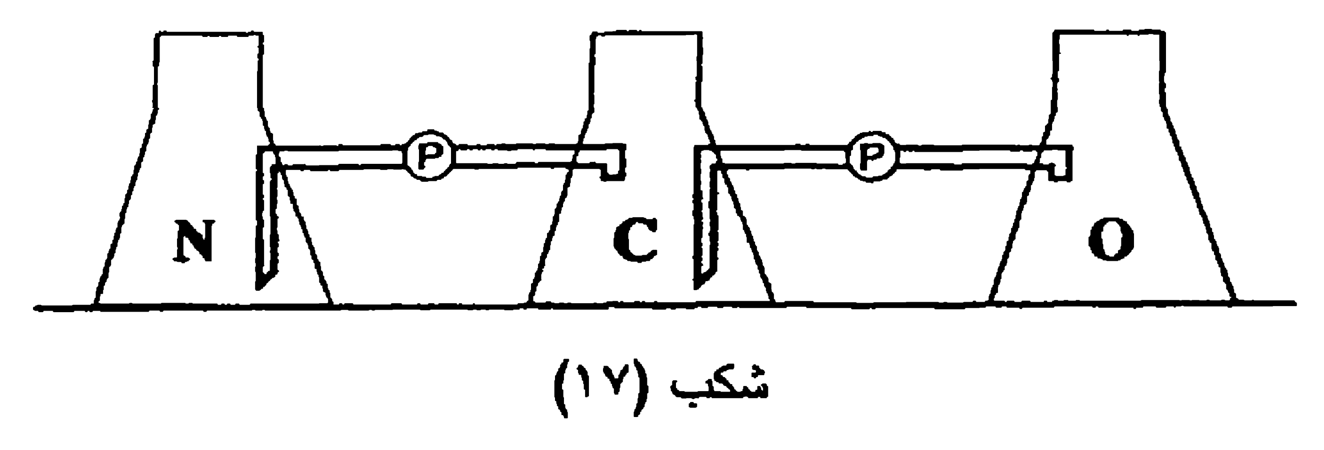
ملحوظة: جميع النماذج السابقة وصفت بمعادلة الحركة (Kinetic) والتى يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{dN_i}{dt} = N_i F_i (N_1, N_2, ...) \quad . \quad i = 1,2 \qquad (78)$$

ولاحظ أننا افترضنا أن نقطة الأصل هى نقطة اتزان إذا كان $N_i = 0$ ابتدائياً و $\dot{N}_i = 0$ وهذا يعنى أن $N_i = 0$ فى جميع الازمان التالية. ومهما كان، ليس من الضرورى أن تكون نقطة الأصل نقطة مستقرة تقاربياً وأى اضطراب (حيود) بالقرب منها يمكن أن يؤدى إلى زيادة قيمة N_i. وهنا اعتبرنا نوعين وكنا قادرين على وصف N_i فى مستوى الطور. ويمكن تعميم ذلك إلى n من الانواع ويمكن رسم المسارات فى فضاء له n من الابعاد.

١٤-٥ الكيموستات البسيط (Simple Chemostat):

يتكون الكيموستات من ثلاثة أوعية متصلة كما فى شكل (١٧).



شكب (١٧)

يسمى الوعاء الأول (N) بوعاء التغذية (feed bottle) ويحتوى على كل المادة المغذية الضرورية لنمو الكائنات الدقيقة والوعاء الثانى (C) الذى يسمى بوعاء الاستتنبات (culture vessel) وفيه تتم التفاعلات بين الكائنات الدقيقة والوعاء الثالث (O) يسمى بوعاء التجميع (Collection vessel) وتجمع فيه كل نواتج وعاء الاستنبات وبذلك يحتوى على مادة مغذية وكائنات دقيقة ونواتجها. تضخ محتويات وعاء التغذية بمعدل ثابت إلى وعاء الاستنبات وتضخ محتويات وعاء الاستبات بنفس المعدل الثابت إلى وعاء التجميع. وعلى ذلك تكون سعة وعاء الاستبات ثابتة ووعاء الاستنبات يكون مشبع بكائنات دقيقة متعددة فهو يحتوى على خليط من المادة المغذية والكائنات. ويحرك وعاء الاستبات جيدا كما تحفظ كل البارامترات الأخرى كدرجة الحرارة والضغط المؤثرة فى النمو (التكاثر) ثابتة ويمكن التحكم فيها.

ليكن لدينا النظام

$$\frac{dN}{dt}=\alpha_1\frac{C}{1+C}N-N$$

$$\frac{dC}{dt}=-\frac{C}{1+C}N-C+\alpha_2$$

حيث α_1 ، α_2 ثابتان ويمكن كتابة النظام المعطى على الصورة

$$\frac{d\underline{X}}{dt}=\underline{F}(x)=\begin{pmatrix}f(N,C)\\ g(N,C)\end{pmatrix} \qquad (1)$$

حيث

$$f(N,C)=\alpha_1\frac{C}{1+C}N-N \quad , \quad g(N,C)=-\frac{C}{1+C}N-C+\alpha_2$$

وتكون حالة الإتزان $\bar{X}=(\bar{N},\bar{C})$ حلا للمعادلتين

$$\alpha_1\frac{C}{1+C}N-N=0 \quad , \quad \frac{-C}{1+C}N-C+\alpha_2=0 \qquad (2)$$

ومن المعادلة الأولى فى (2) نجد أن

$$\left(\alpha_1\frac{C}{1+C}-1\right)N=0$$

فيكون لدينا نقطة الأتزان $\bar{X}=(\bar{N},\bar{C})$ عندما

$$\bar{N}=0 \quad , \quad \alpha_1\frac{\bar{C}}{1+\bar{C}}=1$$

وسندرس كل حالة على حده.

(i) $\bar{N}=0$ يكون لدينا من المعادلة الثانية فى (2) $\bar{C}=\alpha_2$ وعلى ذلك يكون $\bar{X}=(0,\alpha_2)$ هى نقطة الأتزان (لاتوجد بكتريا حية والغذاء)

(ii) عندما $\bar{C}=\frac{1}{\alpha_1-1}$ فيكون لدينا من المعادلة الثانية فى (2)

$$\bar{N}=\alpha_1\left(\alpha_2-\frac{1}{\alpha_1-1}\right)$$

ومن هذا نجد أن نقطتى الأتزان هما

$$\bar{X}_1=(0,\alpha_2),\bar{X}_2=\left(\alpha_1\left(\alpha_2-\frac{1}{\alpha_1-1}\right),\frac{1}{\alpha_1-1}\right)$$

ونلاحظ أنه لكى يكون نقطة الأتزان $\bar{X}$ معنى فيزيائى يجب أن $\bar{N}>0$، $\bar{C}>0$ (لأن $\bar{C}<0$، $\bar{N}<0$ لاتمثل حلولا فيزيائية). فالحالة الأولى $\bar{X}_1=(0,\alpha_2)$ معرفة تماماً بهذا المعنى ولكن الثانية ليست كذلك. وتكون الحالة الثانية $\bar{X}_2$ معرفة تماماً إذا كان

$$\alpha_1>1 \quad , \quad \alpha_2>\frac{1}{\alpha_1-1} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1>1 \quad , \quad \alpha_2(\alpha_1-1)>1$$

وإذا حسبنا الجاكوبى للنظام (1) يكون لدينا

$$F'(X)=J(X)=\begin{pmatrix} \alpha_1\dfrac{C}{1+C}-1 & \dfrac{\alpha_1 N}{(1+C)^2} \\ \dfrac{-C}{1+C} & \dfrac{-N}{(1+C)^2}-1 \end{pmatrix}$$

$$J(\bar{X}_1)=\begin{pmatrix} \alpha_1\dfrac{C}{1+C}-1 & \dfrac{\alpha_1 N}{(1+C)^2} \\ \dfrac{-C}{1+C} & \dfrac{-N}{(1+C)^2}-1 \end{pmatrix}_{N=0,C=\alpha_2}=\begin{pmatrix} \alpha_1\dfrac{\alpha_2}{1+\alpha_2}-1 & 0 \\ \dfrac{-\alpha_2}{1+\alpha_2} & -1 \end{pmatrix}$$

ويكون محدد الجاكوبى هو

$$1-\alpha_1\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2}=\frac{1+\alpha_2-\alpha_1\alpha_2}{1+\alpha_2}=\frac{1+\alpha_2(1-\alpha_1)}{1+\alpha_2}<0$$

وبذلك تكون نقطة الأتزان $\bar{X}_1$ غير مستقرة.

ملحوظة: شرط الاستقرار يكافئ $\det J>0\ ,\ tr\ J<0$.

ويكون الجاكوبى عند $\bar{X}_2$ هو

$$J(\bar{X}_2)=\begin{pmatrix} 0 & \beta(\alpha_1-1) \\ -\dfrac{1}{\alpha_2} & -\dfrac{\beta(\alpha_1-1)+\alpha_1}{\alpha_1} \end{pmatrix}$$

حيث $\beta=\alpha_2(\alpha_1-1)>1$ ونعرف أن $\Delta=\dfrac{\beta(\alpha_1-1)}{\alpha_1}>0$ حيث $trA=-1-\Delta$

والمحدد موجب لأن

$$\alpha_1-1>0 \ , \ \beta>0 \ \Rightarrow \ \frac{\beta(\alpha_1-1)}{\alpha_1}>0$$

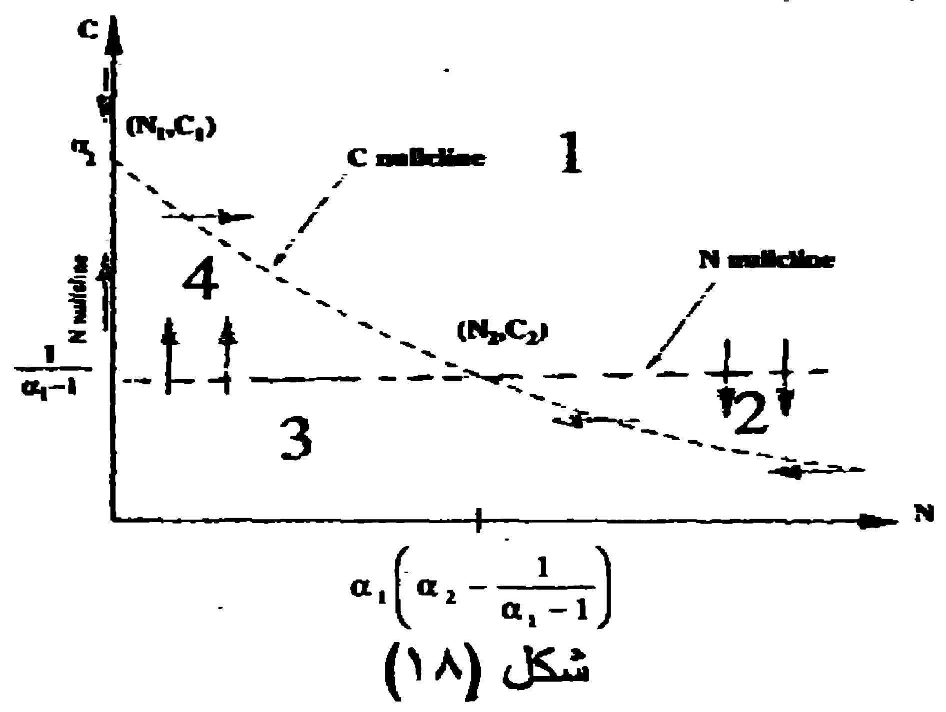
وبذلك تكون $\bar{X}_2$ نقطة مستقرة (انظر الملحوظة السابقة).

نلاحظ فى هذا المثال لم نستخدم اشارة القيم الذاتية ولكن استخدمنا شرط الاستقرار وهو $\det J > 0$, $tr\ J < 0$.

ولدراسة خط الانعدام N فى هذه المجموعة حيث $\frac{dN}{dt}=0$ أى $N\left(\alpha_1 \frac{C}{1+C}-1\right)=0$ وبالتالى يكون خط انعدام N هما المستقيمين $N=0$ ، $C=\frac{1}{\alpha_1-1}$ (إتجاه الأسهم يكون رأسياً لأن $\frac{dN}{dt}=0$) ويكون خط إنعدام C الذى نحصل عليه بحل $C=C(N), N=N(C)$ ويكون هو المنحنى

$$N=(\alpha_2-C)\frac{1+C}{C}=-1-C+\frac{\alpha_2}{C}+\alpha_2$$

ويكون إتجاه الأسهم موازياً للمحور N لأن $\frac{dC}{dt}=0$ وبالتالى يكون لدينا الشكل المبين (شكل ١٨)



شكل (١٨)

نفترض أن $\alpha_1>1$ ، $\alpha_2=\frac{1}{\alpha_1-1}$ وبذلك تكون نقطة الأتزان الموجبة موجودة ويكون لدينا تقاطعين $(0,\alpha_2)$ وهى نقطة سرج ، $\left(\alpha_1\left(\alpha_2-\frac{1}{\alpha_1-1}\right),\frac{1}{\alpha_1-1}\right)$ وهى عقدة. ولمعرفة إتجاه الأسهم على خط إنعدام N، نفحص $\frac{dC}{dt}$:

(i) على الخط $N=0$ يكون

$$\frac{dC}{dt}=-\frac{C}{1+C}N-C+\alpha_2=-C+\alpha_2 \quad \begin{cases} >0 & \text{إذا كان } C<\alpha_2 \\ <0 & \text{إذا كان } C>\alpha_2 \end{cases}$$

وبذلك تشير الأسهم لأعلى إذا كان $C<\alpha_2$ وإلى أسفل إذا كان $C>\alpha_2$.

(ii) على الخط $C=\frac{1}{\alpha_1-1}$ يكون

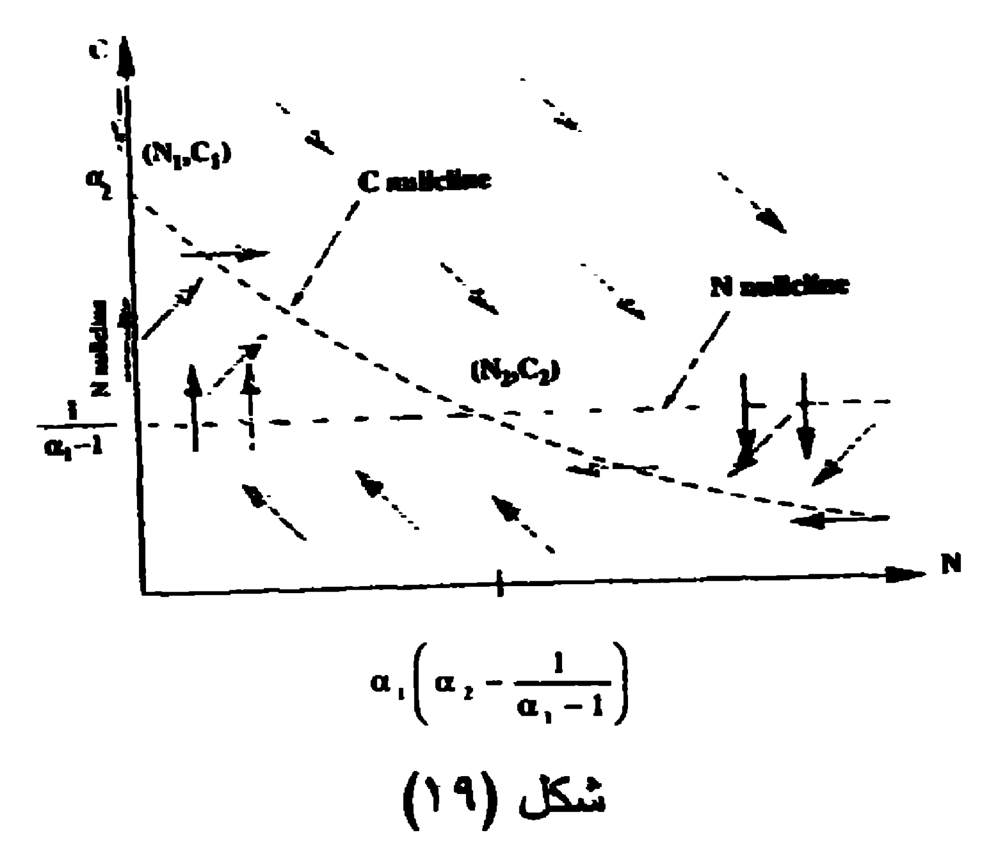
$$\frac{dC}{dt}=-\frac{C}{1+C}N-C+\alpha_2=\frac{-N\alpha_1+N-\alpha_1-\alpha_2\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1(\alpha_1-1)}$$

$$\begin{cases} >0 \quad ، & \text{إذا كان } N<\alpha_1\left(\alpha_2-\frac{1}{\alpha_1-1}\right) \\ <0 \quad ، & \text{إذا كان } N>\alpha_1\left(\alpha_2-\frac{1}{\alpha_1-1}\right) \end{cases}$$

وتشير ألسهم لأعلى إذا كان $N<\alpha_1\left(\alpha_2-\frac{1}{\alpha_1-1}\right)$ وتشير الأسهم إلى أسفل إذا كان $N>\alpha_1\left(\alpha_2-\frac{1}{\alpha_1-1}\right)$ ولتحديد ما إذا كانت الأسهم تشير إلى اليمين أو اليسار (اشارة $\frac{dN}{dt}$) على خط إنعدلم C. نلاحظ أن

$$\frac{dN}{dt}=N\left(\alpha_1\frac{C}{1+C}-1\right) \quad \begin{cases} >0 \; , & \text{إذا كان } C>\frac{1}{\alpha_1-1} \\ <0 \; , & \text{إذا كان } C<\frac{1}{\alpha_1-1} \end{cases}$$

(وحيث أن $N\geq 0$ فإن اشارة التعبير هي اشارة $\left(\alpha_1\frac{C}{1+C}-1\right)$ ويكون لدينا الشكل التالى (شكل ١٩)



$$\alpha_1\left(\alpha_2-\frac{1}{\alpha_1-1}\right)$$

شكل (١٩)

ويمكن تعميم الكيموستات البسيط إلى أكثر من وعاء تتم فيها التفاعلات الكيميائية وهو شائع فى علم العقاقير الطبية (pharmacology) وكثير الاستخدام فى مثل دراسة سلوك الأنسجه (tissues) المختلفة. ليكن V ترمز لسعة حجم وعاء الاستنبات (وحدات V هى ℓ^3 حيث ℓ الطول) F معدل التدفق من وعاء إلى آخر والذى يحدد بسرعة الضخ (وحدات F هى $\frac{\ell^3}{t}$ حيث t الزمن) ، $u_i, i=1,2,$ ، تركز المادة المغذية فى وعاء التغذية (وحدات التركيز $\frac{m}{\ell^3}$ حيث m هى الكتلة)

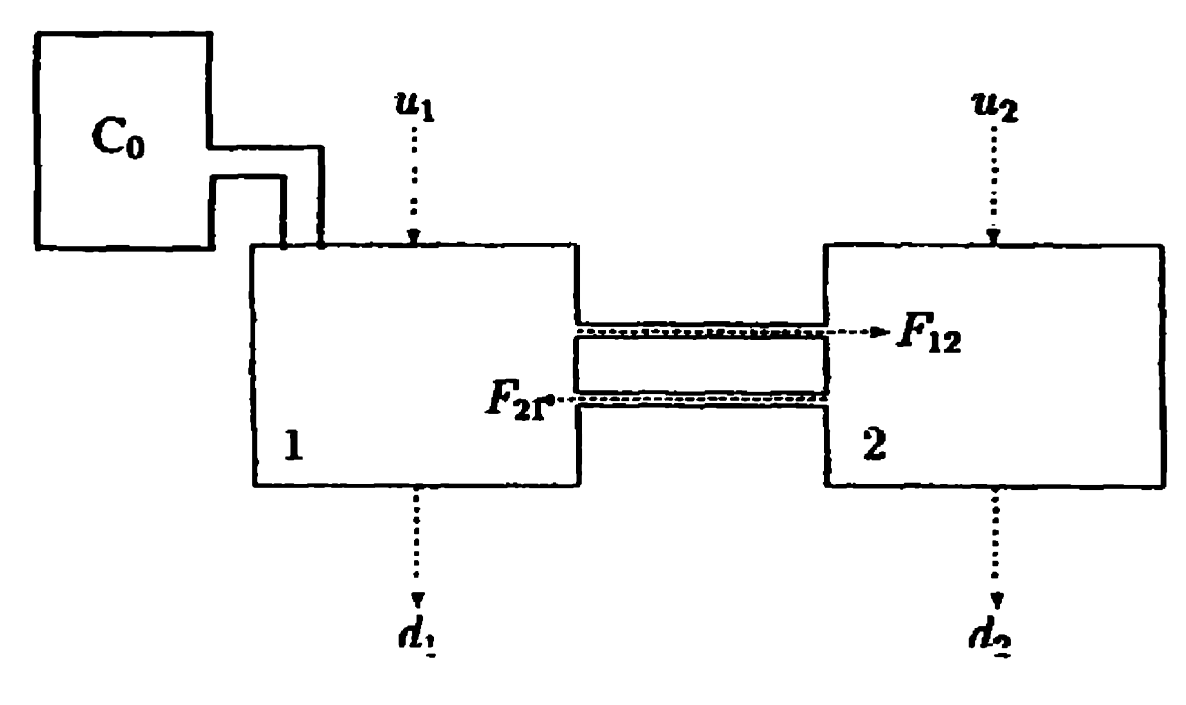
ويكون معدل التغير فى المادة المغذية u هو

معدل التغير = الادخال - الانحراف (wash out) - الاستهلاك

ومعدل التغير فى الميكروبات هو

معدل التغير = التكاثر (النمو) - الانحراف (معدل التخفيف (dilution or wash out)

ويكون لدينا الشكل (٢٠)



شكل (٢٠)

سوف نستخدم متغيرين x_1، x_2 للتركيز الغذائى (metabolism) أو مواد كيميائية آخرى فى كل وعاء، m_1، m_2 تمثل الكتلة فى كل سريان (أو إنسياب inflow)، Vol/sec إلى الداخل وعندما تكون المادة u_i فى الوعاء i يستهلك جزء من مادتها $d_i \Delta t$ وفى فترة صغيرة Δt يكون ازدياد أو نقصان المادة فى الوعاء i هو

$$m_1(t+\Delta t)-m_i\Delta(t)=-F_{12}x_1\Delta t+F_{21}x_2\Delta t-d_1m_1\Delta t+u_1\Delta t,$$

[مع العلم بأن كتلة السريان من الوعاء الأول إلى الوعاء الثانى تحسب كما يلى

$$(\text{flow x concentration in 1 time} = \frac{\text{Vol}}{\text{time}}\times\frac{\text{mass}}{\text{Vol}}\times\text{time})]$$

وبالمثل الكتلة m_2. حيث السريان (Vol/sec) من الوعاء i إلى الوعاء j هو F_{ij} وبالقسمة على Δt وأخذ النهاية عندما $\Delta t \to 0$ نحصل على النظام

$$\frac{dm_1}{dt}=-F_{12}\frac{m_1}{V_1}+(F_{21}m_2/V_2)-d_1m_1+u_1$$

$$\frac{dm_2}{dt}=F_{12}\frac{m_1}{V_1}-(F_{21}m_2/V_2)-d_2m_2+u_2$$

وبوضع $x_i = \frac{m_2}{v_i}$ ، $i = 1,2$ يكون لدينا النظام

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{F_{12}}{V_1}x_1 + \frac{F_{21}}{V_1}x_2 - d_1x_1 + \frac{u_1}{V_1}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{F_{12}}{V_1}x_1 - \frac{F_{21}}{V_2}x_2 - d_2x_2 + \frac{u_2}{V_2}$$

حيث $\frac{x_i}{v_i}$ يمثل تركيز كل مادة.

ودراسة هذا النظام متروك للقارئ لأنه سبق دراسة عدة نظم مشابهه.

والأن نتعرض لدراسة التنافس فى الكيموستات:

ليكن x_1 ، x_2 كائنين دقيقين يتنافسان على مادة غذائية (substrate) C محدودة والتى تساعدهما على النمو والتكاثر. (i) **المعادلات الاساسية لنقاط الاتزان:**

تكون المعادلات الأساسية التى صاغها (Monod) بعد استخدام بعض التحويلات هى:

$$\frac{dx_1}{dt} = -Dx_1 + \frac{\alpha_1 C x_1}{K_1 + C}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -Dx_2 + \frac{\alpha_2 C x_2}{K_2 + C} \qquad (1)$$

$$\frac{dc}{dt} = D(1 - C) - \frac{\alpha_1 C}{K_2 + C}x_1 - \frac{\alpha_2 C}{K_2 + C}$$

حيث C_0 ، D ، α ، K_1 ، K_2 .

بجمع (1) نحصل على ثوابت موجبة.

$$\frac{d}{dt}(x_1 + x_2 + C) = -D(x_1 + x_2 + C) + D$$

وبالتكامل نحصل على

$$x_1 + x_2 + C = 1 + (x_{10} + x_{20} + C - 1)\exp(-Dt) \qquad (3)$$

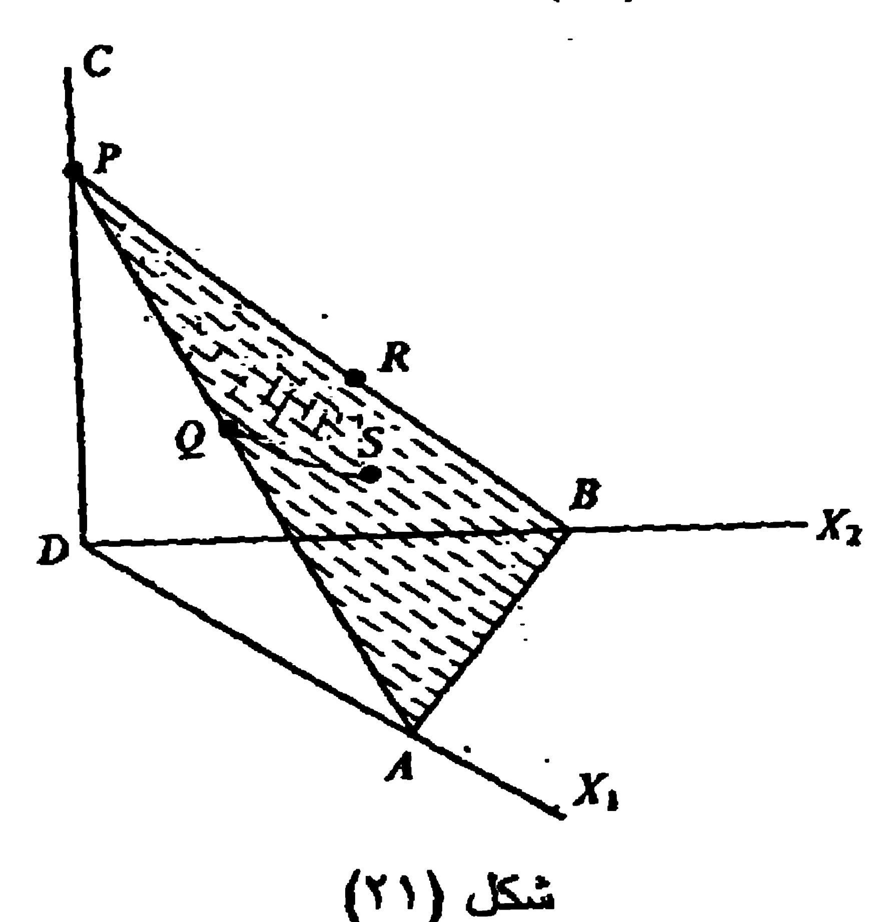
وبالتالى إذا كانت $\bar{C}, \bar{x}_2, \bar{x}_1$ ترمز لقيم حالة الثبات، فعلى ذلك يكون

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{C} = 1 \qquad (4)$$

وان موضع الاتزان تقع على المستوى

$$x_1 + x_2 + C = 1 \qquad (5)$$

فى الثمن الأول كما فى شكل (٢١)



شكل (٢١)

وتكون نقاط الاتزان الاربعة هى

$$\bar{x}_1 = 0 \;,\; \bar{x}_2 = 0 \;,\quad \bar{C} = 1 \qquad (6\text{-a})$$

$$\bar{x}_1 = 1 - \bar{C}_1 \;,\; x_2 = 0 \;,\quad \bar{C} = \bar{C}_1 \;,\quad \bar{C}_1 = \frac{K_1 D}{\alpha_1 - D} \qquad (6\text{-b})$$

$$\bar{x}_1 = 0 \;,\; \bar{x}_2 = 1 - \bar{C}_2 \;,\quad \bar{C} = \bar{C}_2 \;,\quad \bar{C}_2 = \frac{K_2 D}{\alpha_2 - D} \qquad (6\text{-c})$$

$$\bar{x}_1 > 0 \ , \ \bar{x}_2 > 0 \ , \ \bar{C} = \bar{C}_3 \ , \ \bar{C}_3 = \frac{\alpha_2 K_1 - \alpha_1 K_2}{\alpha_2 - \alpha_2} \ , \ \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 1 - \bar{C}_3$$

(6-d)

وهذه طبقا للنقاط PQRS (انظر شكل (٢٠)) وشروط وجود هذه المواضع هى (6-b – 6-d)

$$D < \alpha_1 \ , \ \frac{K_1 D}{\alpha_1 - D} < 1, \quad \text{أو} \quad D < \frac{\alpha_1}{k_1 + 1}$$

$$D < \alpha_2 \ , \ \frac{K_2 D}{\alpha_2 - D} < 1, \quad \text{أو} \quad D < \frac{\alpha_2}{k_2 + 1} \qquad (7)$$

$$0 < \frac{\alpha_2 K_1 - \alpha_1 K_2}{\alpha_1 - \alpha_2} < 1, \quad D = \frac{\alpha_2 K_1 - \alpha_1 K_2}{(K_1 - K_2)}$$

وبدون فقد العموم سنفترض الوضع (6-b) يكون موجود فقط عند معدل تخفيف (dilution) واحد يعطى بالعلاقة (7). وأيضاً يكون موجودا فقط إذا كان

$$\alpha_2 K_1 > \alpha_1 K_2 \ , \qquad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} < \frac{1 + K_2}{1 + K_1}$$

أو

$$\frac{K_2}{K_1} < \frac{\alpha_2}{\alpha_1} < \frac{1 + K_2}{1 + K_1} \qquad (9)$$

وعلاوة على ذلك جميع نقاط الاتزان تقع على الخط المستقيم

$$x_1 + x_2 + C = 1, C = \bar{C}_3 \qquad (10)$$

(ii) استقرار مواضع الاتزان

(أ) لاستقرار الموضع (6-a) ليكن

$$x_1 = u(t) \ , \ x_2 = v(t) \ , \ C = 1 + w(t) \qquad (11)$$

وبالتعويض فى (3) وجعلها خطية نحصل على

$$\frac{du}{dt}=-Du+\frac{\alpha_1 u}{K_1+1}, \frac{dv}{dt}=-Dv+\frac{\alpha_2 v}{K_2+1} \qquad (12)$$

$$\frac{dw}{dt}=-Dw+\frac{\alpha_1 u}{K_1+1}-\frac{\alpha_2 v}{K_2+1}$$

بافتراض الحلول على الصورة

$$u = Ae^{\lambda t}, v = Be^{\lambda t}, w = Ce^{\gamma t}$$

وبالتعويض ونوجد المعادلة المميزة من المحددة

$$\begin{vmatrix} \lambda+D-\frac{\alpha_1}{K_1+1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+D-\frac{\alpha_2}{K_2+1} & 0 \\ \frac{\alpha_1}{K_1+1} & \frac{\alpha_2}{K_2+1} & \lambda+D \end{vmatrix}=0$$

ويكون للوضع (6-a) مستقر إذا كان

$$D>\frac{\alpha_1}{K_1+1} \quad , \quad D>\frac{\alpha_2}{K_2+1}$$

وبتكرار نفس الطريقة للمواضع (6-b)، نجد أن الشروط لاستقرارها على الترتيب.

$$D-\frac{\alpha_2 C_1}{K_2+C_1}>0 \quad \text{أو} \quad D>\frac{\alpha_2 K_1-\alpha_1 K_2}{K_1-K_2}$$

أى تكون مستقرة إذا كان معدل التخفيف اكبر من معدل التخفيف الحرج لوجودها. وللموضع (6 – c) يكون شروط الاستقرار هو

$$D-\frac{\alpha_2 C_2}{K_1+C_2}>0 \quad \text{أو} \quad D<\frac{\alpha_2 K_1-\alpha_1 K_2}{K_1+K_2}$$

أى تكون مستقرة إذا كان معدل التخفيف أقل من التخفيف الحرج لتواجدهم أما (6-d) فتكون المعادلة المميزة هى

$$\lambda(\lambda+D)(\lambda+\frac{\alpha_2\bar{x}_1\bar{K}_1}{(\bar{K}_1+\bar{C}_3)^2}+\frac{\alpha_2\bar{K}_2\bar{x}_2}{(\bar{K}_1+\bar{C}_3)^2}$$

وبالتالى يكون أحد القيم الذاتية صفراً والآخرين سالبين. وعلى ذلك إذا كان الحيود عن موضع الوجود المشترك فإن النظام يعود إلى موضع اتزان آخر.

ملحوظة: تنقسم التفاعلات البيولوجية إلى

(i) التعايش: (commensalism): العلاقة التى يرتبط بها كائن حى منتفع بآخر غير منتفع، ولكنه غير متضرر فى نفس الوقت مثل علاقة السمكة المهرجه مع شقائق النعمان أو علاقة البكتريا غير الضارة (Normal flora) فى قولون الانسان.

(ii) التقايض: (Mutalism): هى العلاقة التى ترتبط خلالها كائن حى بآخر بالمنفعة المتبادلة كما هو فى الاشنات (lichens) الطحالب والفطر (fungi and algae).

(iii) التطفل: (Parasitism) هى العلاقة التى يعتمد فيها كائن حى فى نموه على كائن حى لآخر يتضرر مثل تطفل الأمبيا والاسكارس فى أمعاء الانسان.

(iv) الافتراس (predation): وفيها يعتمد كائن حى على آخر فى التغذية عن طريق الافتراس أى القضاء على الكائن الفريسة مثل افتراس الاسد للغزال.

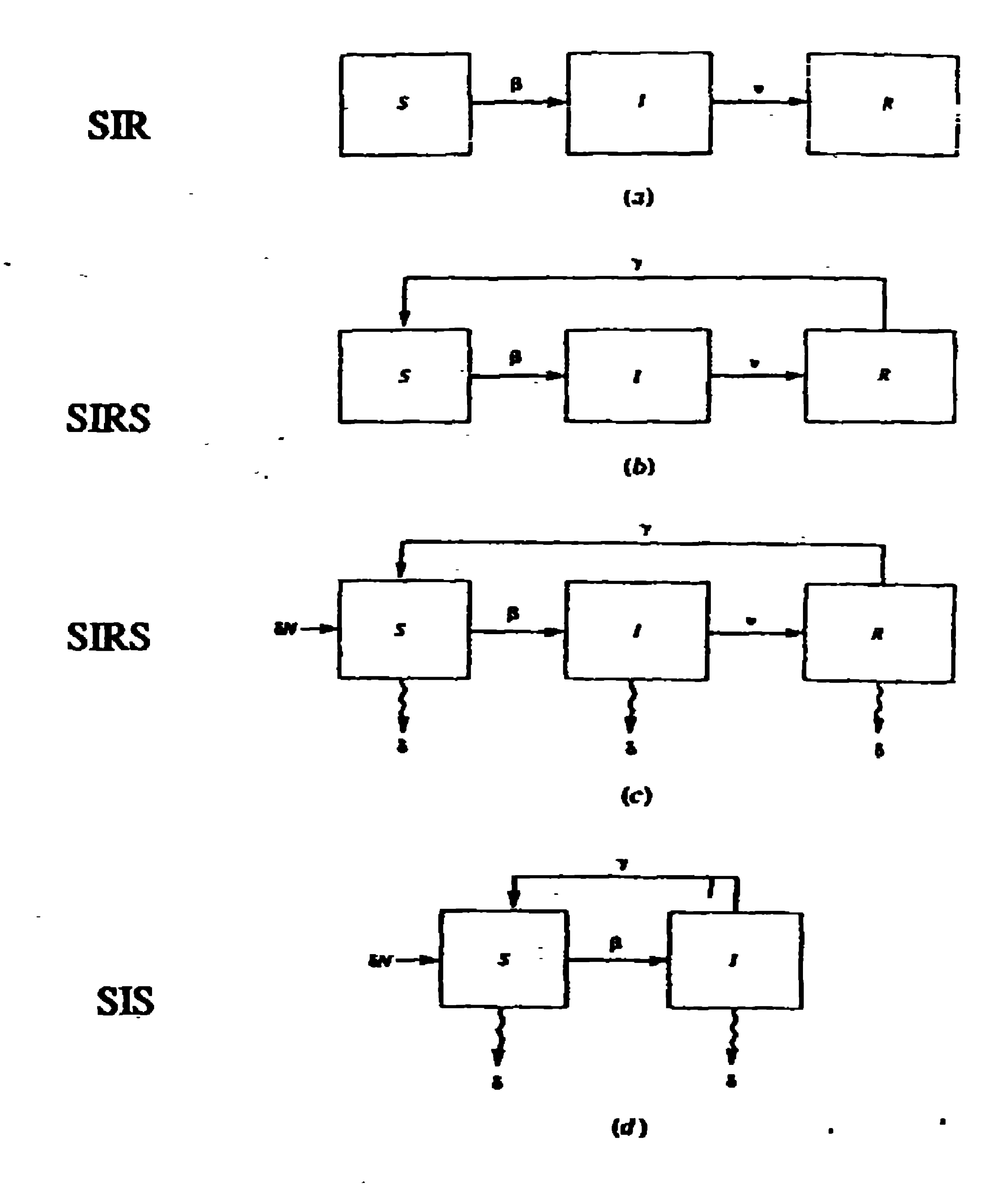
(v) التنافس (competition): علاقة تنافس بين الكائنات الحية على مستلزمات الحياة من غذاء وماء وهواء ومسكن. وقد يكون التنافس بين افراد من نفس النوع ويعرف بالتنافس الداخلى (interspecific) أو بين افراد لأنواع مختلفة ويعرف بالتنافس الخارجى (intraspecific).

٦-١٤ الوبائيات: (Epidemiology)

يهتم العالم بدراسة أمراض العدوى (infiction) وإنتشارها وهو موضع هام فى الرياضيات الحيوية الذى يهتم بدراسة الرياضيات الوبائية

(mathematical epidemiology)

ينقسم السكان فى بيئة حيوية إلى مجموعة قابلة للاصابة S (Sussceptible) الذين يمكن ji ينتقل إليهم الفيروس (virus) من مجموعة الافراد المصابين I (infected) ومجموعة الافراد المصابين الذين يتم شفائهم R (Recovered) وتنقسم المجموعة الاخيرة إلى إما يصاب بالعدوى مرة أخرى أو أن يكون لديه حصانة. وعلى ذلك يكون لدينا احدى النماذج SIR ، SIRS ، SIS كما فى شكل (٢٢)



شكل (٢٢)

الذى يوضح مراحل صور الانتقال والثوابت β ، λ ، γ هى معدل الانتقال من مرحلة إلى مرحلة. ويكون المعادلات نموذج SIR هى

$$\frac{dS}{dt} = -\beta IS \tag{1-a}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta IS - \gamma I \tag{1-b}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \tag{1-c}$$

حيث δ ثابت وتمثل معدل انتاج القابلين للاصابة β ، ν ، γ ثوابت وتمثل معدلات الانتقال من حالة إلى آخرى BSI تمثل معدل انتقال المرض والذى يتناسب مع معدل القابلين للاصابة (susceptible) والمصابين (infective) .

ومن السهولة التأكد أن مجموع التعداد هو $N = S + I + R$ لايتغير حيث

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt}(S + I + R) = \frac{d}{dt}(N) = 0$$

وبالرغم من أن هذه المعادلات غير خطية فإنه أمكن إشتقاق تعبير تقريبى لمعدل الشفاء $\frac{dR}{dt}$ كدالة فى الزمن.

ولدراسة هذا الموضوع استخدمت الطريقة الكيفية وأعتبر أن الذين تم شفائهم معرضون مرة اخرى للاصابة وتكون المعادلات على الصورة

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma R \tag{2-a}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \nu I \tag{2-b}$$

$$\frac{dR}{dt} = \nu I - \gamma R \tag{2-c}$$

ويسمى هذا النموذج (SIRS). وتكون نقاط السكون هى

$$\bar{S}_1 = N\ , \quad \bar{I}_1 = 0\ , \quad \bar{R}_1 = 0 \tag{3-a}$$

$$\bar{S}_2 = \frac{\nu}{\beta}, \quad \bar{I}_2 = \frac{N - \bar{S}_2}{\nu + \gamma}\ , \quad \bar{R}_2 = \frac{\nu \bar{I}_2}{\gamma} \tag{3-b}$$

فى (3-a) يكون جميع السكان أصحاء (معرضين للاصابة وأن الداء مستأصل eradicaled). وفى (3-b) يكون المجتمع مكون من بعض نسب ثابتة من كل نوع شريطة أن $(\bar{S}_2, \bar{I}_2, \bar{R}_2)$ جميعها ككميات ثابتة. لكى نكون $\bar{I}_2$ موجبة يجب أن تكون N اكبر من $\bar{S}_2$. وحيث أن $\bar{S}_2 = \frac{v}{\beta}$ فإن هذا يقودنا إلى النتيجة التالية.

نتيجة: المرض سوف يستوطن فى المجتمع (السكان) شريطة أن مجموع السكان الكلى يزيد عن ν/β أى أن

$$\frac{N\beta}{\nu} > 1$$

ونسبة البارامتر β/ν لها تفسير له معنى. حيث أن معدل الشفاء (الازالة) من المصابين هى ν (1 / time)، فيكون متوسط فترة الأصابة هى $1/\nu$ وبالتالى β/ν هى الجزء من المجتمع الذى يختلط مع الافراد المصابين خلال فترة الاصابة. تسمى الكمية $R_0 = N\beta/\nu > 1$ بحد الاصابة المعدى (threshold).

ويلاحظ أن $N = S(t) + I(t) + R(t)$ هو تعداد السكان (المجتمع) ونفترض أنه ثابت فى فترة ما وعليه فإن $\frac{dN}{dt} = 0$. يسمح لنا قانون الثبات (conservation) بحذف معادلة واحدة من المعادلات الثلاث. وعلى ذلك يمكن حذف أحد المتغيرات وليكن R (الذى يمكن دائماً حذفها $R = N - S - I$) وبذلك يكون لدينا معادلتين فى مجهولين على الصورة

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma(N - S - I)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \nu I$$

وتكون خطوط انعدام I هى $I = 0$ ، $S = \nu/\beta$

وخط انعدام S هو المنحنى $I = \frac{\gamma(N - S)}{(\beta S + \gamma)}$

ويتقاطع هذا المنحنى مع المحورين عند النقطتين $(N, 0), (0, N)$.

وتكون نقاط الاتزان هى

$$\bar{X}_1 = (N,0) \quad , \quad \bar{X}_2 = \left(\frac{\nu}{\beta}, \frac{\gamma(N-\nu/\beta)}{\nu+\gamma}\right)$$

ويكون لنقطة الأتزان $\bar{X}_2$ معنى فيزيائى إذا تحقق $\frac{N\beta}{\nu}>1$.

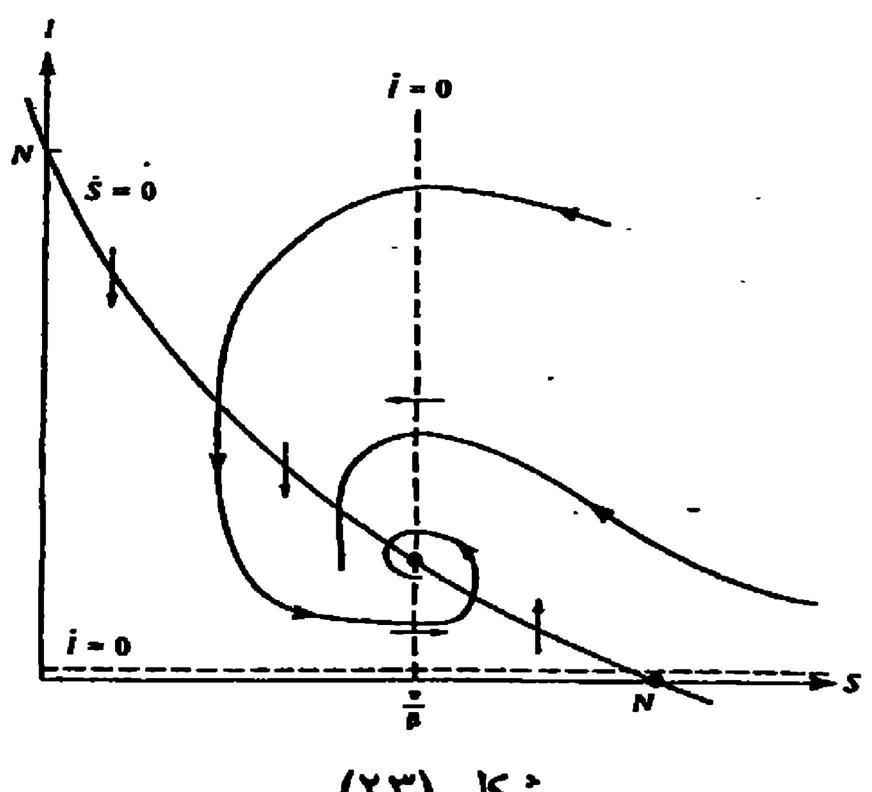
ويكون الجاكوبى عند أى نقطة هو

$$J = \begin{pmatrix} -I\beta-\gamma & -S\beta-\gamma \\ I\beta & S\beta-\nu \end{pmatrix}$$

عند $\bar{X}_1 = (N,0)$ يكون أثر J هو $-\nu+N\beta-\gamma$ وهى سالبه وقيمة المحدد J هى $-\gamma(N\beta-\nu)$ وبالتالى، بشرط $R_0 = \frac{N\beta}{\nu}>1$ ، يكون لدينا $\det J<0$ فتكون هذه النقطة سرج وهى غير مستقرة.

عند $\bar{X}_2$ يكون لدينا أثر J هو $-I\beta-\gamma<0$ وهى دائما سالبة وقيمة المحدد J هى $I\beta(\nu+\gamma)>0$ وهى دائما موجبة فتكون نقطة الأتزان مستقرة.

وبالتالى فإن نقطة الأتزان دائما مستقرة (إذا وجدت) أى عند تحقق الشرط R_0 (threshold) انظر شكل (٢٣)



شكل (٢٣)

ومن تحليلات اضافية فإن الاقتراب إلى نقطة الأتزان يمكن أن يكون تذبذبياً.

ملحوظة: عندما $R_0 < 1$ فإن مجموعة المصابين تختفى وعندما يكون $R_0 > 1$ فإنه توجد نقطة أتزان مستقرة حيث يوجد المجموعتان القابلة للاصابة والمصابة وأن عدد الأفراد المصابين تقترب من

$$I_{\text{steady state}} = \frac{\gamma(N - \frac{\nu}{\beta})}{\nu + \gamma}$$

تمرين: ليكن $\beta = \nu = \gamma = 1$. لأى قيم N يكون لدينا حل لولبى واحد مستقر ولأى قيم نحصل على عقد مستقرة للنقطة $\bar{X}_2$.

مثال: إذا كان $N = 2$، $\beta = 1$، $\nu = 1$، $\gamma = 1$ فإن خط انعدام I هو اتحاد $I = 0$، $S = 1$. وخط إنعدام S يعطى بالعلاقة $I = \frac{(2-S)}{S+1}$ ونقاط الأتزان هى $(2, 0)$ و $(1, ½)$.

ويمكن تعميم هذا النظام بدراسة تأثير انتقال الفيروسات (virus) فقط أثناء اللقاء الجنسى (heterosexual sex) فإننا نعتبر تعدادين (populations) منفصلين ذكر وأنثى. نستخدم $\bar{S}$ للاشارة إلى الذكر المعرض للاصابة، S للانثى وبالمثل لكل من I، R فيكون لدينا النظام المناظر (SIRS) وهو

$$\frac{d\bar{S}}{dt} = -\bar{\beta}\bar{S}I + \bar{\gamma}\bar{R} \quad , \quad \frac{d\bar{I}}{dt} = \bar{\beta}\bar{S}I - \bar{\nu}\bar{I}$$

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{\nu}\bar{I} - \bar{\gamma}\bar{R} \quad , \quad \frac{dS}{dt} = -\beta S\bar{I} + \gamma R$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S\bar{I} - \nu I \quad , \quad \frac{dR}{dt} = \nu I - \gamma R$$

وهذا النظام يكون بدرجة ما أصعب من السابق ويمكن بدون حذف مجموعة ولكن بإدخال المجموعة المصابة فى القابلة للاصابة فيكون لدينا

$$\frac{d\bar{S}}{dt} = -\bar{\beta}\bar{S}I + \bar{\nu}\bar{I} \quad , \quad \frac{d\bar{I}}{dt} = \bar{\beta}\bar{S}I - \bar{\nu}\bar{I}$$

$$\frac{dS}{dt}=-\beta S\bar{I}+\nu I \qquad , \qquad \frac{dI}{dt}=\beta S\bar{I}-\nu I$$

وبكتابة $\bar{N}=\bar{S}(t)+\bar{I}(t)$ ، $N=S(t)+I(t)$ لمجموع الذكور والاناث وباستخدام قانون الثبات فإننا ندرس النظام التفاضلى

$$\frac{d\bar{I}}{dt}=\bar{\beta}(\bar{N}-\bar{I})I-\bar{\nu}\bar{I}$$

$$\frac{dI}{dt}=\beta(N-I)\bar{I}-\nu I \tag{4}$$

وهو نظام معاملات تفاضلية سبق دراسته فى اكثر من مثال على نفس الصورة.

ملحوظة (٤): اثبت وجود نقطتى اتزان هما $I=\bar{I}=0$ بشرط

$$R_0\bar{R}_0=\left(\frac{N\phi}{\nu}\right)\left(\frac{\bar{N}\bar{\beta}}{\bar{\nu}}\right)>1$$

وأيضاً أن

$$I=\frac{N\bar{N}-(\nu\bar{\nu})/(\beta\bar{\beta})}{(\nu/\beta)+N} \ , \quad \bar{I}=\frac{N\bar{N}-(\nu\bar{\nu})/(\beta\bar{\beta})}{\bar{\nu}/\beta+N}$$

وعلاوة على ذلك اثبت أن نقطة الاتزان الأولى غير مستقرة بينما الثانية مستقرة.

تمارين

١- اثبت أن حل النظام $\dot{x}_1 = -x_1, \dot{x}_2 = -2x_2$ والذى يحقق الشروط $x_2(0) = 4, x_1(0) = 2$ هو $x_1 = 2e^{-t}$ ، $x_2 = 4e^{-2t}$

استنتج وارسم المسار. ثم استخدم قاعدة السلسلة لاثبات حل اخر للنظام هو $[x_1(t+a), x_2(t+a)]$، a ثابت.

وهل المسار يمثل الحل $(x_1(t), x_2(t))$ وهو ايضا الحل $[x_1(t+a), x_2(t+a)]$.

٢- المعادلة للتيار I فى دائرة كهربية تتكون من مصدر جهد (e)، مكثف (C) – وموصل (L) ومقاوم (R) موصل على التوالى

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{de}{dt}$$

اكتب المعادلة المعطاه فى صورة نظام مكون من معادلتين من الرتبة الأولى. وهل النظام ذاتى ؟

٣- عين نقاط الأتزان للنظام الخطى

(i) $\dot{x}_1 = x_1 + x_2 - 2, \qquad \dot{x}_2 = x_1 - x_2$

(ii) $\dot{x}_1 = -(x_1 + x_2 + 1), \qquad \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 + 5$

(iii) $\dot{x}_1 = 3x_1 + x_2, \qquad \dot{x}_2 = -x_1 + x_2$

ثم ناقش استقرار كل نقاط الاتزان

٤- عين نقاط الاتزان للنظام

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1^2 + x_2^2 - 1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = 2x_1x_2$$

ثم ادرس اتزان هذه النقاط.

٥- عين النقاط الحرجة لكل من

(i) $\dot{x} = x, \dot{y} = 2x + 2y$, (ii) $\dot{x} = -x + 2y, \dot{y} = x - y$

$(iii)\ \dot{x}=-x,\dot{y}=x-y$, $(iv)\ \dot{x}=-x+y,\dot{y}=2x$

٦- حدد السلوك التقاربى لحلول النظم التالية بجوار النقاط الحرجة وارسم المسارات المناظرة للنظام الخطى

$(i)\ \dot{x}=2\sin x+y$ $\quad$ $(ii)\ \dot{x}=-x-x^2+xy$

$\dot{y}=\sin x-3y$ $\quad$ $\dot{y}=-y+xy-y^2$

$(iii)\ \dot{x}=x+e^{-y}-1,\ \dot{y}=-y-e^{-y}=1$

٧- معادلة الحركة لزنبرك مخمد هى

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$$

حيث m، c، k ثوابت موجبة بتحويل المعادلة إلى نظام، ناقش طبيعة واستقرار النقاط الحرجة.

٨- اثبت أن $(0,0)$، $(2,4)$ هى نقطتى اتزان للنظام

$$\dot{x}=8x-y^2,\quad \dot{y}=-y+x^2$$

وعين نوع واستقرار نقطة الأصل من النظام الخطى المناظر.

٩- عين نوع النقطة الحرجة $(0,0)$ معتمدا على بارامتر حقيقى μ للنظام غير الخطى

$$\dot{x}=-2x-y+x^2\ ,\qquad \dot{y}=4x+\mu y-y^2,\ \ \mu\neq 2$$

١٠- ليكن (α,β) نقطة سكون (إتزان) للنظام

$$dx/dt=f(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=g(x,y)$$

إذا كان $f^2+g^2\neq 0$ فى جوار (α,β) اثبت أن النظام

$$\frac{dx}{dt}=\frac{rf}{\sqrt{f^2+g^2}},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{rg}{\sqrt{f^2+g^2}}$$

حيث $r=[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]^{1/2}$، له نقطة حرجة عند (α,β). ثم طبق النتيجة على

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1+x^2}{x^2+xy+y^2},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{1+y^2}{x^2+xy+y^2}$$

١١- ليكن $x(t)$، $y(t)$ يرمز لكثافة نوعين من الكائنات المبينة فى نظام لونكاوفولتيرا $\dot{x}=ax-ax^2-\beta xy \quad , \quad \dot{y}=cy-\gamma xy-\delta y^2$

اثبت أنه إذا كان a، c سالبين فإن النظام يكون مستقرا تقاربيا. أى أن كل من النوعين سوف يتضاءل إذا كانت الكثافة الابتدائية صغيرة. ثم ادرس باقى الحالات.

١٢- اثبت انه إذا كان $x(t),y(t)\ ,\ t_1<t<t_2$ هو حل النظام $\dot{x}=f(x,y)\ ,\ \dot{y}=g(x,y)$ فإن $x(t+c)\ ,\ y(t+c)$ لأى ثابت c هو حل أيضاً. وهذه الخاصية لاتتحقق عموما فى الانظمة غير الذاتية.

ناقش ذلك إذا كان $\dot{x}=x\ ,\ \dot{y}=tx$.

١٣- حدد نوع النقاط الحرجة وادرس استقرارها. اوجد حلها وارسم المسار

(i) $x_1'=-3x_1+x_2\ ,\qquad x_2'=4x_1-2x_2$

(ii) $x_1'=x_1+x_2\ ,\qquad x_2'=-x_1+3x_2$

(iii) $x_1'=-x_1+2x_2\ ,\qquad x_2'=-2x_1-5x_2$

(iv) $x_1'=-x_1\ ,\qquad x_2'=-x_2$

(v) $x_1'=x_1-3x_2\ ,\qquad x_2'=3x_1-3x_2$

(vi) $x_1'=2x_1-x_2\ ,\qquad x_2'=x_1+2x_2$

(vii) $x_1'=x_1+2x_2\ ,\qquad x_2'=-x_1+5x_2$

(viii) $x_1'=3x_1-2x_2\ ,\qquad x_2'=4x_1-x_2$

(ix) $x_1'=x_1+3x_2\ ,\qquad x_2'=-6x_1+5x_2$

(x) $x_1' = 3x_1 + x_2$, $x_2' = -x_1 + x_2$

(xi) $x'' + kx' = 0, \quad k > 0$

١٤- ارسم خط الانعدام فى مستوى الطور xy وبين نقاط الاتزان وارسم اتجاهات الأسهم للنظم التالية

(i) $\dfrac{dx}{dt} = y^2 - x^2$, $\dfrac{dy}{dt} = x - 1$

(ii) $\dfrac{dx}{dt} = x(y^2 - y)$, $\dfrac{dx}{dt} = x - y$

(iii) $\dfrac{dx}{dt} = x^2 + y$, $\dfrac{dy}{dt} = -y$

(v) $\dfrac{dx}{dt} = -xy$, $\dfrac{dy}{dx} = (1 + x)(1 + y)$

(vi) $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{xy}{1+x} + x$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{1+x} - y$

(vii) $\dfrac{dx}{dt} = xy(1 - x)$, $\dfrac{dy}{dx} = y(1 - \dfrac{y}{x})$

الباب الخامس عشر

الحلول الدورية للمعادلات التفاضلية

Existence and nonexistence of periodic solution

١٥-١ مقدمة: سبق ان درسنا النظام الذاتي الذى على الصورة

$$x_1' = f_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \qquad (1)$$

وليكن (x_{1c}, x_{2c}) هي النقطة الحرجة وبنقل الاحداثيات إليها فتكون نقطة الأصل هي النقطة الحرجة أي $f_1(0) = f_2(0) = 0$ وباستخدام متسلسلة تيلور لفك كل من f_1، f_2 نحصل على

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\left(x_1^2 \frac{\partial^1 f_1}{\partial x_1^2} + 2x_1 x_2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} + x_2^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} \right) + \ldots$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\left(x_1^2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} + 2x_1 x_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} + x_2^2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \right) + \ldots$$

(2)

حيث حسبت المشتقات عند (0, 0). ويمكن كتابة هذه المعادلات (1)، (2) على الصورة

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0(|x|^2) \qquad (3)$$

$$\underline{x} = D\underline{f}(\underline{0})\underline{x} + 0(|\dot{x}|^2)$$

حيث عناصر مصفوفة الجاكوبي $Df(0)$ ثوابت وأننا اهملنا الحدود $0(|\dot{x}|^2)$. فيكون لدينا النظام الخطى

$$\underline{\dot{x}} = A\underline{x}$$

حيث a_{ij} هى عناصر $D\underline{f}(0)$ (أو عناصر A)

وفى هذا البند سوف نعطى الشروط اللازمة لوجود أو عدم وجود الحلول الدورية فى مستوى الطور.

١٥-٢ دليل بونكاريه: (Poincare' index)

ليكن C منحنى مغلق املس لايمر بنقطة الاتزان للنظام (1) وكل نقطة على C نربطهما بزاوية ϕ معرفة بالعلاقة

$$\phi = \tan^{-1}(f_2/f_1) \tag{4}$$

وبالسير على C فإن ϕ تتغير باستمرار حتى تعود إلى نفس النقطة وتكون الزاوية ϕ تغيرت بالقيمة 2π.

ويعرف دليل بوانكاريه I بالعلاقة

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_c d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_c d(\tan^{-1}(f_2/f_1)) \tag{5}$$

ويكون التكامل في اتجاه عكس عقارب الساعة.

وحيث أن $d(\tan^{-1}x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx$ فإن

$$d(\tan^{-1}(f_2/f_1)) = \frac{1}{1+\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2}[f_1 df_2 - f_2 df_1]/f_1^2$$

$$= (f_1 df_2 - f_2 df_1)/(f_1^2 + f_2^2)$$

وبالتعويض (5) نحصل على

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_c (f_1 df_2 - f_2 df_1)/(f_1^2 + f_2^2) \tag{6}$$

حيث

$$df_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}dx_2 \qquad , i = 1,2$$

ويكون من الأسهل التعامل بالاحداثيات القطنية كما فى المثال التالى.

مثال: احسب دليل بوانكاريه المصاحب لدائرة الوحدة عند نقطة الأصل للنظام

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1^2 - 1 , \quad \frac{dx_2}{dt} = 2x_1x_2 \qquad (7)$$

باستخدام الاحداثيات القطنية $x_1 = \cos\theta$ ، $x_2 = \sin\theta$ نجد أن

$$f_1 = 2x_1^2 - 1 = 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$$

$$f_2 = 2x_1x_2 = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$$

فإن

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta 2\theta}\right) = 2\theta$$

وبزيادة θ بالمقدار 2π (بالدوران على المنحنى C) فإن φ تزداد بمقدار 2π. ويمكن حساب df_1، df_2 فنجد أن

$$df_1 = -2\sin 2\theta d\theta, \quad df_2 = 2\cos 2\theta d\theta$$

بالتعويض فى (6) نجد أن $I = 2$

نظرية (١): (i) يكون الدليل $I = 0$ إذا كان النظام لايحتوى على نقاط اتزان على أو داخل المنحنى C وأن f_1، f_2 لها مشتقات متصلة من الرتبة الأولى

(ii) إذا كان C_1 منحنى مغلق داخل C ولاتوجد نقاط اتزان فى المنطقة المحصورة بين C، C_1، فإن الدليل المصاحب للمنحنى C يساوى للدليل المصاحب للمنحنى C_1.

وهذا يؤدى إلى ان الدليل لايعتمد على C ولكن يعتمد على وجود نقاط الاتزان داخل C. ويستحسن ان ننص على قيم I المصاحبة لنقط الاتزان.

(iii) دليل العقدة، البؤرة او المركز هو واحد اما دليل نقطة السرج هى 1 −

(iv) إذا احاط C بنقاط إتزان فإن دليل نقطة الاتزان j هو I_j فإن الدليل I على C هو $I=\sum_{j=1}^{n} I_j$ أى ان الدليل جمعى (additive)

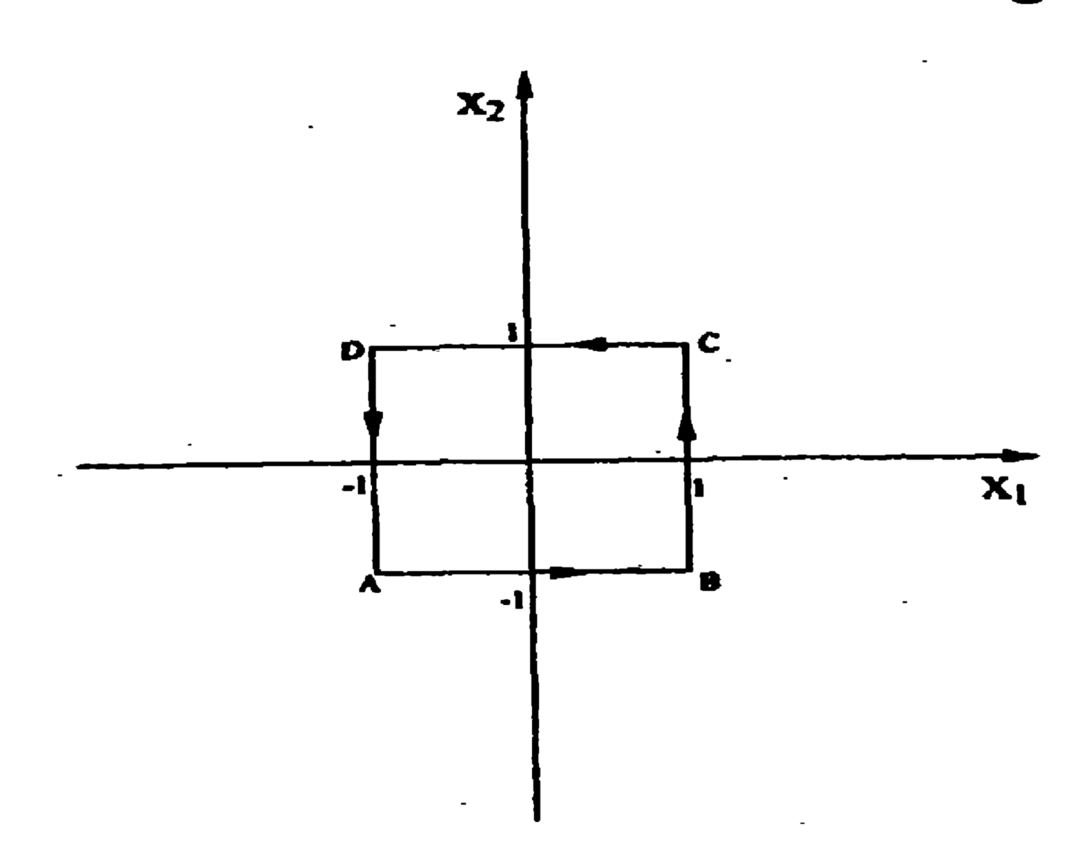
وبرهان هذه النظرية خارج نطاق الكتاب.

والأن نستنتج أنه إذا كان C مسار دورى، فإنه يجب ان يحتوى على نقطة إتزان ويجب ان يكون دليلها واحد. وهذا الشرط ضرورى ولكن ليس كافيا. إذا كان الدليل لايساوى 1 + ، فإن C لايكون مسارا دوريا وهذا يمدنا بمعيار لمعرفة وجود الحل الدورى كما فى المثال التالى:

مثال (١): احسب دليل نقطة الاتزان $(0,0)$ للنظام

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2^3, \quad \frac{dx_2}{dt}=x_1^3$$

الحل: نقطة الأصل هى نقطة الاتزان الوحيدة. نختار C بأنه المربع الذى طول ٢ كما فى الشكل



وبأستخدام العلاقة (6) نجد أن

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_C 3(x_1^2x_2^3dx_1-x_1^2x_2^2dx_2)/(x_1^6+x_2^6)$$

بالتكامل عكس عقارب الساعة على AB، BC، CD ، DA. على AB يكون $x_2=-1$ ، $dx_2=0$

$$\int_{-1}^{1}\frac{-3x_1^2dx_1}{1+x_1^6}=\int_{-1}^{1}\frac{dy}{1+y^2}=\tan^{-1}y\,]_{-1}^{1}=-\pi/2$$

وبالمثل على BC، CD ، DA كل منهم يساوى $-\pi/2$ وعلى ذلك فنجدأن

$$1=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right]=-1$$

وبذلك لايحتوى النظام على حل دورى

١٥-٣- معيار بندكس النافى Bendixson's negative criterion

نظرية (١): إذا كان $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ لاتتغير إشارته فى منطقة D فى مستوى الطور فإن النظام

$$\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2)\quad,\quad \dot{x}_2=f_2(x_1,x_2)\qquad(1)$$

لا يحتوى على مسار مغلق (حل دورى) فى هذه المنطقة.

البرهان: ليكن لدينا النظام

$$\frac{dx_1}{dt}=f_1(x_1,x_2)\,,\qquad \frac{dx_2}{dt}=f_2(x_1,x_2)\qquad(2)$$

و C منحنى مغلق فى D، R هى المنطقة التى يحصرها C بداخله وبتطبيق نظرية جرين فى المستوى نجد أن

$$\int_C f_1(x_1,x_2)dx_2-f_2(x_1,x_2)dx_1=\int\int_R\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)ds$$

حيث ds عنصر المساحة، والتكامل الخطى مأخوذ فى الاتجاه الموجب (عكس إتجاه عقارب الساعة). ليكن $x_1 = g_1(t)$ ، $x_2 = g_2(t)$ حلين يمثلان بارامتريا المنحنى C، T هى دورة هذا الحل فيكون

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = f_1(g_1(t), g_2(t)) \ , \quad \frac{\partial g_2}{\partial t} = f_2(g_1(t), g_2(t))$$

وعلى C يكون لدينا

$$\int_C f_1(x_1, x_2)dx_2 - f_2(x_1, x_2)dx_1$$

$$= \int_0^T f_1(g_1(t), g_2(t))f_2(g_1(t), g_2(t)) - f_2(g_1(t), g_2(t))f_1(g_1(t), g_2(t)) = 0$$

$$= \int_R \int \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) ds = 0$$

وهذا التكامل الثنائى يساوى الصفر فقط إذا كان $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ يغير اشارته.
وهذا تناقض بالتالى لايوجد منحنى مغلق C للنظام (1). وبهذا يتم البرهان.

مثال (١): اثبت ان النظام

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \ , \ \dot{x}_2 = x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) + k$$

حيث k ثابت له مسار مغلق وهو إما يحيط بنقطة الأصل أو بتقاطع مع الدائرة $x_1^2 + x_2^2 = 1/2$.

الحل: ليكن $\dot{x}_1 = f_1 \ , \ \dot{x}_2 = f_2$

ويكون المقدار

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2 - 4(x_1^2 + x_2^2) \qquad (1)$$

موجبا داخل الدائرة $x_1^2 + x_2^2 = 1/2$ وسالبا خارجها. وبالتالى أى منحنى مغلق لايمكن اى يحتوى بالكامل فى منطقة بسيطة الترابط

$\{x_1,x_2): x_1^2+x_2^2<1/2\}$

وعلى ذلك إذا وجد مسار مغلق فانه إما أى يكون فى المنطقة

$\{x_1,x_2): x_1^2+x_2^2>1/2\}$

أو بتقاطع $x_1^2+x_2^2=1/2$. إذا كان المسار المغلق محتوى فى المنطقة

$\{x_1,x_2): x_1^2+x_2^2>1/2\}$

فإنه يجب ان يحيط بنقطة الأصل وإلا أنه يحتوى منطقة لها اشارة ثابتة سالبه للمقدار (1).

مثال (٢): ليكن لدينا النظام

$$\frac{dx_1}{dt}=2x_1+x_2+x_1^3\ ,\ \frac{dx_2}{dt}=3x_1-x_2+x_2^3$$

وعلى ذلك نجد ان

$$f_1=3x_1+x_2+x_1^3\ ,\ f_2=3x_1-x_2+x_2^3$$

وبالتالى

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=3(x_1^2+x_2^2)+1$$

وهذا التعبير دائما موجبا خلال المنطقة D فى المستوى x_1x_2. وبالتالى طبقا لنظرية بندكس النافيه لايكون لهذا النظام مسار مغلق داخل المنطقة (أى لايحتوى على دوائر نهاية وبالتالى لايحتوى على حلول دورية)

١٥-٤ معيار ديولك Dulac's Criterion

إذا كانت الدالة $\rho(x_1,x_2)$ قابلة للاشتقاق باستمرار وان

$$\frac{\partial}{\partial x}(pf_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(pf_2)]$$

لها اشارة واحدة فى منطقة بسيطة الترابط (المنحنى مغلق ولايتقاطع مع نفسه وليس فيه فجوات) فإن النظام

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad , \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \qquad (1)$$

ليس له مسار دورى فى هذه المنطقة.

ملحوظة (١): إذا كان $\rho = 1$ فنحصل على معيار بندكسون.

مثال (١): اثبت أنه ليس للنظام

$$\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - \beta_2 x_2)$$

$$\dot{x}_2 = \alpha x_2(1 - x_2 - \beta_1 x_1)$$

حلا دوريا.

الحل: نلاحظ أن

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = (1 - 2x_1 - \beta_2 x_2) + (\alpha - 2\alpha x_2 - \alpha\beta_1 x_1)$$

$$= (1 + \alpha) - [x_1(2 + \alpha\beta_1) + x_2(2\alpha + \beta_2)]$$

لانحصل على إجابة شافية عن اشارة $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ أى يفشل معيار بندكس ولكن باستخدام معيار ديولك مع $\rho = 1/x_1 x_2$ يكون لدينا

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho f_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho f_2) = -\left(\frac{1}{x_2} + \frac{\alpha}{x_1}\right)$$

الكميتان x_1، x_2 موجبتان فى الربع الأول (ما عدا نقطة الأصل حيث ρ دالة تكون عندها شاذه) فإن اشارة $\frac{\partial}{\partial x}(\rho f_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho f_2)$ دائماً سالبة وبالتالى لايكون للنظام حل دورى وعلى ذلك يكون نقطة الأصل غير مستقرة.

النظرية التالية تعطى الضمان لوجود مسار مغلق (حل دورى).

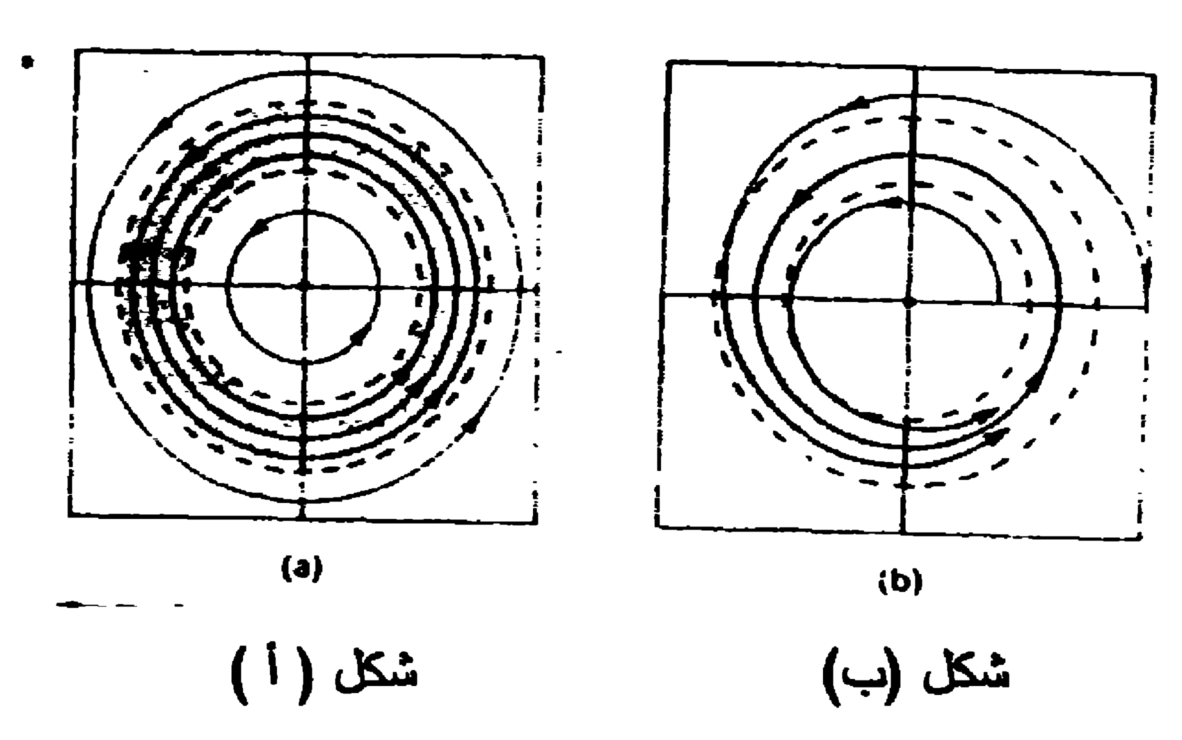
نظرية بوانكريه وبندكسون: إذا كان كل من f_1، f_2 فى (1) لها مشتقات جزئية متصلة فى D فى المستوى $x_1 x_2$ وليكن D_1 داخل نطاق D المحدود. ليكن R هى المنطقة المكونة من D_1 وحوافها (boundary) ونفترض ان النظام (1) ليس له نقطة اتزان فى R. إذا كان $C[=(x_1(t), x_2(t)]$ هو المسار

للنظام ويقع فى R لبعض t_0 ويبقى فى R لجميع قيم $t \geq t_0$. فإن إما C مسار مغلق أو يدور لولبيا فى اتجاه مسار مغلق عندما $t \to \infty$. فى كلتا الحالتين يكون للنظام حل دورى.

تعريف (١): دائرة النهاية Limit cycle

يسمى أي مسار مغلق C في مستوى الطور بدائرة النهاية إذا كانت معزولة عن أى مسارات أخرى مغلقة وبعبارة أخرى إذا كان يوجد جوار إنبوبى (tubular) فى جوار C الذى لايحتوى على مسارات أخرى مغلقة.

هذا التعريف يمكننا بمقارنة دائرة النهاية مع المركز كما فى الشكل (أ)



شكل (أ)　　　شكل (ب)

ويكون من السهل تكوين امثلة عن دائرة الوحدة فى الاحداثيات القطنية.

مثال (٢): اثبت ان النظام

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1[1-(x_1^2+x_2^2)^{1/2}]$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2[1-(x_1^2+x_2^2)^{1/2}]$$

له دائرة النهاية $x^2 + x^2 = 1$

الحل: باستخدام الاحداثيات القطنية نجد ان

$$\dot{r} = r(1-r) \quad , \quad \dot{\theta} = 1$$

من الواضح أن حل هذه النظام هو $r=1\ ,\ \theta=t$ يعطى مسارا مغلقا يتكون من الدائرة $x^2+y^2=1$ تعبر فى عكس إتجاه عقارب الساعة بسرعه زاوية ثابتة $\dot{\theta}=1$. عندما تكون $0<r<1$، فإن $\dot{r}$ تكون موجبة وتدور المسارات فى هذه المنطقة لولبيا للخارج $(\dot{\theta}=1)$ فى اتجاه $r=1$. **وعندما $r>1$** يكون $\dot{r}<1$ وتدور المسارات لولبيا إلى الداخل مع زيادة t. وتكون صورة الطور (phase portrait) مكافئا كيفياً كما للتى مع دائرة النهاية $x^2+y^2=1$ شكل (ب)

ملحوظة (٢): لاتسلك دوائر الوحدة بنفس الطريقة كما فى المثال السابق. يوجد ثلاثة انواع

(أ) دائرة وحدة مستقرة (جاذبة attracting) حيث تدور المسارات لولبيا إلى مسار مغلق من الناحيتين عندما $t\to\infty$ كما فى شكل (ب)

(ب) دائرة وحدة غير مستقرة (طاردة repelling) حيث تدور المسارات لولبيا بعيدا عن المسار المغلق من الجهتين عندما $t\to\infty$.

(جـ) دائرة وحدة شبه مستقرة (semi-syable) حيث تدور المسارات لولبيا للدلخل فى إتجاه المسار المغلق من جانب وتدور لولبيا إلى الخارج من الجانب الآخر من المسار المغلق.

مثال (٣): أوجد دوائر النهاية للنظم التالية

(i) $\dot{r}=r(r-1)(r-2),\quad \dot{\theta}=1$

(ii) $\dot{r}=r(r-1)^2,\quad \dot{\theta}=1$

الحل: (i) تعطى المسارات بالعلاقة

$$r(t)=1,\quad \theta=t \quad \text{وكذلك} \quad r=2,\quad \theta=t$$

وعلاوة على ذلك

$$\dot{r}\begin{cases} >0 & , \quad 0<r<1 \\ <0 & , \quad 1<r<2 \\ >0 & , \quad r>2 \end{cases}$$

ومن ذلك نرى أن لدينا دائرتا نهاية دائرية أحدهما مستقرة $(r = 1)$ والأخرى غير مستقرة $(r = 2)$.

(ii) النظام له دائرة نهاية دائرية واحدة نصف قطرها 1. وحيث أن $\dot{r} > 0$ عندما يكون $0 < r < 1$ ، $r > 1$ فإن دائرة الوحدة تكون شبه مستقرة.

ملحوظة (٣): دائرة النهاية ليست دائما (circular) ولا تكتشف دائما بالتحويل إلى الاحداثيات القطنية. ومثال ذلك معادلة فان دير بول

$$\ddot{x} - \dot{x}(1 - x^2) + x = 0$$

ونأخذ صورة النظام

$$\dot{x}_1 = x_2 \ , \ \dot{x}_2 = x_2(1 - x_2^2) - x_1$$

وباستخدام الاحداثيات القطنية نجد أن

$$\dot{r} = r\sin^2\theta(1 - r^2\cos^2\theta)$$

$$\dot{\theta} = -1 + \cos\theta\sin\theta(1 - r^2\cos^2\theta)$$

وهذه المعادلات لاتبين طبيعة صورة الطور الذى يحتوى على دائرة وحدة جاذبة. وعموما مسألة إستبيلان دوائر النهاية فى النظم غير الخطية هى من المسائل العويصة ولذلك لجأ الباحثون إلى نظرية بوانكاريه بندكسن كما بينا سابقا.

ملحوظة (٤): تسمى عائلة الحلول الدورية المتوازية (مثل ذات المراكز الخطية) بدائرة النهاية لأن المسارات المجاورة تبقى على مسافات ثابتة ولاتتقارب إليها.

تعريف (٢): ليكن لدينا النظام $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$ له المسار ϕ، تسمى المجموعة الجزئية $D \subset R$ بأنها موجبة لا تغيرية للنظام إذا كان لكل $x_0 \in D$ يبقى المسار $\phi(\underline{x}_0)$ فى D لجميع قيم t الموجبة.

ملحوظة (٥): إذا كانت المنطقة D مغلقة، محدودة وهى فئة موجبة لا تغيرية للنظام ولاتوجد نقاط اتزان فى D فإنه يجب أن يوجد دائرة نهاية فى D.

نظرية (٢): نفترض أن المسار $\phi(\underline{x}_0)$ للنظام $\dot{\underline{x}}=\underline{f}(\underline{x})$ محتوى في منطقة محدودة D من مستوى الطور $(t\geq 0)$ فإنه عندما $t\to\infty$ فالنقاط $\phi_t(\underline{x}_0)$ يجب إما

(i) تؤول إلى نقطة الاتزان، أو

(ii) تدور لولبيا في اتجاه دائرة النهاية للنظام

مثال (٤): اثبت أن النظام

$$\ddot{x}-\dot{x}(1-3x^2-2\dot{x}^2)+x=0$$

له دائرة نهاية

الحل: النظام المناظر للمعادلة التفاضلية هو

$$x=x_1,\quad \dot{x}=x_2,\quad \dot{x}_2=-x_1+x_2(1-3x_1^2-2x_2^2)$$

وباستخدام الاحداثيات القطبية نحصل على

$$\dot{r}=r\sin^2\theta(1-3r^2\cos^2\theta-2r^2\sin^2\theta) \qquad (أ)$$

$$\dot{\theta}=-1+\frac{1}{2}\sin 2\theta(1-3r^2\cos^2\theta-2r^2\sin^2\theta) \qquad (ب)$$

(i) نلاحظ أن (أ) مع $r=1/2$ تعطى

$$\dot{r}=\frac{1}{4}\sin^2\theta(1-\frac{1}{2}\cos^2\theta)\geq 0$$

مع التساوى فقط عند π أو $\theta=0$. وبالتالى $\{r\,|\,r>\frac{1}{2}\}$ موجبه لا تغيرية

(positively invariant)

(ii) من المعادلة (أ) نجد أن

$$\dot{r}\leq r\sin^2\theta(1+2r^2)\leq 0$$

وبالتالى عن $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ تكون $\dot{r}\le 0$ ويكون التساوى فقط عندما $\theta=0,\pi$

وعلى ذلك تكون $\{x \mid r<\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ موجبة لا تغيرية.

من (i)، (ii) نرى أن المنطقة الحلقية $\{x \mid \frac{1}{2}<r<\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ تكون موجبة لا تغيره، وحيث أن نقطة الأصل نقطة اتزان فإنه يوجد دائرة نهاية فى المنطقة الحلقية.

ملحوظة (٤): إذا وجد مسار مغلق فى R، فإن هذا المسار المغلق يجب أن يحتوى على نقطة إتزان دليلها 1 وأن نقطة الأتزان هذه لايمكن أن تكون فى R. فيلى ذلك أن R ليست منطقة بسيطة الترابط أى أنها يجب أن تحتوى على ثقب.

والمثال التالى يوضح ذلك.

مثال (٥): اثبت أن للنظام

$$\dot{x}_1=-x_2+x_1(1-x_1^2-x_2^2),\quad \dot{x}_2=x_1+x_2(1-x_1^2-x_2^2)$$

حلا دوريا.

الحل: نقطة الأصل هى نقطة الاتزان الوحيدة وباستخدام الاحداثيات القطنية فإن النظام المعطى يؤول إلى

$$\dot{r}=r(1-r^2),\quad \dot{\theta}=1 \tag{4}$$

اعتبر المنطقة R محاطة بالدائرتين $r=\varepsilon(<1)$، $r=K(>1)$. ولاتوجد نقاط اتزان داخل R. إذا كان $r<1$ فإننا نستنتج من (4) أن r تزداد مع الزمن وأن أى مسار يبدأ بالقرب من $r=\varepsilon$ يتحرك بعيداً عن الدائرة. إذا كان $r>1$، فإن r تتناقض مع الزمن وأن أى مسار بجوار $r=K$ يتحرك بعيداً عنه. وبالتالى أى مسار الذى يبدأ فى R يبقى فى R ومن نظرية بوانكاريه بندكس، يوجد مسار مغلق للنظام فى R.

ويكون حل النظام (4)

$$r^2=r_0^2/[r_0^2+(1-r_0^2)e^{-2t}]\ ,\quad \theta=\theta_0-t$$

حيث r_0 ، θ_0 قيم ابتدائية للكميتين r ، θ على الترتيب. ودائرة النهاية المسار المغلق هي الدائرة $r=1$. إذا كان $r_0<1$ فإن المسار يدور لولبيا للخارج إلى $r=1$ وإذا كان $r_0>1$ فإن المسار يدور لولبيا للداخل إلى $r=1$ التي تسمى بدائرة النهاية $(r=1)$ وهي تحيط بنقطة الأصل التي هي مركز مع الدليل 1.

نلاحظ أن R لاتحتوى نقطة الأصل. وإذا طبقاً معيار بندكسن نحصل على

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=2[1-2(x_1^2+x_2^2]$$

وفى المنطقة R ، المقدار $\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)$ تتغير إشارته ونستنتج أنه يوجد إمكانية وجود مسار مغلق ولكن لا يضمن وجوده. ونظرية بوانكاريه بندكس تؤكد وجود الحل الدورى.

مثال (٦): ناقش إمكانية وجود حل دورى للمعادلة

$$\ddot{x}-\mu(1-x^2)\dot{x}+x=0$$

حيث μ ثابت موجب.

الحل: يمكن كتابة المعادلة المعطاه على الصورة

$$x_1=x\ ,\ \dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-x_1+\mu(1-x_1^2)x_2$$

نلاحظ أن نقطة الأصل هى نقطة الإتزان الوحيدة وبجوار هذه النقطة يكون النظام الخطى المناظر

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & \mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

ويكون جذرا المعادلة المساعدة

$$\lambda_{1,2}=[\mu\pm\sqrt{\mu^2-4}]/2$$

وتكون نقطة الأصل غير مستقرة لوليبا إذا كان $0<\mu<2$ وتكون عقدة غير مستقرة إذا كان $\mu \geq 2$. نلاحظ أنه إذا كانت $\mu = 0$ فتكون نقطة الأصل مركز ويكون الحل دوريا ولتطبيق نظرية بندكس، نحسب

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(-x_1 + \mu(1-x_1^2)) = \mu(1-x_1^2)$$

وحيث أن $(1-x_1^2)$ يمكن أن تغير اشارتها فهذا يعنى أن وجود حل دورى ممكن. ولتأكيد هذا الوجود نطبق نظرية بوانكاريه – بندكس. وبالتحويل إلى الاحداثيات القطبية نجد ان النظام (4) يؤول إلى

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu(1-r^2\cos^2\theta)r\sin^2\theta, \\ \dot{\theta} &= -1+\mu(1-r^2\cos^2)\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \tag{9}$$

ونعتبر المنطقة R محصورة بالدوائر $r=\varepsilon(<1)$ ، $r=K\,(K>1)$ وبالقرب من الدائرة $r=\varepsilon$، $\dot{r}$ موجبة أو صفر (على المحور $\theta=0,\pi$) وأن الحل الذى يبدأ قريبا من $r=\varepsilon$ يبتعد عن الدائرة بينما بالقرب من الدائرة $r=K$، $\dot{r}$ تكون سالبه ما عدا على المحور $\theta=0,\frac{\pi}{2},\pi=\frac{3\pi}{2}$. وعلى $\theta=0,\pi$ تكون $\dot{r}$ صفر ولكن على $\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ تكون $\dot{r}$ موجبة. وبالمسارات التى تبدأ بالقرب من $r=K$ تتحرك إلى الداخل فى R ما عدا على $\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ حيث أنها تبتعد عن R. لهذا الاختيار للمنطقة R لايمكن تطبيق نظرية بوانكاريه – بندكس. وتوجد نظرية أخرى لاثبات وجود حل دورى لهذه المعادلة وهى.

نظرية (٣): يكون للمعادلة التفاضلية

(معادلة لينارد) $\quad \ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$

حلا دوريا وحيد إذا كان

(i) f ، g متصلتان $\quad$ (ii) $F(x)=\int_0^x f(\xi)d\xi$ دالة فردية

(iii) $F(x)=0$ عند $x=0$ ، $x=\pm a$

(iv) $F(x)\to\infty$ باطراد لكل $x>a$

(v) $g(x)$ دالة فردية $g(x)>0$ لكل $x>0$

٥-١٥ نظرية فلوكيه Floquet's Theorem

ليكن لدينا النظام الخطى غير الذاتى

$$\dot{\underline{x}} = A(t)\underline{x} \qquad (1)$$

حيث $A(t)$ مصفوفة $n\times n$ وعناصرها دوال متصلة فى T سوف نحدد تحت أى شروط يكون للنظام حل دورى إذا كانت $A(t)$ مصفوفة دورية (أى كل عناصرها دوال دورية) وقبل دراسة ذلك سوف ندرس معادلة خطية من الرتبة الأولى ونعتبر باختصار حل النظم الخطية المعادلات التفاضلية.

مثال (١): اوجد الحل الدورى للمعادلات التالية:

(i) $\dot{x} = (\tan t)x$, (ii) $\dot{x} = (\cos^2 t)x$

الحل:

(i) يمكن كتابة المعادلة (1) على الصورة

$$\frac{d}{dt}(x\cos t) = 0$$

ويكون حلها

$$x\cos t = c_0 \;\Rightarrow\; x = c_0 \sec t$$ ، حيث c_0 ثابت

وهذا الحل دورى

(ii) يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{dx}{x} = \cos^2 t\, dt \;\Rightarrow\; x = c_0 \exp\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]$$

حيث c_0 ثابت. نلاحظ أن الحل ليس دوريا

ملحوظة (١): ليس من الضرورى أن يكون للمعادلة التفاضلية ذات المعاملات الدورية حلا دورياً.

ليكن $\underline{\phi}_i$ حلا للنظام (1) وبالتالى فإن

$$\underline{\phi}'_i = A\underline{\phi}_i \quad (2)$$

حيث المتجه $\underline{\phi}_i$ له n من العناصر $\{\phi_{i1}, \phi_{i2}, \ldots, \phi_{in}\}$ ويوجد n من المتجهات $\underline{\phi}_i$ ، $i = 1, 2, \ldots, n$ التى تحقق المعادلة (2) فإذا كانت هذه المتجهات مستقلة خطياً فإن الحل العام $\underline{x}$ للمعادلة (1) تعطى على الصورة

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} c_1 \underline{\phi}_i$$

حيث c_i ثوابت

تسمى الحلول $\underline{\phi}_i$ بالحلول الأساسية وتسمى المصفوفة

$$\Phi = \left[\underline{\phi}_1 \quad \underline{\phi}_2 \cdots \underline{\phi}_n\right] = \begin{bmatrix} \underline{\phi}_{11} & \underline{\phi}_{12} \cdots \underline{\phi}_{1n} \\ \underline{\phi}_{21} & \underline{\phi}_{22} \cdots \underline{\phi}_{2n} \\ \underline{\phi}_{n1} & \underline{\phi}_{n2} \cdots \underline{\phi}_{nn} \end{bmatrix}$$

بالمصفوفة الأساسية ويسمى $|\Phi|$ بالرونسكى W.

ويلاحظ أن

$$\dot{\Phi} = A\Phi \quad (3)$$

ويكون الحل العام للنظام (1) هو

$$\underline{x} = \Phi\underline{c} \quad (4)$$

حيث c متجه ثابت. بافتراض ان الشروط الابتدائية هى $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$

ويكون لدينا من المعادلة (4)

$$\underline{c} = [\Phi(0)]^{-1}\underline{x}_0$$

ويكون الحل العام

$$\underline{x} = \Phi(t)][\Phi(0)]^{-1}\underline{x}_0 \qquad (5)$$

والعلاقة بين $W(t), W(0)$ هى

$$W(t) = W(0)\exp[\int_0^t trA(s)ds] \qquad (6)$$

المعادلة (6) هى صيغة ليوفيل (Liouville) السابق شرحها

ملحوظة (٢): إذا كان $\underline{\phi}_1$، $\underline{\phi}_2$ حلين أساسين للنظام (1) فإنه $\underline{\phi}_1$ ، $(\alpha_1\underline{\phi}_1 + \alpha_2\underline{\phi}_2)$ يكون حلا ايضاً للنظام (1) حيث α_1، α_2 ثابتان.

إذا كان Φ_1، Φ_2 مصفوفتين أساسيتين للنظام (1) فإن

$$\Phi_1(t) = \Phi_2(t)\underline{C} \qquad (7)$$

حيث $\underline{C}$ مصفوفة ثابتة غير شاذة.

العلاقة (٧) تنتج من كون Φ_2 هى تركيبة خطية من Φ_1.

والأن يمكن أن ننص ونبرهن نظرية فلوكيه

نظرية (١): نظرية فلوكيه

إذا كانت $A(t)$ فى (1) مصفوفة دورية لها الدورة T (أى $A(t+T) = A(t)$) فإنه يوجد على الأقل حل واحد $\underline{x}(t)$ بحيث

$$x(t+T) = \lambda\underline{x}(t) \qquad (8)$$

حيث λ ثابت

البرهان: ليكن $\Phi(t)$ مصفوفة أساسية للنظام (1). وحيث أن $A(t+T) = A(t)$، $\Phi(t+T)$ تحقق (1) فإن $\Phi(t+T)$ تكون مصفوفة غير شاذه وبذلك يكون $\Phi(t+T)$ حل أساسى للنظام (1) وعلى ذلك

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C \quad , \qquad |\Phi(t+T)| \neq 0 \qquad (9)$$

ليكن λ، $\underline{v}$ هما القيمة الذاتية والمتجه الذاتى المناظر للمصفوفة C. فيكون من التعريف

$$C\underline{v} = \lambda\underline{v} \tag{10}$$

ليكن الحل $\underline{x}(t)$ معطى بالعلاقة

$$\underline{x}(t) = \Phi\underline{v}$$

فعند الزمن $t+T$ يكون لدينا

$$\underline{x}(t+T) = \Phi(t+T)\underline{v} = \Phi(t)C\underline{v}$$
$$= \Phi(t)\lambda\underline{v} = \lambda\Phi(t)\underline{v} = \lambda\underline{x}(t)$$

وبهذا يتم البرهان.

عموما المصفوفة C لها القيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ وهذه القيم الذاتية تكون هى المضاريب (multipliers) الذاتية للنظام ويمكن كتابة

$$\lambda_s = \exp(r_s T), s = 1, 2, ..., n \tag{11}$$

الأعداد r_s هى المضاريب الذاتية أو الأسس الذاتية (characteristic exponent) للنظام (1) نلاحظ أن $\exp(2\pi i)$ يساوى واحد ويلى ذلك أن λ_s تعيين إلى $2\pi i / T$.

ملحوظة (٣): النظام (1) مع $A(t)$ التى لها الدورة T يكون له حل دوري إذا وفقط إذا كان λ_s يساوى واحد (أو أحد r_s يساوى الصفر). إذا كان λ_s يساوى 1- يكون لدينا حلاً دوريا له الدورة $2T$.

لتطبيق نظرية فلوكيه يجب معرفة Φ لكى نحدد C وهذا ليس ممكنا دائما. ومن النقاش السابق يكون لدينا

$$W(t) = W(0)\det C$$

$$\det \underline{C} = \exp\int_0^T trA(s)ds$$

وحاصل ضرب $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ يعطى بالعلاقة

$$\lambda_1\lambda_2, ..., \lambda_n = \det C = \exp\int_0^T trA(s)ds \tag{12}$$

وهذه المعادلة الأخيرة تكون مفيدة إذا كان أحد القيم الذاتية يساوى واحد.

نظرية (٢): للنظام $\dot{\underline{x}} = A(t)\underline{x}$ حيث $A(t+T) = A(t)$، ليكن الأعداد المميزة $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ فإن

$$\lambda_1 \lambda_2, ..., \lambda_n = \exp(\int_0^T tr\, A(s) ds$$

لخذين فى الاعتبار الأعداد المميزة المكررة.

البرهان: ليكن $\Psi(t)$ المصفوفة الأساسية للنظام حيث $\Psi(0) = I$ وحيث أن من نظرية فلوكيه $\Psi(t) = \Psi(0)E = E$. ونعرف أن الأعداد المميزه λ_i هى القيم الذاتية للمصفوفة E، أى

$$\det[E - \lambda I] = 0 \qquad \text{(A)}$$

وهى كثيرة حدود من درجة n ويكون حاصل ضرب الجذور يساوى الحد الثابت أى يساوى القيمة الناتجه من وضع $\lambda = 0$ فى المعادلة (A)، أى أن

$$\lambda_1 \lambda_2, ..., \lambda_n = \det(E) = \det \Psi(T) = W(T)$$

وعلى ذلك يكون لدينا

$$W(t) = W(0) = \int_0^T tr\, A(s) ds,$$

مثال (٢): اوجد المصفوفة الأساسية للنظام

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}\ ,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \dfrac{\cos t + \sin t}{2 + \sin t - \cos t} \end{bmatrix} \qquad (13)$$

ثم حدد القيم الذاتية – الأسس الذاتية – وجود الحلول الدورية.

الحل: تكون المعادلة بالنسبة إلى x_2 هى

$$\frac{dx_2}{dt} = \left[\frac{\cos t + \sin t}{2 + \sin t - \cos t}\right] x_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_2}{x_2} = \left(\frac{\cos t + \sin t}{2 + \sin t - \cos t}\right) dt$$

ومنها نجد أن

$$x_2 = c_1(2+\sin t - \cos t)$$

حيث c_1 ثابت ويكون معادلة x_1 هي

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 = x_1 + c_1(2+\sin t - \cos t)$$

ويكون حلها هو

$$x_1 = -c_1(2+\sin t) + c_2 e^t$$

حيث c_2 ثابت. وتكون المصفوفة الأساسية

$$\Phi = \begin{bmatrix} -(2+\sin t) & e^t \\ 2+\sin t - \cos & 0 \end{bmatrix}$$

ومصفوفة المعاملات A لها الدورة 2π. نوجد قيم $\phi(2\pi), \phi(0)$ وهما

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi(2\pi) = \begin{bmatrix} -2 & e^{2\pi} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

فيكون المصفوفة الثابتة C هي

$$C = [\Phi(0)]^{-1}\Phi(2\pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi} \end{bmatrix}$$

والقيم الذاتية لها تعطى بالعلاقة

$$\begin{bmatrix} i-\lambda & 0 \\ 0 & e^{2\pi}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

وهي $\lambda_1 = 1$ ، $\lambda_2 = e^{2\pi}$ وتكون الأسس الذاتية هي $1, 0$. وحيث أن أحد القيم الذاتية يساوى واحد (مناظر للأس الذاتى صفر) فإنه يكون للنظام حل دورى. والحل الدورى طبقا لكون $c_1 \neq 0$، $c_2 = 0$ وهو على الصورة.

$$\underline{\phi}_1 = \begin{bmatrix} -(2+\sin t) \\ 2+\sin t - \cos t \end{bmatrix}$$

مثال (٢): ادرس معادلة هيل (Hill's)

نعتبر المعادلة التفاضلية

$$\ddot{x} + p(t)x = 0 \tag{14}$$

حيث p دالة دورية لها الدورة π. نختار المصفوفة الأساسية $\Phi(t)$ بحيث أن

$$\Phi(0) = I \tag{15}$$

حيث I مصفوفة الوحدة. ماهى الشروط على $\Phi(\pi)$ بحيث يكون للمعادلة (14) حلا دوريا.؟

ملحوظة (٤): معادلة هيل (23) تحدث عادة فى الاهتزازات والدوائر الكهربية أما فى معادلة ماثيو (Mathieu) تكون فيها $p(t) = \delta + \varepsilon\cos 2t$ حيث δ ، ε ثوابت

الحل: يمكن كتابة (14) على صورة نظام

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{\dot{x}} = A\underline{x} \tag{16}$$

حيث $x_2 = \dot{x}_1$ ، $x_1 = x$. نعلم أن

$$\underline{C} = \Phi^{-1}(t)\Phi(t+T)$$

وعند $t = 0$ ، $T = \pi$ يكون

$$C = I\,\Phi(\pi) = \Phi(\pi)$$

وعلى ذلك نحصل على القيم الذاتية للمصفوفة C من

$$\begin{bmatrix} \phi_{11}(\pi) - \lambda & \phi_{12}(\pi) \\ \phi_{21}(\pi) & \phi_{22}(\pi) - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - [\phi_{11}(\pi) + \phi_{22}(\pi)]\lambda + \det\Phi = 0 \tag{17}$$

ومن المعادلتين (12)، (17) مع ملاحظة أن $trA = 0$ نجد أن

$$\lambda_1\lambda_2 = 1\,, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \phi_{11}(\pi) + \phi_{22}(\pi) \tag{18}$$

والشرط لكى يكون للمعادلة (14) حلا دوريا له الدورة π هو إما λ_1 أو λ_2 تساوى واحد إذا كان $\lambda_1 = 1$ فيلى ذلك أن $\lambda_2 = 1$. ومن (18) نستنتج أن الشرط على $\phi(\pi)$ لوجود حل دورى له دورة π هو $tr\phi(\pi) = 2$ ويكون للمعادلة (14) حلا دوريا له الدورة 2π إذا كان

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \quad tr\phi(\pi) = -2$$

ويمكن التأكد من النتائج باختبار $p(t)$ ثابتاً وهى دورية ذات دورة اختيارية.

نعتبر حالتين للدالة $p(t)$

(أ) $p(t) = 1$ يكون لدينا حلين أساسيين

$$\underline{\phi}_1 = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}, \quad \underline{\phi}_2 = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \tag{19}$$

وبالتالى

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$$\Phi(0) = I, \qquad \Phi(\pi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ويكون $tr\phi(\pi) = -2$ وبذلك يكون الحل دوريا وله الدورة 2π كما هو معطى فى (19)

(ب) $p(t) = 4$ يكون الحلين الاساسين هما

$$\underline{\phi}_1 = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{bmatrix}, \quad \underline{\phi}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix}$$

ونكون المصفوفة الاساسية

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t & \frac{1}{2}\sin 2t \\ -2\sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}$$

وبذلك يكون

$$\phi(0)=I\ ,\qquad \phi(\pi)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

وفى هذه الحالة يكون $tr\Phi(\pi)$ يساوى 2 ويكون الحل دورى وله الدورة π.

نظرية (٣): إذا كانت Φ مصفوفة أساسية للنظام (1) فإنه تكون Ψ كذلك حيث

$$\Psi(t)=\Phi(t+T),\qquad -\infty<t<\infty \tag{20}$$

يوجد مصفوفة دورية غير شاذه $P(t)$ طبقا لكل $\Phi(t)$ ذات دورة T ومصفوفة ثابتة R بحيث أن

$$\Phi(t)=P(t)e^{tR} \tag{21}$$

البرهان: حيث Φ مصفوفة اساسية للنظام (10) يكون لدينا

$$\Phi'(t)=A(t)\Phi(t)$$

ومن (20 يكون لدينا

$$\begin{aligned}\Psi'(t)&=\Phi'(t+T)=A(t+T)\Phi(t+T)\\ &=A(t)\Phi(t+T)\end{aligned}$$

وعليه فإن $\Psi(t)$ هى مصفوفة الحل للنظام (1) وهى أيضاً مصفوفة أساسية للنظام (1) حيث $\det(\Psi(t))=\det(\Phi(t+T))\neq 0$ لكل $-\infty<t<\infty$. وبالتالى يوجد مصفوفة غير شاذه C بحيث أن

$$\Phi(t+T)=\Phi(t)C \tag{22}$$

ويوجد مصفوفة ثابتة R بحيث أن

$$C=e^{TR} \tag{23}$$

ومن (22)، (23) نحصل على

$$\Phi(t+T)=\Phi(t)e^{TR} \tag{24}$$

ليكن $P(t)$ مصفوفة معرفة بالعلاقة

$$P(t)=\Phi(t)e^{-tR} \tag{25}$$

فيكون لدينا

$$\begin{aligned}P(t+T)&=\Phi(t+T)e^{-(t+T)R}\\&=\Phi(t)e^{TR}e^{-(t+T)R}=\Phi(t)e^{-tR}=P(t)\end{aligned}$$

وحيث أن $\Phi(t)$ ، e^{-tR} غير شاذتين لكل $-\infty<t<\infty$ وبالتالى تكون $P(t)$ كذلك.

ملحوظة: إذا كان $\Phi_1(t)$ مصفوفة أساسية أخرى للنظام (1) بحيث تتحقق $A(t+T)=A(t)$ فإن $\Phi(t)=\Phi_1 M$ ، حيث M مصفوفة ثابتة غير شاذه.

ومن هذه الملاحظة ومن (24) يكون لدينا

$$\Phi_1(t+T)M=\Phi_1(t)Me^{TR}$$

أى أن

$$\Phi(t+T)=\Phi_1(t)Me^{TR}M^{-1} \tag{26}$$

وهذا يعنى أن كل مصفوفة أساسية Φ_1 للنظام (1) تعين مصفوفة $Me^{TR}M^{-1}$ وهى مشابهه (similar) إلى e^{TR}. وعلى العكس إذا كانت M مصفوفة ثابتة غير شاذه فإن يوجد مصفوفة أساسية Φ_1 للنظام (1) بحيث تتحقق العلاقة (٢٦) . والمصفوفة غير الشاذه C المصاحبة مع المصفوفة الأساسية $\Phi(t)$ للنظام (10) من خلال (٢٢) تسمى مصفوفة أحادية (monodromy) للنظام (1).

١٥-٦ تقريب الحلول الدورية (طريقة كريلوف و بوجوليوبوف)

Kryloff and Bogliuboff

فى هذا الجزء نريد أن نوجد حل دورى تقريبى للمعادلة غير الخطية

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x+\mu f\left(x,\frac{dx}{dt}\right)=0 \qquad (1)$$

حيث μ بارامتر صغيراً صغراً كافياً وبالتالى فإن الحد غير الخطى $\mu f\left(x,\frac{dx}{dt}\right)$ صغير نسبياً. وهذه الطريقة ما هى إلا طريقة تغير البارامترات.

إذا كان $\mu=0$ فى المعادلة (1) فإنها تأخذ الصورة

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \qquad (2)$$

ويكون حلها الدورى هو

$$x=a\sin(\omega t+\phi) \qquad (3)$$

حيث a، ϕ ثابتان. وتكون مشتقة الحل x هو

$$\frac{dx}{dt}=a\omega\cos(\omega t+\phi) \qquad (4)$$

إذا كان $\mu\neq 0$ وصغيرة صغراً كافياً (أى $|\mu|<<1$) نفترض أن المعادلة غير الخطية (1) لها حل فى الصورة (3) مع مشتقة على الصورة (4) بشرط أن تكون a، ϕ دوال فى t وليست ثوابت لذلك نفترض أن حل (1) هو

$$x=a(t)\sin(\omega t+\phi(t)) \qquad (5)$$

حيث a، ϕ دوال يراد تعيينهما بحيث أن مشتقة الحل (5) يكون على الصورة

$$\frac{dx}{dt}=\omega a(t)\cos(\omega t+\phi(t)) \qquad (6)$$

باشتقاق الحل (5) نحصل على

$$\frac{dx}{dt}=\omega a(t)\cos[\omega t+\phi(t)]+a(t)\frac{d\phi}{dt}\cos(\omega t+\phi(t))$$
$$+\frac{da}{dt}\sin(\omega t+\phi(t)) \qquad (7)$$

ولكي يكون dx/dt فى الصورة المطلوبة (6) فإننا نرى من (7) أنه يجب أن يكون

$$a(t)\frac{d\phi}{dt}\cos(\omega t+\phi(t))+\frac{da}{dt}\sin(\omega t+\phi(t))=0 \qquad (8)$$

والأن باشتقاق (6) نحصل على

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2a(t)\sin(\omega t+\phi(t))-\omega a(t)\frac{d\phi}{dt}\sin(\omega t+\phi(t))+$$
$$+\omega\frac{da}{dt}\cos(\omega t+\phi(t) \qquad (9)$$

بتعويض الحل (5) والمشتقة الأولى (6) والمشتقة الثانية (9) فى المعادلة التفاضلية (1) نحصل على

$$-\omega^2a(t)\sin[\omega t+\varphi(t)]-\omega a(t)\frac{d\phi}{dt}\sin[\omega t+\varphi(t)]+$$
$$+\omega\frac{da}{dt}\cos[(\omega t+\varphi(t)]+\omega^2a(t)\sin[(\omega t+\varphi(t)]$$
$$+\mu f\{at\sin[\omega t+\varphi(t)],\omega a(t)\cos[\omega t+\varphi(t)]\}=0$$

أو

$$\omega\frac{da}{dt}\cos[\omega t+\varphi(t)]-\omega a(t)\frac{d\phi}{dt}\sin[\omega t+\varphi(t)]=-\mu f\{\omega t+\varphi(t)\} \qquad (10)$$

ليكن $\theta(t)$ ترمز إلى $\omega(t)+\phi(t)$ فإن المعادلات (8)، (10) يمكن كتابتها على الصورة

$$\sin\theta(t)\frac{da}{dt}+a(t)\cos\theta(t)\frac{d\phi}{dt}=0$$

$$\omega\cos\theta(t)\frac{da}{dt}-\omega a(t)\sin\theta(t)\frac{d\phi}{dt}=-\mu f\,[a(t)\sin\theta(t),\omega a(t)\cos\theta(t)] \tag{11}$$

بحل المعادلات (11) فى كل من $\frac{da}{dt}$ ، $\frac{d\phi}{dt}$ فإن نحصل المعادلات التالية

$$\frac{da}{dt}=\frac{-\mu}{\omega}f\,[a(t)\sin\theta(t),\omega a(t)\cos\theta(t)]\cos\theta(t),$$

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{-\mu}{\omega a(t)}f\,[a(t)\sin\theta(t),\omega a(t)\cos\theta(t)]\sin\theta(t) \tag{12}$$

وهما المعادلتان للدالتين a، ϕ فى الحل على الصورة (5) مع المشتقة (6) ونلاحظ أنهما معادلات غير خطية وغير ذاتية وبالتالى معقدة. وللتغلب على ذلك سنلجأ إلى طريقة التقريب الأول لطريقة كريلوف – بوجوليوبوف .

من المعادلات (12) نرى أن $\frac{da}{dt}$ ، $\frac{d\phi}{dt}$ يتناسبان مع البارامتر الصغير μ. وبالرغم من a، ϕ دالتين فى t فإنهما دوال تتغير ببطء خلال الدورة (period) $T=2\pi/\omega$ للمتغير t. أى أن فى الفترة الزمنية التى طولها $2\pi/\omega$ فإن $\phi(t),a(t)$ يكونا تقريبا ثابتان غالبا بينما $\theta(t)=\omega t+\phi(t)$ تزداد بقيمة 2π تقريباً. وبالتالى فإن الطرف الأيمن فى (12) ننظر إلى $\phi(t),a(t)$ كثابتين خلال فترة 2π فى θ. ونحل الدوال فى الطرف الأيمن من (12) بمتوسط (mean) قيمهما على فترة θ. وهذا يؤدى إلى المعادلتين:

$$\frac{da}{dt}=\frac{-\mu}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}f\,(a\sin\theta,\omega\cos\theta)\cos\theta d\theta$$

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{\mu}{2\pi\omega a}\int_0^{2\pi}f\,(a\sin\theta,\omega\cos\theta)\sin\theta d\theta \tag{13}$$

وهاتان المعادلتان هما التقريب الأول الخاص لكريلوف– بوجوليوبوف للدالتين a، ϕ من الحل (5) وعليه فإن التقريب الأول لحل للمعادلة (1) يعطى بالعلاقة

$$x = a(t)\sin(\omega t + \phi(t)) \qquad (14)$$

حيث a، ϕ يعينان من المعادلة (13)

حالات خاصة:

(i) الحالة الأولى: الحد $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ يعتمد على x .

فى هذه الحالة تؤول المعادلة (1) إلى

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x + \mu f(x) = 0 \qquad (15)$$

فإن $f(a\sin\theta, \omega a\cos\theta)$ تصبح ببساطه $f(a\sin\theta)$ وأن المعادلة (13) تختزل إلى

$$\frac{da}{dt} = \frac{-\mu}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f(a\sin\theta)\cos\theta d\theta$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu}{2\pi\omega a}\int_0^{2\pi} f(a\sin\theta)\sin\theta d\theta \qquad (16)$$

نعتبر التكامل فى الطرف الأيمن فى المعادلة الأولى فى (16) بوضع $u = a\sin\theta$ فيكون لدينا

$$\int_0^{2\pi} f(a\sin\theta)\cos\theta d\theta = \frac{1}{a}\int_0^0 f(u)du = 0$$

وعلى ذلك نرى أن المعادلة الأولى فى (16) تؤول إلى $\frac{da}{dt} = 0$ وبالتالى فإن السعة (amplitude) $a(t)$ تكون ثابتا a_0.

المعادلة الثابتة فى (16) تختزل إلى

$$\frac{d\phi}{dt} = F(a_0) \qquad (17)$$

حيث

$$F(a_0)=\frac{\mu}{2\pi\omega a_0}\int_0^{2\pi} f(a_0\sin\theta)\sin\theta d\theta \tag{18}$$

وعلى ذلك من (17) تكون $\phi(t)=F(a_0)\,t+\phi_0$، حيث ϕ_0 هى ثابت التكامل. وبالتالى التقريب الأول للحل (15) تعطى بالمعادلة

$$x=a_0\sin\{[F(a_0)+\omega]t+\phi_0\} \tag{19}$$

حيث الثابت $F(a_0)$ يعطى بالعلاقة (18).

وعلى ذلك فإن الحالة الخاصة (15) التى يعتمد فيها الحد غير الخطى $f(x)$ على x فقط (وليس على $\frac{dx}{dt}$) يكون التقريب الأول للحل تذبذبياً دورياً ودورته تعتمد على السعه.

(ii) **الحالة الثانية:** الحد $f\left(x,\frac{dx}{dt}\right)$ يعتمد فقط على $\frac{dx}{dt}$.

فى هذه الحالة نأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x+\mu f\left(\frac{dx}{dt}\right)=0 \tag{20}$$

وبالتالى $f(a\sin\theta,\omega a\cos\theta)$ تصبح ببساطه $f(\omega a\cos\theta)$ وأن المعادلة (16) تؤول إلى

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=-\frac{\mu}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f(\omega a\cos\theta)\cos\theta d\theta\\ \frac{d\phi}{dt}&=\frac{\mu}{2\pi\omega a}\int_0^{2\pi} f(\omega a\cos\theta)\sin\theta d\theta\end{aligned} \tag{21}$$

بوضع $u=\omega a\cos\theta$ فى التكامل الثانى فى (21) نجد أن

$$\int_0^{2\pi} f(\omega a\cos\theta)\cos\theta d\theta=-\frac{1}{\omega a}\int_{wa}^{wa} f(u)du=0$$

وعلى ذلك من المعادلة الثانية فى (21) نرى أن $\frac{d\phi}{dt}=0$ وبالتالى فإن $\phi(t)$ تكون ثابتاً أى ϕ_0. وعلى ذلك فإن التقريب الأول للحل (20) يعطى بالعلاقة

$$x = a(t)\sin(wt + \phi_0) \tag{22}$$

حيث $a(t)$ تعطى بالتقريب الأول للمعادلة (21) وبالتالى فإن الحالة الخاصة (20) الذى فيها الحد غير الخطى $f(dx/dt)$ يعتمد فقط على $\frac{dx}{dt}$ (وليس على x)، فإن التقريب الأول للحل تذبذبى غير دورى للمتغير (السعة) a التى لها نفس التردد $\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ مثل التى لها للحل (3) للمسألة الخطية (2).

مثال (١): اعتبر المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x+\mu x^3=0 \tag{23}$$

حيث μ بارامتر صغير. هنا $f\left(x,\frac{dx}{dt}\right)=f(x)=x^3$ وبالتالى تكون المعادلة (23) تكون حالة خاصة من (15).

حيث أن الحد غير الخطى يعتمد على x فقط والتالى فإن التقريب الأول لحل المعادلة (23) يعطى الصورة (19) حيث $F(a_0)$ تحدد بالمعادلة (18). وحيث أن $f(a_0\sin\theta)=a_0^3\sin^3\theta$ فإننا نرى من (18) أن

$$F(a_0)=\frac{\mu}{2\pi\omega a_0}\int_0^{2\pi} a_0^3\sin^3\theta\sin\theta d\theta=\frac{\mu a_0^2}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}\sin^4\theta d\theta=\frac{\mu a_0^2}{2\pi\omega}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{3\mu a_0^2}{8\omega}$$

وبالتالى فإن التقريب الأول لحل المعادلة (23) يعطى بالعلاقة

$$x=a_0\sin\left[\left(\frac{3\mu a_0^2}{8\omega}+\omega\right)t+\phi_0\right]$$

حيث a_0 (السعة)، ϕ_0 ثوابت إختيارية. نلاحظ ان الدورة (period) تساوى

$2\pi/\left(\frac{3\mu a_0^2}{8\omega}+\omega\right)$ للتذبذب (24) هى دالة فى السعة.

مثال (٢): اعتبر المعادلة

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x+\mu\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx}{dt}\right)^3\right]=0$$

حيث μ بارامتر صغير. هنا

$$f\left(x,\frac{dx}{dt}\right)=f\left(\frac{dx}{dt}\right)=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx}{dt}\right)^3$$

وبالتالى تكون المعادلة (25) لحالة خاصة من المعادلة (20) حيث الحد غير الخطى يعتمد على $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ فقط وبالتالى يكون التقريب الأول لحل المعادلة (25) يعطى بالصيغة (22) حيث السعة $a(t)$ تحدد من المعادلة الأولى من (21). وحيث أن

$$f(\omega a\cos\theta)=\omega^2 a^2\cos^2\theta+\omega^3 a^3\cos^3\theta$$

وتكون المعادلة هى

$$\frac{da}{dt}=-\frac{\mu}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}(\omega^2 a^2\cos^2\theta+\omega^3 a^3\cos^3\theta)\cos\theta d\theta$$

$$\frac{da}{dt}=-\frac{\mu\omega a^2}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\cos^3\theta d\theta+\omega a\int_0^{2\pi}\cos^4\theta d\theta\right]$$

وحيث أن

$$\int_0^{2\pi}\cos^3\theta d\theta=0,\int_0^{2\pi}\cos^4\theta d\theta=\frac{3}{4}\pi$$

فإن هذه الصيغة تختزل إلى

$$\frac{da}{dt}=-\mu\omega^3 a^3/8 \qquad (26)$$

بفصل المتغيرات فى (26) وبالتكامل نحصل على

$$\frac{1}{2a^2}=\frac{3\mu\omega^2}{8}t+c$$

حيث c ثابت لختيارى. إذا كان $a(0)=a_0$ فإن $c=1/2a_0^2$ فيكون لدينا

$$\frac{1}{2a^2}=\frac{3\mu\omega^2}{8}t+\frac{1}{2a_0^2}$$

وبالتالى

$$a=2\sqrt{\frac{a_0^2}{4+3\mu\omega^2 a_0^2 t}}$$

وبالتالى فإن التقريب الأول لحل المعادلة (25) يعطى بالعلاقة

$$x=2\sqrt{\frac{a_0^2}{4+3\mu\omega^2 a_0^2 t}}.\sin(\omega t+\phi_0)$$

بافتراض $\mu>0$ فإن سعة هذا التنبذب تؤول إلى الصفر عندما $t\to\infty$

مثال (٣): ليكن لدينا المعادلة

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mu(x^2-1)\frac{dx}{dt}+x=0 \qquad \text{(A)}$$

حيث $0<\mu<<1$. هذه المعادلة ليست من الحالات الخاصة (15) أو (20) حيث أنها فى الصورة العامة من (1) حيث $\omega^2=1$

$$f\left(x,\frac{dx}{dt}\right)=(x^2-1)\frac{dx}{dt} \qquad \text{(B)}$$

وعلى ذلك فإن التقريب الأول لحل (B) يعطى بالعلاقة (5) حيث $a(t)$، $\phi(t)$ تحدد من المعادلات (13) حيث $\omega=1$. وحيث أن

$$f(a\sin\theta,a\cos\theta)=(a^2\sin^2\theta-1)a\cos\theta$$

وتصبح المعادلات على الصورة

$$\frac{da}{dt}=-\frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi}(a^2\sin^2\theta-1)a\cos^2\theta d\theta$$

$$\frac{da}{dt}=\frac{\mu}{2\pi a}\int_0^{2\pi}(a^2\sin^2\theta-1)a\cos\theta\sin\theta d\theta$$

وحيث أن

$$\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta=\frac{\pi}{4},\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\cos\theta d\theta=0,\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta=0$$

فإن هذه المعادلات تختزل إلى

$$\frac{da}{dt}=\frac{\mu a}{2}\left(1-\frac{a^2}{4}\right)\ ,\quad \frac{d\phi}{dt}=0 \qquad (27)$$

من المعادلة الثانية فى (27) نرى أن $\phi(t)=\phi_0$ تساوى ثابت. وبالتالى من (5) يكون التقريب الأول للحل هو

$$x(t)=a(t)\sin(t+\phi_0)$$

حيث $a(t)$ نحصل عليها من المعادلة الأولى فى (27). وبفصل المتغيرات نجد أن

$$\frac{da}{a(a^2-4)}=-\frac{\mu}{8}dt$$

وبالتكامل

$$\frac{a^2-4}{a^2}=ce^{-\mu t}\quad\Rightarrow\qquad a^2=\frac{4}{1-ce^{-\mu t}}$$

إذا كان $a(0)=a_0>0$ فإن $c=(a_0^2-4)/a_0^2$ وبالتالى

$$a^2=\frac{4}{1-\left(\frac{a_0^2-4}{a_0^2}\right)e^{-\mu t}}=a_0^2e^{\mu t}/1+\frac{a_0^2}{4}(e^{\mu t}-1)$$

وبالتالى يكون التقريب الأول للمعادلة B يعطى بالعلاقة

$$x=\left[a_0e^{\mu t/2}/\sqrt{1+\frac{a_0^2}{4}(e^{\mu t}-1)}\right]\sin(t+\phi_0) \qquad (29)$$

حيث a_0 هى القيمة الأبتدائية للسعة.

إذا كان $a_0=2$، فإن التقريب الأول للحل (29) يختزل إلى الحل الدورى المعرف بالعلاقة

$$x=2\sin(t+\phi_0) \qquad (30)$$

ذا سعة ثابتة 2.

إذا كان $0<a_0<2$ أو إذا كان $a_0>2$ نرى ألأن

$$\lim_{t\to\infty}a(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{a_0e^{\mu t/2}}{\sqrt{1+\frac{a_0^2}{4}(e^{\mu t}-1)}}=2$$

وبالتالى لأى قيمة محدودة $a_0>0$ ما عدا $a_0=2$ فإن التذبذب غير الدورى يعطى بالعلاقة (29) الذى يؤول إلى التذبذب الدورى يعطى بالعلاقة (30) عندما $t\to\infty$.

ويجب أن نتذكر أن العلاقة (29) هى فقط تقريب أول للحل المضبوط (exact) للمعادلة (B). وبالتالى الملاحظات السابقة تعطى تقريباً أول للحل.

تمارين

١- اثبت أن حل النظام

$$x' = xy^2 - \frac{x^3}{2}, \quad y' = -\frac{y^2}{2} = \frac{x^2 y}{2}$$

يكون مستقراً تقاربياً.

٢- أثبت أن الحل الصفرى للنظام

$$\dot{x} = -6x^2 y, \quad \dot{y} = -3y^2 + 6x^2$$

مستقر.

٣- ادرس استقرار النظم

(i) $x' = y - x(y^2 \sin^2 x), \quad y' = -x - y(y^2 \sin^2 x)$

(ii) $x' = y - x(x^4 + y^6), \quad y' = -x - y(x^4 + y^6)$

(ii) $x' = y - x(\sin^2 y), \quad y' = -x - y(\sin^2 y)$

٤- اثبت أن النظم التالية ليس لها حلولا دورية

(i) $\dot{x}_1 = x_1^3 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_2^3$

(ii) $\dot{x}_1 = x_1(x_2 - 1), \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2^2/2$

(iii) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_2(1 + x_1^2) + x_1^3$

(iv) $\ddot{x} + b(x^2 + 1)\dot{x} + cx = 0$

٥- حول النظام التالى إلى الإحداثيات القطنية

$$\dot{x}_1 = 4x_1 + 4x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -4x_1 + 4x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

واثبت أن للنظام حلا دوريا. ثم أوجد هذا الحل.

٦- اثبت أم معادلة ماثيو (Mathieu)

$$\ddot{x} + (\delta + \varepsilon \cos 2t)x = 0$$

يمكن كتابتها على الصورة

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\delta - \varepsilon \cos 2t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ثم استنتج أن المضاريب (الأسس) الذاتية λ_1 ، λ_2 هما جذرا

$$\lambda^2 - \phi(\delta, \varepsilon) + 1 = 0$$

حيث $\phi(\delta, \varepsilon)$ ليست معرفة صرلحة. اثبت أنه إذا كان

(i) $\phi > 2$، إما λ_1 أو λ_2 اكبر من الواحد وأحد الحلول غير محدود

(ii) $|\phi| = 2$ فإنه يوجد حل دورى

(iii) $-2 < \phi < 2$، λ_1 ، λ_2 عددان مركبان مترافقان. ماذا تستنتج من ذلك ؟

(iv) $\phi < -2$، λ_1 ، λ_2 عددان حقيقيان وسالبان. وهل الحلول محدودة.

٧- اثبت أن النظام

$$\dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2)\ , \ \ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2)$$

له دائرة نهاية.

٨- ادرس وجود دائرة نهاية (limit cycle) للنظام

$$\dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2)\ , \ \ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2)$$

٩- اثبت ان النظام

$$\dot{x} = 2x - y + x^3\ , \ \ \dot{y} = 3x - y + y^3$$

ليس له حل دورى.

١٠- ليكن لدينا النظام

$$\dot{x} = 4x - 4y - x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = 4x + 4y - y(x^2 + y^2)$$

أ) حول هذا النظام إلى الاحداثيات القطنية

ب) استخدم نظرية بوانكاريه – بندكس لاثبات وجود دائرة النهايه بين الدائرتين

$x^2 + y^2 = 1/2, x^2 + y^2 = 1.6$

جـ) اوجد الحل صراحة $y = g(t), x(t) = f(t)$ للنظام الأصلى.

وعلى وجه الخصوص أوجد الحل الدورى طبقاً لدائرة النهاية.

د) ارسم دائرة النهاية وأيضاً على الأقل واحد من المسارات غير المغلقة.

١١- اوجد أ، ب، جـ، د في السابق للنظام

$$\frac{dx}{dt} = y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}[1 - (x^2 + y^2)]$$

$$\frac{dy}{dt} = -x - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}[1 - (x^2 + y^2)]$$

ثم استخدم بعض النظريات لاثبات وجود حل دورى أو عدم وجوده

١٢- في المسائل التالية استخدم احدة النظريات لتحديد ما إذا كان يوجد حل دورى أم لا

a) $\frac{dx^2}{dt^2} + x^4\frac{dx}{dt} - \frac{dx}{dt} + x = 0$, b) $\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + x = 0$

c) $\frac{dx^2}{dt^2} + (x^4 + x^2)\frac{dx}{dt} + (x^3 + _x) = 0$

d) $\frac{dx^2}{dt^2} + (5x^4 - 6x^2)\frac{dx}{dt} + x^3 = 0$, e) $\frac{dx^2}{dt^2} + (x^2 + 1)\frac{dx}{dt} + x^3 = 0$

١٣- ليكن لدينا النظام

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2, \quad dy/dt = 2y - y^2$$

أ) عين وقع قسم (نوع) وبين الدليل لكل نقاط حرجة.

ب) اوجد معادلة المسارات للنظام فى المستوى xy ثم ارسم اكثر من مسار

جـ) عين الدليل لكل من المنحنيات البسيطة المغلقة التالية بالنسبة بالنظام المعطى. وفى كل حالة وضح كيفية الحصول على الدليل.

(i) $4(x^2+y^2)=1$ (ii) $100(x^2+y^2)=44$

(iii) $x^2+y^2=9$ (iv) $4(x^2+y^2)-8(x+2y)+1=0$

١٤- اوجد حل الدوائر النهائية وناقش استقرارها للنظم الاتية

(i) $x_1'=x_2-x_1(x_1^2+x_2^2-1)\ ,\ \ y'=-x_1-x_2(x_1^2+x_2^2-1)$

(ii) $x_1'=x_2+x_1(x_1^2+x_2^2)^{1/2}(x_1^2+x_2^2-3),$

$y'=-x_1+x_2(x_1^2+x_2^2)^{1/2}(x_1^2+x_2^2-3)$

(iii) $x_1'=-x_2+x_1(x_1^2+x_2^2)^{3/2}(x_1^2+x_2^2-16)(x_1^2+x_2^2-25)$

$x_2'=x_1+x_2(x_1^2+x_2^2)^{3/2}(x_1^2+x_2^2-16)(x_1^2+x_2^2-25)$

(iv) $x_1'=-x_2+x_1(x_1^2+x_2^2-1)\ ,\ \ x_2'=x_1+x_2(x_1^2+x_2^2-1)^2$

(v) $x_1'=x_2,\ \ x_2'=x_1+x_2(1-x_1^2+x_2^2)$

(vi) $x_1'=-x_2,\ \ x_2'=x_1+x_2(x_1^2+x_2^2-1)$

١٥- ليكن لدينا النظام

$$\dot{x}_1=-x_2+\frac{x_1(4-x_1^2+x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^{1/2}}$$

$$\dot{x}_2=x_1+\frac{x_2(4-x_1^2-x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)}$$

اثبت أن للنظام حل دورى $x_1=2\cos t, x_2=2\sin t$ له الدورة 2π ثم اوجد دائرة النهاية. ثم إدرس إستقرارها.

١٦- ادرس استقرار دائرة النهاية للانظمة التالية

(i) $x_1' = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)$

$x_2' = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)$

(ii) $x_1' = x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)(x_1^2 + x_2^2 - 2)$

$x_2' = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)(x_1^2 + x_2^2 - 2)$

(iii) $x_1' = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 9)^2$

$x_2' = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 9)^2$

(iv) $x_1' = x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2), x_2' = -x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2)$

١٧- اثبت أن النظم التالية لها نقاط اتزان

(i) $x_1' = e^{x_1 + x_2}, \qquad x_2' = x_1 + x_2$

(ii) $x_1' = x_1 + x_2 + 2, \quad x_2' = x_1 + x_2 + 1$

(iii) $x_1' = x_2 + 2x_2^3, \quad x_2' = 1 + x_2^2$

١٨- بين الاختلاف بين صورتى الطور للنظامين

(i) $\dot{x}_1' = x_1(x_2^2 - x_1), \quad \dot{x}_2' = -x_2(x_2^2 - x_1)$

(ii) $\dot{x}_1' = x_1, \qquad \dot{x}_2' = -x_2$

١٩- اوجد المسارات المغلقة لكل من

(i) $\ddot{x}_1 + (2\dot{x}^2 + x^4 - 1)\dot{x} + x^3 = 0$, (ii) $\ddot{x} + (2\dot{x}^2 + x^4 - 1)x^3 = 0$

(iii) $\ddot{x} + (\dot{x}^2 + x^2 - 4)x = 0$

٢٠- بين النظم التالية أن المنطقة المشار اليها فى R موجبة لا تغيرية

(i) $\dot{x}_1 = 2x_1x_2, \ \dot{x}_2 = x_2^2, \ R = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \geq 0\}$

(ii) $\dot{x}_1 = -\alpha x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = (\beta - 2)x_2 \,, \qquad \alpha, \beta$ ثوابت

(iii) $\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_1\{x_1^2 + x_2^2\}, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2)$

$$R = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = \beta x_1\}$$

(iv) $\dot{x}_1 = x_2(x_2^2 - x_1), \quad \dot{x}_2 = -x_1(x_2^2 - x_1), \quad R\{(x_1, x_2) \mid x_1 > x_2^2\}$

٢٢- اثبت ان الصورة القطنية للنظام غير الخطى

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

تعطى بالعلاقة

$$r(t) = r(1 - r^2), \quad \dot{\theta} = 1$$

حل هذا النظام تحت الشرط الابتدائى $r(0) = r_0, \theta(0) = \theta_0$ عند $t = 0$ للحصول على

$$r(t) = r_0 / [r_0^2 + (1 - r_0^2)e^{-2r}]^{1/2}$$

ارسم r مقابل t لكل من

(i) $0 < r_0 < 1$, (ii) $r_0 = 1$, (iii) $r_0 > 1$

للحصول على صورة الطور لهذا النظام. وهل يمكن رسم صورة الطور بسهولة من معادلات الاحداثيات القطنية.

٢٣- اثبت أنه يوجد منطقة $R = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le r^2\}$ بحيث ان جميع مسارات النظام.

$$\dot{x}_1 = -\omega x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \,, \quad \dot{x}_2 = \omega x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) - F$$

حيث ω, F ثابتان تدخل R. اثبت أن النظام له دائرة نهاية عندما $F = 0$.

٢٤- اثبت أن النظام

$$\dot{x}_1 = 1 - x_1 x_2 \,, \quad \dot{x}_2 = x_1$$

ليس له دائرة نهاية.

٢٥- استخدم طريقة كريلوف-بوجوليبوف لايجاد التقريب الأول لحل المعادلات التفاضلية المعطاه. وفى كل حالة نفترض أن $0<\mu<<1$ وأن القيمة الابتدائية للسعة $a(t)$ للحل تعطى بالعلاقة $a_0>0$، ω ثابت

a) $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x+\mu x^5=0$

b) $\frac{d^2x}{dt^2}+x+\mu\frac{dx}{dt}\left|\frac{dx}{dt}\right|=0$

c) $\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+x^3\right]+\omega^2 x=0$

d) $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x+\mu(x^2+1)\frac{dx}{dt}=0$

e) $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x+\mu\left(x^3+\frac{dx}{dt}\right)=0$

f) $\frac{d^2x}{dt^2}+x+\mu\left(\frac{8}{9}x^4-1\right)\frac{dx}{dt}=0$

٢٦- افحص وجود دائرة النهاية للنظام

$$\dot{x}_1=\mu x_1-\omega x_2+\theta x_1[x_1^2+x_2^2]$$

$$\dot{x}_2=\omega x_1+\mu x_2+\theta x_2[x_1^2+x_2^2]$$

حيث θ ، ω بارامتران

٢٧- اثبت أن $\ddot{x}+\varepsilon(x^2-1)\dot{x}+x^3=0$ لها حل دورى وحيد وكذلك المعادلة $\ddot{x}+\varepsilon(x^2-1)\dot{x}+\tanh kx=0$ عندما $k>0$

٢٨- أوجد دليل نقاط الاتزان للنظم التالية

(i) $\dot{x}=2xy$, $\dot{y}=3x^2-y$, (ii) $\dot{x}=y^2-x^4$, $\dot{y}=x^3y$,

(iii) $\dot{x}=x-y$, $\dot{y}=x-y^2$

السادس عشر

نظرية الاستقرار

Stability Theory

١٦-١ **مقدمة:** لننظر الآن لمسألة كوشى التى تعتمد على القيمة الابتدائية

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x), \tag{1}$$

$$x(t_0)=x_0 \tag{2}$$

فإذا كانت الدالة $f(t,x)$ متصلة ولها مشتقه $\frac{\partial f}{\partial x}$ محدودة في النطاق D الذى يحتوى (t_0,x_0) فانه يوجد حل وحيد لمسألة كوشى (1) – (2). فإذا غيرنا قيمة كل من t_0 و x_0 فإن الحل سوف يتغير. والسؤال المطروح الآن فى التطبيقات وهو كيف يؤثر تغيير x_0 و t_0 على الحل ؟ وهذا السؤال يطرح نفسه فى المسائل الفيزيائية التى تؤول إلى مسألة كوشى حيث تؤخذ القيم الابتدائية من التجارب فإذا كان التغير الصغير الاختيارى فى القيمة الابتدائية قادراً على عمل تغيير أساسى فى الحل فإن النموذج الرياضى يكون من الصعب قبوله.

وإعتماد الحل المستمر على القيم الابتدائية يعطى بالنظرية التالية (التى قد برهناها فى باب نظرية الوجود والوحدوية).

نظرية (١): إذا كان الطرف الأيمن من المعادلة التفاضلية (1) متصلاً فى النطاق D وله مشتقه $\frac{\partial f}{\partial x}$ محدودة فى نطاق G للمتغيرين x, t، $G\subset D$، فإن الحل $x(t)=x(t:t_0,x_0)$ والذى يحقق الشرط الابتدائى $x(t_0)=x_0$ حيث $(t_0,x_0)\in G$ يعتمد باستمرار على الشرط الابتدائى.

وبعبارة أخرى، نفترض أنه النقطة (t_0,x_0) يمر بها الحل $x(t)$ للمعادلة (1) المعرف على الفترة $\alpha\le t\le\beta$, $t_0\in(\alpha,\beta)$. فإنه لأى $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث أن $|\bar{t}_0-t_0|<\delta$, $|\bar{x}_0-x_0|<\delta$ فإن الحل $\bar{x}(t)$ للمعادلة (1) الذى يمر

بالنقطة $(\bar{t_0},\bar{x_0})$ يكون موجودا فى $[\alpha,\beta]$ ويختلف عن الحل $x(t)$ بقيمة أقل من ε أى

$$|x(t)-\bar{x}(t)|<\varepsilon \quad , \quad \forall t\in[\alpha,\beta].$$

وتتحقق نظرية مماثلة لنظام المعادلات التفاضلية

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,x_2,...,x_n), \qquad i=1,2,...,n$$

فإذا تحققت شروط النظرية (1) فإنه يوجد حل وحيد لمسألة كوشى الذى يعتمد باستمرار على الشروط الابتدائية.

وعلى ذلك يقال أن مسألة كوشى قد صيغت بطريقة صحيحة. ويكون من المعلوم أن الفترة $[\alpha,\beta]$ للمتغير t تكون محدودة.

في كثير من المسائل قد يكون من المهم دراسة اعتماد الحل على القيم الابتدائية فى الفترة غير المنتهية $t_0\leq t<+\infty$. والانتقال من فترة منتهية الذى يكون الحل يعتمد باستمرار على الشروط الابتدائية إلى فترة غير منتهية قد يؤدى إلى تغير فى طبيعة المسألة وطرق المعالجة لها. وهذا يؤدى إلى دراسة نظرية الاستقرار الذى بدأها ليبانوف (Lyapunov أو Liapumov).

والآن نعطى فكرة عن امتداد (extendibility) الحلول. نفترض أنه لدينا النظام

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,x_2,...,x_n)\ , \quad i=1,2,...,n \tag{3}$$

حيث t متغير مستقل (الزمن مثلا)، والدوال $f_i(t,x_1,x_2,...,x_n)$ معرفة لكل $t\in(a,+\infty)$، $x_1,x_2,...,x_n$ فى النطاق $D\subset R^n$. إذا كانت f_i متصلة فى نطاقها ولها مشتقات جزئية محدودة ومتصلة، فإن للنظام (3) تتحقق له نظرية الوجود: لمجموعة القيم (t_0,x_1^0,x_2^0,x_n^0)، $t\in(a,+\infty)$، $(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)\in D$. يوجد حل وحيد $x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)$ للنظام (3) معرف على الفترة $(t_0-h_0,t_0+h_0)\subset(a,\infty)$ وتحت الشروط الابتدائية

$$x_i(t_0)=x_i^0, \qquad i=1,2,...,n \tag{4}$$

ونقدم المفاهيم التالية:

ليكن $x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)$ حلاً لمسألة كوشى (3)، (4) معرفا على الفترة $I=(t_1,t_2)$ وهذا الحل يمكن امتداده لفترة أكبر.

يسمى الحل $y_1(t),y_2(t),...,y_n(t)$ بامتداد الحل $x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)$ إذا كان معرفا على فترة أكبر $I_1\supset I$ وينطبق عليه عندما تكون $t\in I$ ويسمى الحل بانه ممتد إلى غير نهاية (infinitly extendible). من اليمين او من اليسار. ويمكن امتداده على طول المحور $-\infty<t<\infty$ (أو إلى نصف المحور $t_0\le t<+\infty$ أو $-\infty<t\le t_0$).

ولاحقاً فى هذا الباب نحتاج لمعرفة ما إذا كان يوجد حل $x_i(t)$ عندما $t_0\le t<\infty$ (نظرية الوجود الشمولى global). والخاصية متأصلة (inherent) فى النظام الخطى

$$\frac{dx_j}{dt}=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t)x_j+f_i(t),\qquad i=1,2,...,n$$

حيث الدوال $f_i\ ,a_i$ متصلة على $[a_0,+\infty)$ وكل من حلولها $x_i(t)$، تكون موجودة فى الفترة $[a_0,+\infty)$ وأيضاً تكون وحيدة. ولكن ليس كل النظم لها هذه الخاصية. ومثال ذلك المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dx}{dt}=x^2,\qquad x(0)=\alpha\ ,\ \ \alpha>0 \tag{5}$$

الدالة $f(t,x)=x^2$ متصلة ولها مشتقات من جميع الرتب ويكون حلها هو $x=\alpha/(1-\alpha t)$. وهذا الحل يكون موجوداً فقط $(-\infty,1/\alpha)$ والذى يعتمد على الشروط الابتدائية ولايمكن امتداده إلى الفترة $(-\infty,1/\alpha]$.

١٦-٢ الاستقرار: (تعريفات ومفاهيم)

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \tag{1}$$

حيث الدالة f متصلة لكل $t \in (a,\infty)$، $x \in D$ ولها مشتقة جزئية $\frac{\partial f}{\partial x}$ متصلة. ليكن $x = \varphi(t)$ حلا للمعادلة (1) الذى يحقق $x(t_0) = \varphi(t_0)$، $t_0 > a$.

ليكن $x = x(t)$ حلا أيضاً لنفس المعادلة والذى يحقق $x(t_0) = x(t_0)$. وافترضنا أيضاً أن الحلين $\varphi(t)$ و $x(t)$ معرفين لجميع قيم $t \geq t_0$ أى أنه يمكن امتدادهما بدون حدود إلى اليمين.

تعريف (١): يسمى الحل $x = \varphi(t)$ للمعادلة (1) بأنه مستقر فى مفهوم ليبانوف، عندما $t \to \infty$، إذا كان لأى $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ بحيث أن لأى حل $x = x(t)$ للمعادلة يكون

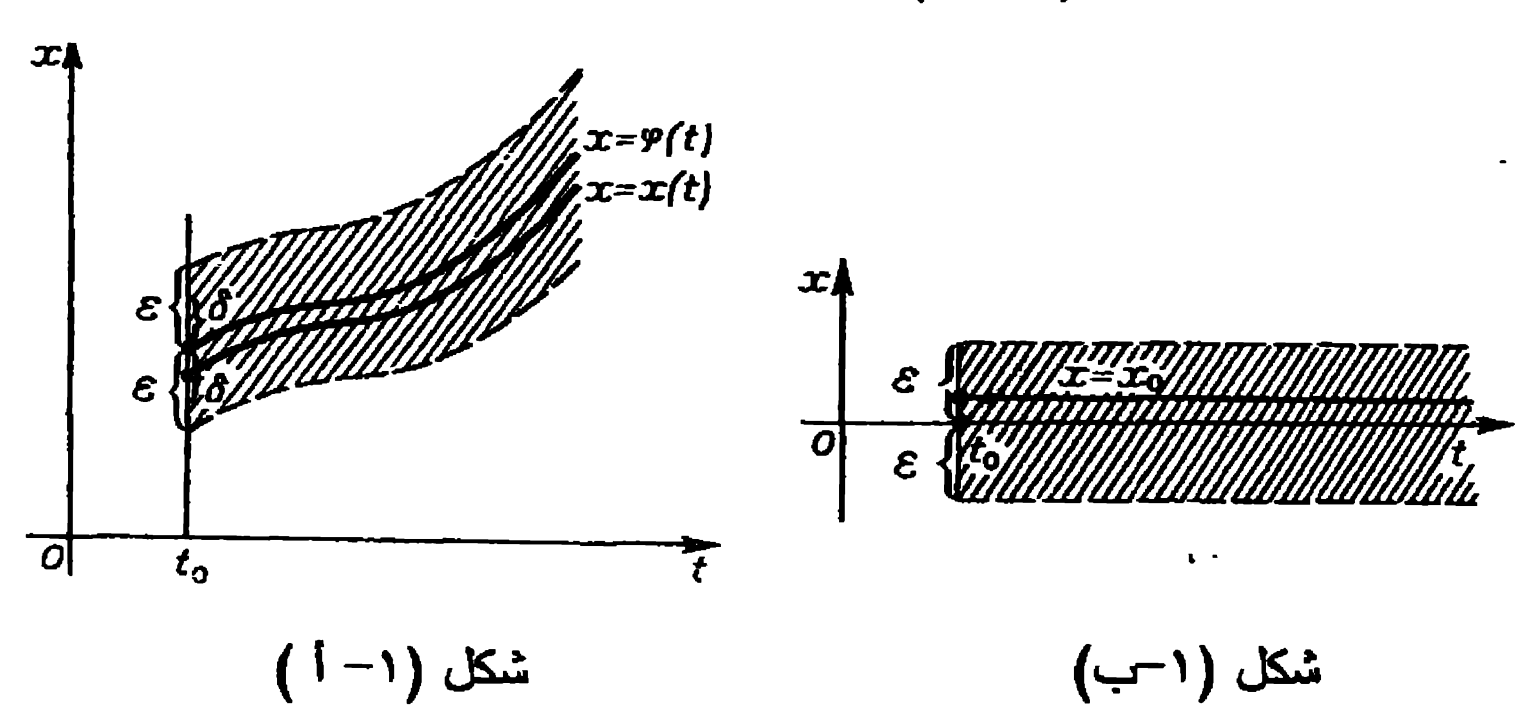
$$|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta \tag{6}$$

$$\Rightarrow \quad |x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon \tag{7}$$

ولجميع $t \geq t_0$ (يمكن دائما أن نفترض أن $\delta \leq \varepsilon$).

وهذا يعنى أن جميع الحلول التى تكون قيمها الابتدائية قريبة من القيمة الابتدائية للحل $x = \varphi(t)$ تبقى قريبة أيضاً لجميع $t \geq t_0$.

وهذا يعنى هندسياً التالى: الحل $x = \varphi(t)$ للمعادلة (1) يكون مستقرا، إذا كان الشريط (ε - band) الضيق يحتوى المنحنى $x = \varphi(t)$، فإن كل المنحنيات التكاملية (الحلول) $x = x(t)$ للمعادلة (1) تكون قريبة قربا كافيا له عند اللحظة الابتدائية $t = t_0$ والتى تكون محتواه فى الشريط ε لجميع $t \geq t_0$ كما فى الشكل (١- أ)



شكل (١- أ)　　　　شكل (١-ب)

أما إذا كان عندما $\delta > 0$ (الاختيارية الصغيرة) يوجد على الأقل حل واحد $x = x(t)$ للمعادلة (1) لاتتحقق له المتباينة (7) فإنه يقال أن الحل $x = \varphi(t)$ غير مستقر.

تعريف (٢): يقال أن الحل $x = \varphi(t)$ للمعادلة (1) مستقر تقاربيا (asymptotically) إذا كان

(i) تقاربيا

(ii) يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث أن أى حل $x = x(t)$ للمعادلة (1) يحقق الشرط $|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta_1$ يكون لدينا

$$\lim_{t \to \infty} |x(t) - \varphi(t)| = 0$$

وهذا يعنى أن جميع الحلول التى شروطها الابتدائية قريبة للحل المستقر تقاربيا $x = \varphi(t)$ لاتبقى فقط بالقرب منه عندما $t \geq t_0$ ولكن تقترب منه بدون حدود عندما $t \to \infty$.

لنعتبر نموذجا فيزيائيا بسيطا: نضع كرة صغيرة عند أسفل نصف كرة (فى مواضيع إتزان). فإذا أحدثنا إضطرابا صغيرا للكرة الصغيرة من نقطة إتزانها فإنها تتأرجح (swing) حولها بدون احتكاك فتكون نقطة الاتزان مستقرة وتذبذب الكرة يقل تدريجيا مع الزمن عند وجود احتكاك فتكون نقطة الاتزان مستقرة تقاربيا.

مثال (١): إدرس استقرار الحل الصفرى $x \equiv 0$ للمعادلة

$$\frac{dx}{dt} = 0 \qquad *$$

الحل: الحل $x \equiv 0$ يحقق الشرط الابتدائى $x(t_0) = 0$ وأى حل للمعادلة (*) الذى يحقق الشرط $x(t_0) = x_0$ له الصورة $x \equiv x_0$. ويكون واضحا من الشكل (١-ب) السابق، الشريط ε حول المنحنى $x = 0$، بوجد $\delta > 0$، $(\delta = \varepsilon)$، بحيث أن المنحنى التكاملى (integral cruve) $x = x_0$ الذى له $|x_0 - 0| < \delta$ يقع تماماً دتخل الشريط ε لجميع $t \geq t_0$.

وبالتالى يكون الحل $x \equiv 0$ مستقرا. لايوجد استقرار تقاربى حيث أن $x = x_0$ لا يؤول إلى الخط $x = 0$ عندما $t \to \infty$.

مثال (٢): ادرس استقرار الحل $x \equiv 0$ للمعادلة

$$\frac{dx}{dt} = -a^2 x \qquad **$$

الحل: حل المعادلة (**) الذى يحقق الشرط $x(t_0) = x_0$ هو

$$x = x_0 e^{-a^2(t-t_0)}$$

وبأخذ $\varepsilon > 0$ نوجد الفرق بين الحل $x(t)$ ، $\varphi(t) = 0$

$$x(t) - \varphi(t) = x_0 e^{-a^2(t-t_0)} - 0 = (x_0 - 0) e^{-a^2(t-t_0)} \qquad ***$$

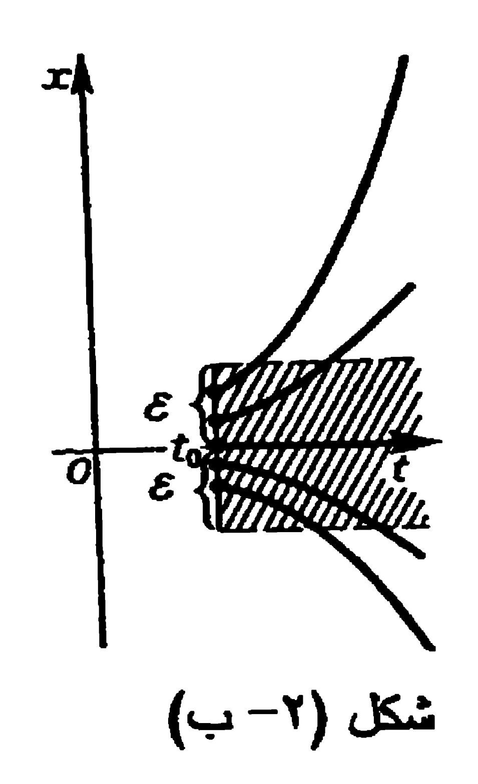
وحيث أن $e^{-a^2(t-t_0)} \leq 1$ لجميع $t \geq t_0$ فانه يتضح من (***) وجود $\delta > 0$، $(\delta = \varepsilon)$، بحيث أن $|x_0 - 0| < \delta = \varepsilon$ فيكون لدينا

$$|x(t) - \varphi(t)| = |x_0 - 0| e^{-a^2(t-t_0)} < \varepsilon, \qquad \forall t \geq t_0$$

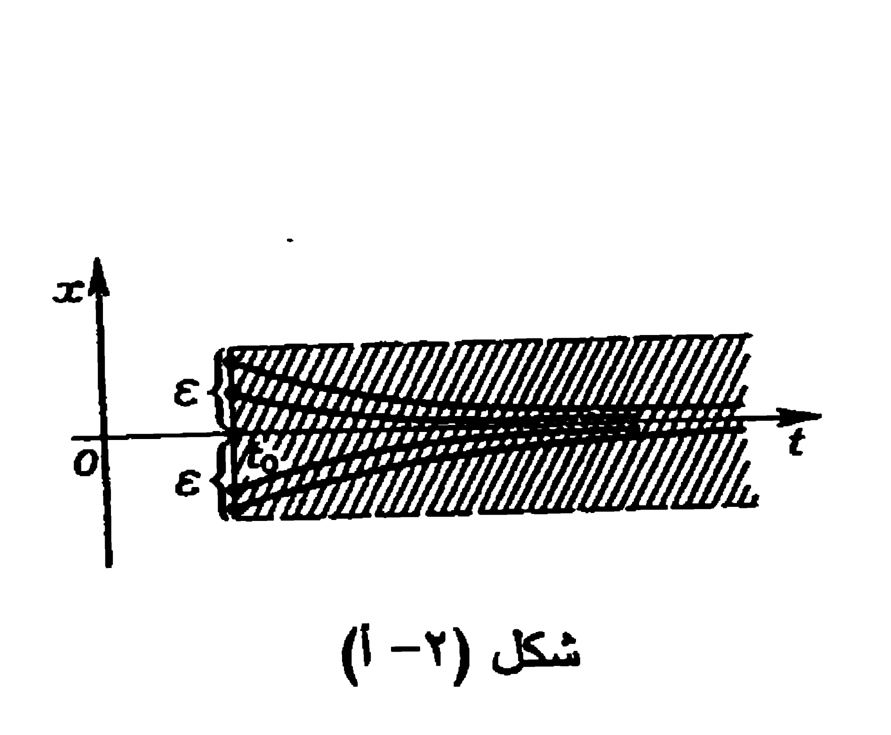
ومن التعريف، فهذا يؤدى إلى أن الحل $\varphi(t) \equiv 0$ للمعادلة (***) يكون مستقراً. وأيضا حيث أن

$$\lim_{t \to \infty} |x(t) - \varphi(t)| = \lim_{t \to \infty} |x_0| e^{-a^2(t-t_0)} = 0$$

فإن الحل $\varphi(t) \equiv 0$ يكون مستقراً تقاربيا. أنظر الشكل (٢- أ)



شكل (٢- ب)



شكل (٢- أ)

مثال (٣): اثبت أن الحل $\varphi(t)\equiv 0$ للمعادلة $\frac{dx}{dt}=a^2x$ غير مستقر.

الحل: لقيم $|x_0|$ الصغيرة اختياريا يكون حل المعادلة المعطاه هو $x(t)=x_0e^{a^2(t-t_0)}$ والذى لايحقق الشرط هو $|x(t)-0|=|x_0|e^{a^2(t-t_0)}<\varepsilon$ لقيم $t\geq t_0$ الكبيرة. وعلاوة على ذلك لأى $x_0\neq 0$ يكون لدينا $|x(t)|\to\infty$ عندما $t\to\infty$ انظر الشكل (٢-ب). وبالتالى يكون الحل غير مستقر

مثال (٤): افحص لستقرار النظم التالية

(a) $\frac{dx}{dt}=-xt$ (b) $\frac{dx}{dt}=xt$ (c) $\frac{dx_1}{dt}=-x_2, \frac{dx_2}{dt}=x_1$

الحل: (a) يكون حل على الصورة

$$x(t)=x_0\exp(-t^2/2) \qquad \text{(i)}$$

حيث x_0 هى قيمة x عند $t=0$ أى $x(0)=x_0$

وليكن الحل الآخر هو

$$x^*(t)=x_0^*\exp(-t^2/2) \qquad \text{(ii)}$$

حيث $x_0^*=x^*(0)$

نفترض $\|x_0-x_0^*\|<\delta$ ومن (i)، (ii) نجد أن

$$\|x(t)-x^*(t)\|=|x_0-x_0^*|\exp(-t^2/2)<\delta\exp(-t/2) \qquad \text{(iii)}$$

وهذه المتباينة تؤدى إلى النظام (المعادلة) تكون مستقرا (حيث تتحقق المتباينة (3) مع $\delta=\varepsilon$). وعلاوة على ذلك $|x(t)-x^*(t)|$ تؤول إلى الصفر عندما $t\to\infty$ وعلى ذلك فان الحل يكون مستقر تقاربياً.

الحلان الممكنان للمعادلة (b) هما

$$x(t)=x_0\exp(t^2/2) \qquad \text{6-a}$$

$$x^*(t)=x_0^*\exp(t^2/2) \qquad \text{6-b}$$

بافتراض أن δ بحيث أن $|x_0-x_0^*|<\delta$

فإن

$$|x(t)-x^*(t)|=|x_0-x_0^*(t)|\exp(t^2/2)$$

نرى فى هذه المعادلة ان مهما اخترنا ε كبيرة جدا فاننا يمكن ان نختار t بحيث أن $|x(t)-x^*(t)|$ لكبر من ε. وعلى ذلك يكون النظام غير مستقر.

٣-١٦ استقرار نظم المعادلات التفاضلية:

نعتبر نظام المعادلات التفاضلية

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,x_2,...,x_n), \qquad i=1,2,...,n \tag{1}$$

حيث f_i معرفة $a<t<+\infty$ ، $(x_1,x_2,...,x_n)\in D$ ويحقق شروط نظرية وجود ووحدوية حل مسألة كوشى. ونفترض أن جميع حلول (1) قد امتدت إلى اليمين $t\geq t_0>a$.

تعريف (١): يقال أن الحل $\varphi_i(t)$ للنظام (1) مستقرا عندما $t\to\infty$ إذا كان لأى $\varepsilon>0$ يوجد $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ بحيث أن لأى حل $x_i(t)$، $i=1,2,...,n$ للنظام الذى قيمه الابتدائية تحقق

$$|x_i(t_0)-\varphi_i(t_0)|<\delta \quad , \quad i=1,2,...,n$$

فإن المتباينة

$$|x_i(t)-\varphi_i(t)|<\varepsilon \tag{2}$$

تتحقق لجميع $t\geq t_0$ أى أن الحلول ذات القيم الابتدائية القريبة تبقى قريبة لجميع قيم $t\geq t_0$.

وإذا لم تتحقق المتباينة (2) لأى $\delta>0$ الصغيرة الاختيارية على الاقل لواحد من $x_i(t)$، $i=1,2,...,n$ فإنه يقال أن الحل $\varphi(t)$ غير مستقر.

تعريف (٢): يقال أن الحل $\varphi_i(t)$ للنظام (1) مستقر تقاربيا إذا كان

(i) مستقرا

(ii) يوجد $\delta_1>0$ بحيث أن أى حل $x_i(t)$، $i=1,2,...,n$ للنظام حيث

$$|x_i(t_0)-\varphi_i(t_0)|<\delta_1$$

يحقق الشرط

$$\lim_{x\to\infty}|x_i(t)-\varphi_{i0}(t)|=0 \quad , \quad i=1,2,\dots,n$$

مثال (١): استخدم تعريف الاستقرار في مفهوم ليبانوف لاثبات أن حل النظام

$$\frac{dx}{dt}=y \quad , \quad \frac{dy}{dt}=-x \qquad (*)$$

تحت الشروط الابتدائية

$$x(0)=0 \quad , \quad y(0)=0 \qquad (**)$$

يكون مستقراً.

الحل. حل النظام (*) والتي يحقق الشروط (**) هو $x(t)\equiv 0$ ، $y(t)\equiv 0$. وحل للنظام الذي يحقق الشرط $x(0)=x_0$ ، $y(0)=y_0$ يكون على الصورة

$$x(t)=x_0\cos t+y_0\sin t \quad , \quad y(t)=-x_0\sin t+y_0\cos t$$

وبأخذ $\varepsilon>0$ نثبت وجود $\delta(\varepsilon)>0$ بحيث أن

$$|x_0-0|<\delta \quad , \quad |y_0-0|<\delta$$

يكون لدينا

$$|x(t)-0|=|x_0\cos t+y_0\sin t|<\varepsilon$$

$$|y(t)-0|=|-x_0\sin t+y_0\cos t|<\varepsilon$$

لجميع $t\geq 0$. وهذا يعني من التعريف أن الحل $x\equiv 0$ ، $y\equiv 0$ للنظام (*) يكون مستقرا. ومن الواضح أن

$$|x_0\cos t+y_0\sin t|\leq|x_0\cos t|+|y_0\sin t|\leq|x_0|+|y_0|$$

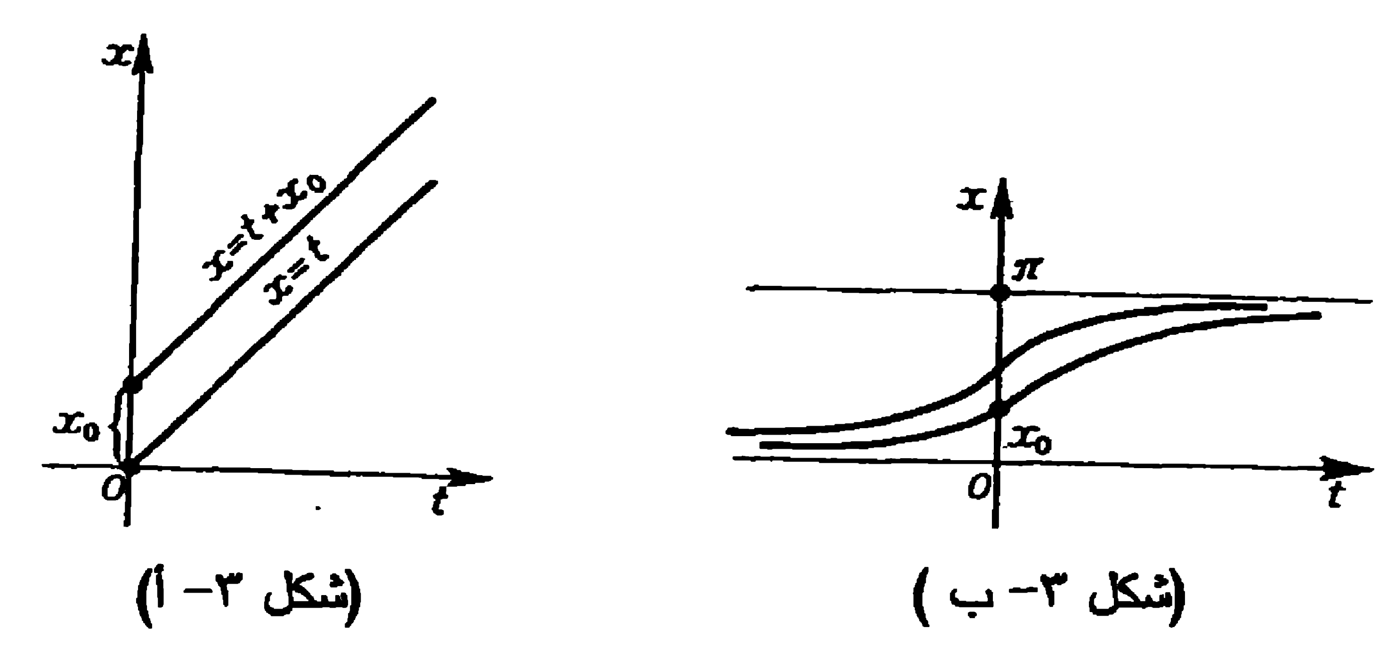
$$|-x_0\sin t+y_0\cos t|\leq|x_0\sin t|+|y_0\cos t|\leq|x_0|+|y_0|$$

وإذا أخذنا $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/2$ فإنه لكل $|x_0|<\delta$ ، $|y_0|<\delta$ يكون لدينا

$$|x_0\cos t + y_0\sin t| < \varepsilon \ , \ |-x_0\sin t + y_0\cos t| < \varepsilon$$

لجميع $t \geq 0$ أى أن الحل الصفرى يكون مستقراً فى مفهوم ليبانوف، هذا بالرغم من كون الاستقرار ليس تقاربيا .

وفى الحقيقة أن الحل غير الصفرى المستقر للمعادلة التفاضلية لا يقترح أن الحل يكون محدودا. فلتوضيح ذلك نعتبر المعادلة $dx/dt = 1$. والحل تحت الشرط $x(0) = 0$ هو الدالة $\varphi(t) = t$. والحل مع الشرط الابتدائى $x(0) = x_0$ له الصورة $x(t) = t + x_0$. وهندسيا يكون واضحا من الشكل (٣- أ) أنه لأى $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$، $(\delta = \varepsilon)$، بحيث أن أى حل $x(t)$ للمعادلة التى تحقق المتباينة $|x_0 - 0| < \delta$ يحقق الشرط $|x(t) - t| < \varepsilon$، $\forall\, t \geq 0$. وهذا يعنى أن الحل $\varphi(t) = t$ مستقر ولكنه غير محدود عندما $t \to \infty$.



(شكل ٣- أ) (شكل ٣- ب)

وأيضاً فالحقيقة أن الحل المحدود لايعنى أن يكون الحل مستقرا. ومثال ذلك ليكن لدينا

$$\frac{dx}{dt} = \sin^2 x \qquad (3)$$

ومن المواضح أن حلولها هى

$$x = k\pi \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \qquad (4)$$

وبتكامل (3) نجد أن

$$x(t) = \cot^{-1}[(\cot x_0) - t] \quad , \quad x_0 \neq k\pi \qquad (5)$$

جميع الحلول (4)، (5) تكون محدودة فى $(-\infty,\infty)$ والحل $\varphi(t)\equiv 0$ يكون غير مستقر عندما $t\to\infty$ لأن لأى $x_0\in(0,\pi)$ يكون لدينا

$$\lim_{x\to\infty} x(t)=\pi$$

كما فى الشكل (٣- ب)

وعلى هذا يكون محدودية الحل واستقرار الحل لهما مفهومين مستقلين.

ملحوظة: الحل $\varphi_i(t)$ للنظام (1) يمكن تحويله إلى الحل الصفرى (trivial) $y_i\equiv 0$ لنظام آخر بالتحويل $y_i=x_i(t)-\varphi_i(t)$. نفترض للتبسيط أن لدينا معادلة تفاضلية واحدة

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \qquad (*)$$

واننا نريد فحص استقرار الحل $\varphi(t)$ للمعادلة. نضع $y(t)=x(t)-\varphi(t)$ (تسمى $x(t)-\varphi(t)$ بالاضطراب) فان $x(t)=y(t)+\varphi(t)$ وبالتعويض فى المعادلة (*) نحصل على

$$\frac{dy}{dt}+\frac{d\varphi}{dt}=f(t,y(t))+\varphi(t) \qquad (**)$$

ولكن $\varphi(t)$ هى حل للمعادلة (*) وبالتالى $\frac{d\varphi}{dt}=f(t,\varphi(t))$ ومن (**) يكون لدينا

$$\frac{dy}{dt}=f(t,y(t)+\varphi(t))-f(t,\varphi(t))=F(t,y)$$

أى

$$\frac{dy}{dt}=F(t,y) \qquad (***)$$

وهذه المعادلة لها الحل $y\equiv 0$ لأن $y=0$ تحقق الطرفين أى

$$F(t,0)=f(t,\varphi(t))-f(t,\varphi(t))=0$$

ولتلخيص سؤال استقرار الحل $\varphi(t)$ للنظام (*) يؤدى إلى سؤال استقرار الحل البديهى $y=0$ للمعادلة (***) التى اختزلت من (*). وبالتالى فيما يلى سوف نفترض أن الحل البديهى هو الذى نفحصه فى دراسة الاستقرار.

١٦-٤ استقرار النظم الذاتية Stability of autonomous system

يقال أن المعادلة التفاضلية ذاتية إذا كان الطرف الأيمن منها f_i لايحتوى على t صراحة ويكون على الصورة

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,x_2,...,x_n).$$

وهذا يعنى أن قانون تغير الدوال المجهولة الذى توصف بالنظام الذاتى لاتعتمد على الزمن كما فى كثير من القوانين الفيزيائية.

لنعتبر النظام الذاتى

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,x_2,...,x_n) \qquad (1)$$

وليكن أيضاً

$$f_i(a_1,a_2,...,a_n)=0 \quad , \quad i=1,2,...,n$$

وتكون فئة الدوال $x_i(t)=a_i$ حلا للنظام (1). تسمى النقطة $(a_1,a_2,...,a_n)$ فى الفضاء الطورى $(x_1,x_2,...,x_n)$ بنقطة سكون [stationary- إتزان equtibrium - حرجة critical] للنظام. لنأخذ النظام (1) الذى فيه $f_i(0,0,...,0)=0$ وبالتالى $x_i(t)=0$ ، $i=1,2,...,n$ هى نقطة إتزان للنظام.

لنعرف $S(R)$ على انها الكرة $\sum_{i=1}^{n} x_i^2<R^2$. نفترض أن النظام فى $S(R)$ يحقق شروط نظرية وجود ووحدوية حل مسألة كوشى.

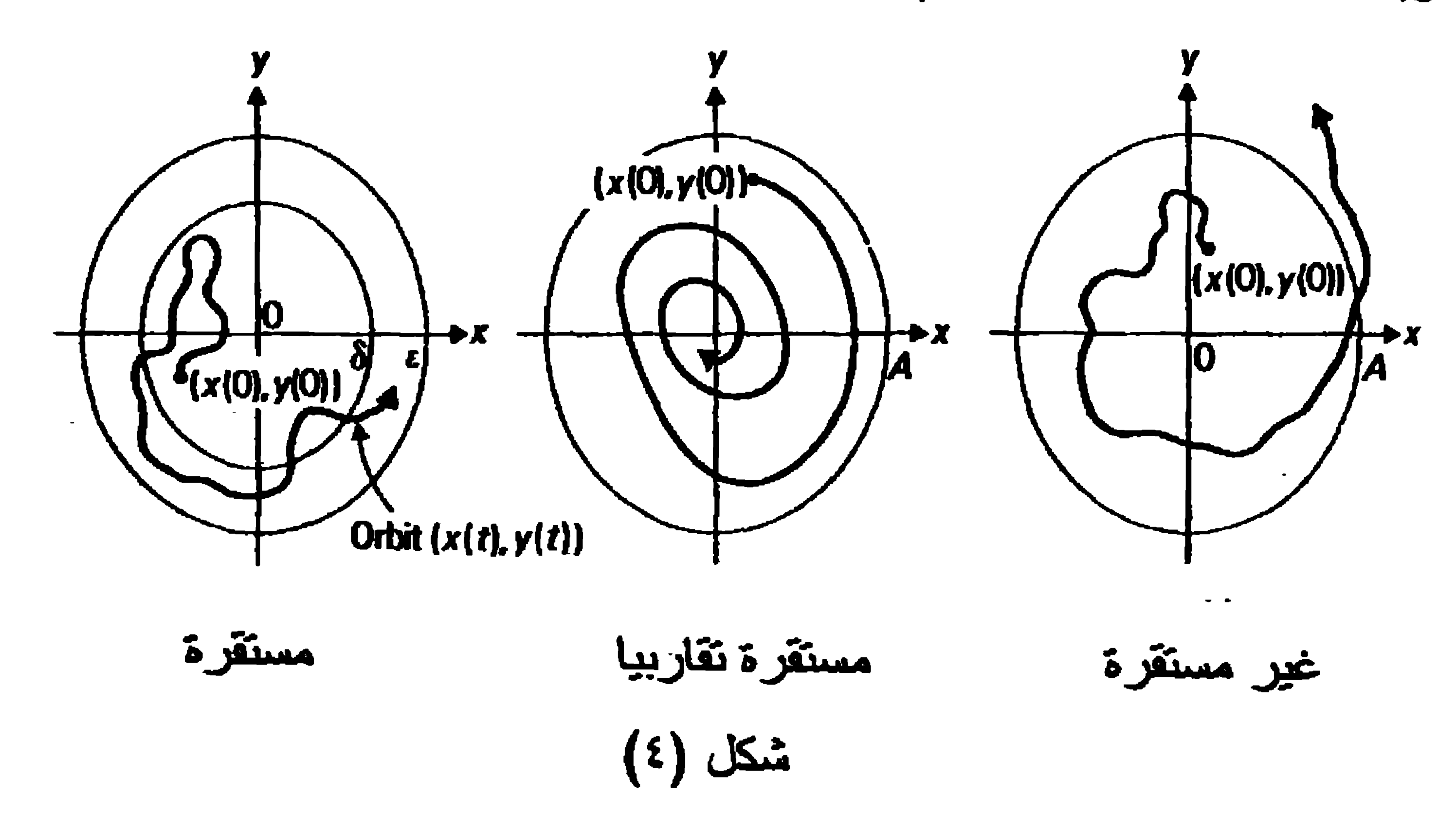
تعريف (١): يقال أن نقطة الاتزان $i=1,2,...,n$ ، $x_i=0$ للنظام (1) مستقرة، إذا كان لأى $\varepsilon>0$ $(0<\varepsilon<R)$ يوجد $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ بحيث أن أى مسار (path) للنظام يبدأ عند اللحظة الابتدائية $t_0=0$ عند النقطة $(x(0),y(0))$ يبقى دائماً داخل الكرة $S(\varepsilon)$ كما فى الشكل (٤)

كما تكون نقطة الاتزان مستقرة تقاربيا إذا كانت

(i) مستقرة

(ii) يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث أن أى مسار للنظام يبدأ عند نقطة $(x(0), y(0))$ فى $S(\delta_1)$ يؤول إلى نقطة الأصل عندما $t \to \infty$ كما فى الشكل (٤)

ويقال أنها غير مستقرة إذا لم تكن مستقرة كما فى الشكل (٤)



مستقرة   مستقرة تقاربيا   غير مستقرة

شكل (٤)

مثال (١): اعتبر النظام

$$\frac{dx}{dt} = y \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -x$$

الحل: المسار هنا دوائر متحدة المركز $x^2 + y^2 = h^2$ مركزها نقطة الأصل وهى نقطة الاتزان للنظام. فإذا أخذنا $\delta = \varepsilon$ فإن أى مسار يبدأ داخل الدائرة $S(\delta)$ يبقى دائماً داخل $S(\delta)$ وبالتالى يكون الحل مستقراً. ولكن المسارات لاتقترب من نقطة الأصل فهى ليست مستقرة تقاربياً.

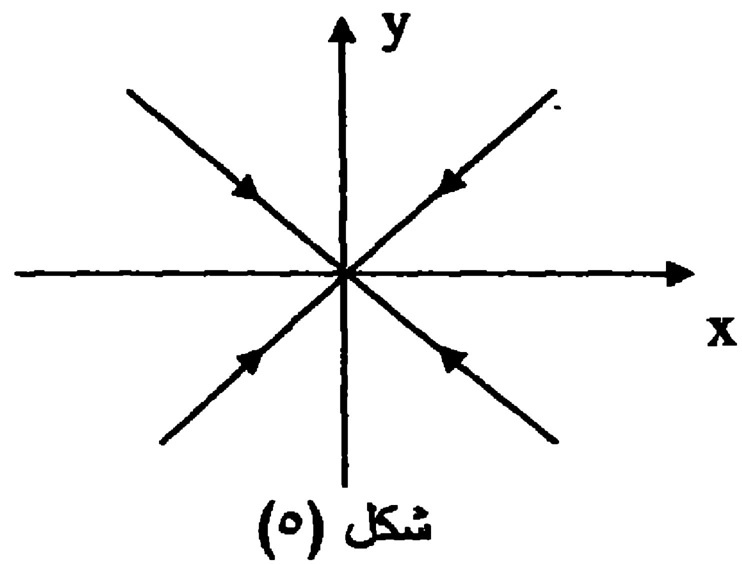
مثال (٢): اعتبر النظام

$$\frac{dx}{dt} = -x \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -y$$

الحل: يكون حل النظام هو

$$x = Ae^{-t} \quad , \quad y = Be^{-t}$$

وبالتالى يكون $y/x = B/A = K$ ثابتا وبالتالى تكون المسارات أشعة (rays) تنتهى عند نقطة الأصل (كما فى شكل (٥))



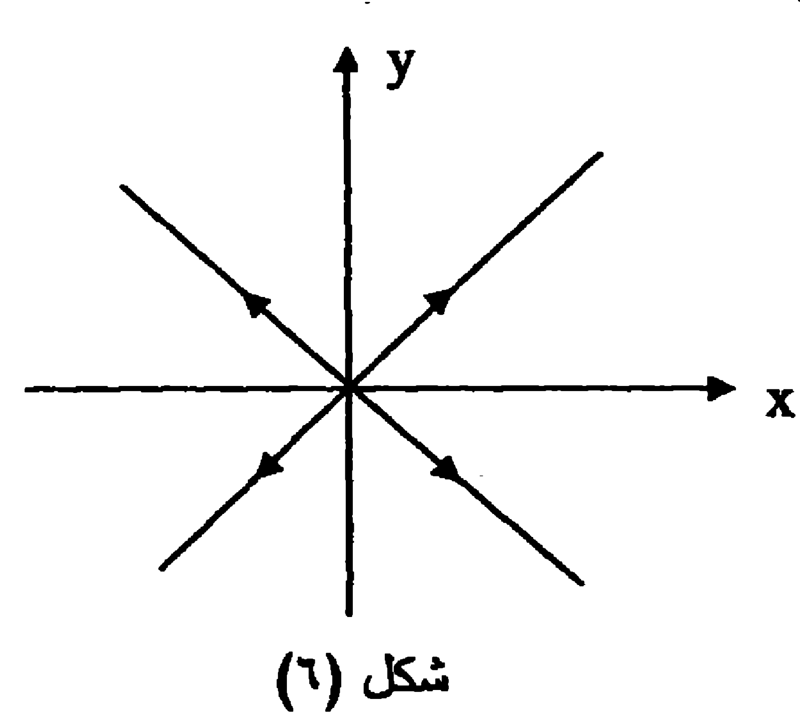
شكل (٥)

ويمكن أن نختار $\delta = \varepsilon$. وأى نقطة على المسار التى تقع فى اللحظة الابتدائية داخل $S(\delta)$ تبقى دائماً داخل الدائرة $S(\varepsilon)$ وأيضاً تقترب إلى نقطة الأصل عندما $t \to \infty$ وبذلك تكون نقطة الاتزان مستقرة تقاربياً.

مثال (٣): اعتبر النظام

$$\frac{dx}{dt} = x \quad , \quad \frac{dy}{dt} = y$$

الحل: حل هذا النظام هو $x = Ae^t \,, y = Be^t$ ، (ثابت) $\frac{y}{x} = k$ والمسارات عبارة عن أشعة تنبعث من نقطة الأصل ولكن عكس المثال السابق تكون الحركة على الاشعة تبتعد عن المركز وبذلك تكون نقطة الاتزان غير مستقرة كما فى شكل (٦)



شكل (٦)

ملحوظة: دراسة المسارات فى جوار نقطة الاتزان $x = 0$ ، $y = 0$ لمعادلة تفاضلية متجانسة فى المستوى معطاه فى باب النظرية الكيفية لحلول المعادلات التفاضلية.

١٦-٥ بعض نظريات الاستقرار:

نظرية (١): جميع حلول النظام

$$\underline{x}' = A(t)\underline{x} \qquad (1)$$

حيث $A(t)$ مصفوفة متصلة من الرتبة $n \times n$ على $[0,\infty)$ ، $\underline{x} \in R^n$، تكون مستقرة إذا وفقط إذا كانت محدودة.

البرهان: إذا كانت جميع حلول النظام الخطى (1) محدودة فإنه يوجد ثابت موجب M بحيث أن $\|\Phi(t)\| \le M$، $t \ge t_0$، حيث $\Phi(t)$ مصفوفة أساسية للنظام (1) ويحقق $\Phi(t_0) = I$، حيث I مصفوفة الوحدة. إذا كان $\varepsilon > 0$ فإن

$$\|\bar{\underline{x}}_0 - \underline{x}_0\| < \varepsilon / M = \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow$$

$$\|\underline{x}(t,t_0,\bar{\underline{x}}_0) - \underline{x}(t,t_0,\underline{x}_0)\| = \|\Phi(t)(\bar{\underline{x}}_0 - \underline{x}_0)\| \le M \, \|\bar{\underline{x}}_0 - \underline{x}_0\| < \varepsilon$$

وبالتالى جميع حلول النظام (1) تكون مستقرة. لاثبات العكس، ليكن جميع حلول (1) مستقرة، وعلى ذلك يكون حلها الصفرى $\underline{x}(t,t_0,0) \equiv 0$ مستقراً أيضاً. وبالتالى لأى $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ بحيث أن

$$\|\bar{\underline{x}}_0\| < \delta \Rightarrow \|\underline{x}(t,t_0,\bar{x}_0)\| < \varepsilon \quad , \quad t \ge t_0$$

ونعرف أن

$$\underline{x}(t,t_0,\bar{\underline{x}}_0) = \Phi(t)\underline{x}_0)$$

وبالتالى

$$\|\underline{x}(t,t_0,\bar{\underline{x}}_0)\| = \|\Phi(t)\bar{x}_0\| < \varepsilon$$

والآن ليكن $\bar{x}_0$ مع $\delta/2$ فى المركبة i^{th} وأصفاراً فى كل مكان آخر. فيكون لدينا

$$\|\Phi(t)\bar{x}_0\| = \|\phi_i(t)\| \delta/2 < \varepsilon$$

حيث ϕ_i هو العمود رقم i فى المصفوفة $\Phi(t)$. وعلى ذلك

$$\|\phi_i(t)\| < 2\varepsilon/\delta \quad , \quad t \geq t_0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

وهذا يؤدى إلى

لجميع $t \geq t_0$ ، $\|\Phi(t)\| \leq \dfrac{2n\varepsilon}{\delta} = M$

وبالتالى لأى حل يكون لدينا

$$\|\underline{x}(t, t_0, \bar{x}_0)\| = \|\Phi(t)\bar{x}_0\| < M \; \|\bar{x}_0\|$$

وبالتالى جميع حلول النظام (1) تكون محدودة.

نظرية (٢): إذا كانت جميع القيم الذاتية للمصفوفة A لها أجزاء حقيقة سالبة فإن كل حل للنظام

$$x^{*} = Ax \qquad (2)$$

حيث A مصفوفة ثابتة يكون مستقراً تقاربياً.

البرهان: حيث أن القيم الذاتية للمصفوفة A لها أجزاء حقيقية سالبة فإنه يوجد ثابتان M, α بحيث أن

$$\|\Phi(t)\| \leq M \exp[-\alpha(t - t_0)] \quad , \quad t \geq t_0$$

حيث Φ هى المصفوفة الأساسية للنظام (2) وتحقق $\Phi(t_0) = I$. ليكن $\underline{x}(t, t_0, \underline{x}_0)$، $\underline{x}(t, t_0, \bar{\underline{x}}_0)$ حلين للنظام (2) مع القيميتين الابتدائيين $\underline{x}_0$ ، $\bar{\underline{x}}_0$ عندما $t = t_0$.

وحيث أن $M \exp[-\alpha(t - t_0)]$ دالة تناقصية ولكل $\varepsilon > 0$ فإن العلاقة

$$\|\bar{\underline{x}}_0 - \underline{x}_0\| < \frac{\varepsilon}{2} M^{-1} = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\underline{x}(t, t_0, \bar{\underline{x}}_0) - \underline{x}(t, t_0, \underline{x}_0)\| \leq \|\Phi(t)\| \; \|\bar{\underline{x}}_0 - \underline{x}_0\|$$

$$\leq M \exp[-\alpha(t - t_0)] < \varepsilon$$

لكل $t \geq t_0$

أى أن عندما $t \to \infty$ فإن

$$\| \underline{x}(t, t_0, \bar{x}_0) - \underline{x}(t, t_0, x_0) \to 0 ,$$

وبالتالى جميع حلول النظام (2) تكون مستقرة تقاربياً.

ملحوظة: استقرار الحل غير الثابت للنظام الخطى غير المتجانس يمكن لختزاله إلى السؤال عن استقرار الحل الصفرى للنظام المتجانس المناظر كما يلى

ليكن لدينا النظام الخطى

$$\dot{\underline{x}} = A(t)\underline{x} + \underline{f}(t) \quad , \quad \underline{f} \in R^n \tag{3}$$

ونريد دراسة استقرار الحلول $x^*(t)$. ليكن $x(t)$ هو أى حل آخر ونعرف $\xi(t)$ بالعلاقة

$$\xi(t) = \underline{x}(t) - \underline{x}^*(t) \tag{4}$$

ويكون للشرط الابتدائى

$$\xi(t_0) = \underline{x}(t_0) - \underline{x}^*(t_0) \tag{5}$$

وأيضاً تحقق ξ المعادلة المتجانسة المناظرة إلى (3)

$$\dot{\underline{\xi}} = A(t)\underline{\xi} \tag{6}$$

ومن المقارنه (4)، (5)، (6) مع الشرط

$$\| (\underline{x}(t_0) - \underline{x}^*(t_0) \| < \delta \quad \Rightarrow \quad \| \underline{x}(t) - \underline{x}^*(t) \| < \varepsilon$$

نرى أن استقرار الحل $x^*(t)$ يكون مكافئا لاستقرار الحل الصفرى (البديهى) للنظام (6). ويسمى $\xi(t)$ باضطراب الحل $x^*(t)$.

وحيث أن التكوين الجديد للمسألة لا يعتمد على حل النظام (3) فإنه يمكن أن تصوغ النظرية التالية.

نظرية (٣): جميع حلول النظام الخطى (3) لها نفس خاصية الاستقرار التى للحل الصفرى (أو أى حل أخر) للمعادلة المتجانسة (6).

مثال (١): جميع حلول النظام $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 + f(t)$ تكون مستقرة ولكن ليست مستقرة تقاربياً، وتصبح المعادلة (5) $\dot{\xi}_1 = \xi_2, \dot{\xi}_2 = -\omega^2 \xi_1$. ويكون الحل الصفرى (نقطة الاتزان) مركزاً وله الخواص المعروفة.

مثال (٢): جميع حلول النظام $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -kx_2 - \omega^2 x_1 + f(t)$ مستقرة تقاربياً وتكون المعادلة (5) على الصورة

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \dot{\xi}_2 = -\omega^2 \xi_1 - k\xi_2$$

ويكو الحل الصفرى طبقا لنقطة السكون $\dot{\xi}_1 = \xi_2 = 0$ وهى عقدة مستقرة (أو لولبية) مستقرة تقاربياً.

نظرية (٤): إذا كان

(i) A مصفوفة ثابتة وقيمها الذاتية لها اجزاء حقيقة سالبة

(ii) $C(t)$ مصفوفة متصلة لكل $t \geq t_0$ وأن التكامل

$$\int_{t_0}^{t} \|C(t)\| dt$$

محدود على $t > t_0$ فإن جميع حلول النظام $\underline{\dot{x}} = (A + C(t))\underline{x}$ تكون مستقرة تقاربياً.

البرهان: نكتب النظام على الصورة

$$\underline{\dot{x}} = A\underline{x} + C(t)\underline{x} \tag{7}$$

وإذا كان $\underline{x}(t)$ حلا فإن $C(t)\underline{x}(t)$ دالة فى t فيكون لدينا حل المعادلة غير المتجانسة على الصورة

$$\underline{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t - s + t_0)\Phi^{-1}(t_0)C(s)\underline{x}(s)ds \tag{8}$$

حيث Φ هى المصفوفة الاساسية للنظام $\underline{\dot{x}} = A\underline{x}$ ، $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ وعلى ذلك يكون لدينا

$$\|\underline{x}(t)\| \le \|\Phi(t)\| \ \|\Phi^{-1}(t_0)\| \ \|\underline{x}_0\| + \qquad (9)$$
$$+\|\Phi^{-1}(t_0)\| \int_{t_0}^{t} \|\Phi(t-s+t_0)\| \ \|C(s)\| \ \|\underline{x}(s)\| ds$$

وحيث أن A لها قيمة ذاتية ذات أجزاء حقيقية سالبة فإنه يوجد ثابتان α، M بحيث أن

$$\|\Phi(t)\| \le Me^{-\alpha t} \qquad , \ t \ge t_0$$

وبوضع $\|\Phi^{-1}(t_0)\| = \beta$ نجد أن

$$\|\underline{x}(t)\| e^{\alpha t} \le M\beta \|\underline{x}_0\| + \int_{t_0}^{t} \{\|\underline{x}(s)\| e^{\alpha s}\}\{\|C(s)\| Me^{-\alpha t_0}\} ds \qquad (10)$$

بإستخدام متباينة جرونويل نجد أن

$$\|x(t)\| e^{\alpha t} \le M\beta \|x_0\| \exp\left(\beta Me^{-\alpha t_0} \int_{t_0}^{t} \|C(s)\| ds\right)$$

أى

$$\|x(t)\| \le M\beta \|x_0\| \exp\left(\beta Me^{-\alpha t_0} \int_{t_0}^{t} \|C(s)\| ds - \alpha t\right) \qquad (11)$$

وعلى ذلك يكون كل حل محدودا لكل $t \ge t_0$ و بالتالى يكون مستقرا. وايضا كل حل يؤول إلى الصفر عندما $t \to \infty$ وعلى ذلك مستقرّ تقاربياً.

نتيجة: إذا كانت $C(t)$ تحقق شروط النظرية و النظام $\dot{x} = Ax$ يكون تقريبا خطيا فان جميع حلول النظام $\dot{x} = (A + C(t))x$ تكون محدودة وبالتالى مستقرة.

يمكن دراسة إستقرار المعادلة التفاضلية من الرتبة n فاذا استبدلنا بالمعادلة

$$x^{(n)} + a_1(t)x_1^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)x_1 = f(t)$$

بالنظام المكافىء

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \ldots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \dot{x}_n = -a_1 x_n \ldots a_n x_1 + f(t) \qquad (12)$$

وتكون فئة القيم الابتدائية $\{x_1(t_0), x_2(t_0) ... x_n(t_0)\}$ المناظرة للقيم الابتدائية للمعادلة المعطاه

$$\{x_1(t_0), x_1'(1)(t_0) ... x_1^{(n-1)}(t_0)\}$$

وبالتالى لمناقشة استقرار حلول المعادلات بدلالة تعريف النظام نستخدم التمثيل (12). ويمكن إثبات أن النظام الذى حصلنا عليه بتحويل المتغيرات يضمن الاحتفاظ بخواص حلول النظام الأصلى.

مثال (٣): اثبت أن عندما $a > 0$، $b > 0$ تكون جميع حلول المعادلة

$$\ddot{x} + a\dot{x} + (b + ce^{-t}\cos t)x = 0$$

مستقرة تقاربيا لجميع $t \geq t_0$، لأى t_0.

الحل: يكون النظام المكافىء بوضع $\dot{x} = y$ هو

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -ce^{-t}\cos t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

أى

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}, C(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -ce^{-t}\cos t & 0 \end{pmatrix}$$

وتكون القيم الذاتية للمصفوفة A سالبة إذا كان $a > 0$، $b > 0$ وأيضا

$$\int_{t_0}^{\infty} \|C\| dt = |c| \int_{t_0}^{\infty} e^{-t} |\cos t| dt < \infty$$

ونرى أن جميع شروط النظرية مستوفاة وجميع حلول النظام (المعادلة) تكون مستقرة تقاربيا.

مثال (٤): لثبت أن جميع حلول المعادلة

$$\ddot{x} + \{a + c(1 + t^2)^{-1}\}x = f(t)$$

تكون مستقرة إذا كان $a > 0$.

الحل: بوضع $\dot{x} = y$ تؤول المعادلة إلى النظام

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -c(1+t^2)^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(y) \end{pmatrix}$$

جميع حلول النظام لها خاصية الاستقرار كحل صفرى (او أى حل آخر) للنظام المتجانس المناظر إلى

$$\dot{\xi} = (A + C(t))\xi$$

حيث

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}, C(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -c(1+t^2)^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

وتكون حلول النظام $\dot{\xi} = A\xi$ محدودة عندما $a > 0$ (الحل الصفرى يكون مركز فى مستوى الطور). أيضاً

$$\int_{t_0}^{\infty} \|C(t)\| dt = |c| \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} < \infty$$

وعلى ذلك من النتيجة السابقة جميع حلول النظام $\dot{\xi} = \{A + c(t)\}\xi$ محدودة وبالتالى مستقرة. (لاحظ أن المعادلة غير المتجانسة يمكن ان تعتمد على $f(t)$، قد يكون لها حدود غير محدودة ولكنها حلول مستقرة).

ملحوظة: فى باب سابق درسنا معرفة إستقرار المعادلات والنظم التفاضلية مستخدمين القيم الذاتية وكذلك تستخدم طريقة ليبانوف لدراسة الاستقرار فى باب لاحق.

تمارين

١- حل النظام $\ddot{x} = -\dot{y}(x^2+y^2)\ ,\qquad \dot{y}=x(x^2+y^2)$

واثبت أن الحل الصفرى يكون مستقراً والحلول الأخرى تكون غير مستقرة.

[استخدم التعويض $x = r\cos(r^2 t+\varphi),\qquad y = r\sin(r^2 t+\varphi)$]

واستنتج أن $\dot{\varphi}=0\ ,\ \dot{r}=0$ واثبت أنه فى هذه الاحداثيات تكون حلول النظام مستقرة.

٢- ادرس استقرار حلو النظام التالى

$$\text{(i)}\ \begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}e^t\ ,\qquad \text{(ii)}\ \ddot{x}+e^{-t}\dot{x}+x=0$$

٣- اثبت أن كل حل للنظام

$$\dot{x}=t^2x\ ,\ \dot{y}=-ty$$

يكون مستقر تقاربياً.

٤- المعادلة

$$\dot{x}+\alpha x+\epsilon x^3=\epsilon\gamma\cos wt$$

يكون لها حل تحت توافقى (subharmonic)

$$x=(4\gamma)^{2/3}\cos\frac{1}{3}wt$$

عندما $w^2=a\left(\alpha+\frac{3}{4^{1/3}}\varepsilon\gamma^{2/3}\right)$ اثبت أن هذا الحل مستقر.

٥- وقع كل نقاط الاتزان للمعادلة $\ddot{x}=x^2+a$ لجميع قيم البارامتر a

٦- ادرس استقرار النظام الخطى

a) $\dot{x}_1 = t^{-2}x_1 + 4x_2 - x_3 + t^2$

$\dot{x}_2 = -x_1 + t^{-2}x_2 + x_3 + t$

$\dot{x}_3 = t^{-2}x_1 - \alpha x_2 - 4x_3 + 1$

b) $\dot{x}_1 = 2x_1 + e^{-t}x_2 - 2x_3 + e^t$

$\dot{x}_2 = -x_1 + e^{-t}x_2 + x_3 + 1$

$\dot{x}_3 = (4 + e^{-t})x_1 - x_2 - 4x_3 + e^t$

٧- ادرس استقرار الحل الصفرى للنظام

(i) $\dot{x}_1 = e^{-x_1 - x_2} - 1,\ \dot{x}_2 = e^{-x_2 - x_3} - 1,\ \dot{x}_3 = -x_3$

(ii) $\ddot{x} + [\{1 + (t-1)|\dot{x}|\}/\{1 + t|\dot{x}|\}]\dot{x} + \frac{1}{4}x = 0$

٨- اثبت أن الحل الصفرى للمعادلة

$$u^1 = \begin{cases} u^2 \sin^2 \frac{1}{u} & ,u \neq 0 \\ 0 & u = 0 \end{cases}$$

ليس مستقر تقاربيا.

٩- اثبت أن إذا كان $1 < 2k < \frac{3}{2}, h \neq 0$ فإن النظام

$\dot{x}_1 = -kx_1 \quad , \quad \dot{x}_2 = he^{-kt} - (2t \sin 2t - \cos 2t + 2k)x_2$

ليس مستقرا فى $[0,\infty)$ ولكن يكون مستقرا تقاربيا إذا كان $1 < 2k, h = 0$

١٠- للمعادلة التفاضلية $u^1 = u(1-u)$، اثبت أن

(أ) الحل الصفرى $u(t) \equiv 0$ غير مستقر (ب) الحل $u \equiv 1$ مستقر تقاربيا

١١- ادرس استقرار الحلول $u \equiv 0$، $u \equiv 1$ للمعادلة $u^1 = u(u^2 - 1)$

واثبت أن حلها الصفرى $x \equiv 0$ يكون مستقر تقاربيا

١٢- ادرس استقرار النقاط الحرجة للنظام $\dot{x}_1 = 3x_1 + x_2, \dot{x}_2 = -\alpha_1 + x_2$

١٣- استخدم تعريف الاستقرار لدراسة استقرار النظم التالية

(i) $\frac{dx}{dt}+x=1, x(0)=1$, (ii) $\frac{dx}{dt}-x=1, \alpha(0)=-1$

(iii) $\frac{dx}{dt}=2, x(0)=0$, $\frac{dx}{dt}=2, x(0)=1$

١٤- اعتبر النظام $x'=0$, $y'=-x+y$

(i) اثبت أن المسارات خطوط مستقيمة وأن نقطة الأصل غير مستقرة.

١٥- اعتبر النظام $\dot{y}=x(1+y)$, $\dot{x}=-y(1+x)$. اثبت أن نقطة الأصل مستقرة ولكن ليست مستقرة تقاربياً.

الباب السابع عشر

طريقة ليبانوف

Lyapunov's method

١٧-١ **مقدمة:** سنتعرض فى هذا الباب لدراسة طريقة ليبانوف للمعادلات التفاضلية الذاتية وغير الذاتية وغير الخطية وكذلك إمكانية إيجادها. وتستخدم طريقة ليبانوف لدراسة استقرار حلول المعادلات التفاضلية

١٧-٢ **الانظمة الذاتية:** تعرضنا فى باب سابق لدراسة الاستقرار للنظم الخطية وغير الخطية بمقارنتها مع النظم الخطية. وفى أحيان كثيرة تفشل هذه الطريقة وخصوصاً إذا كان النظام الخطى مستقراً فقط. وقد تغلب العالم الرياضى الروسى Lyapunov أو (Liapunov) على هذه العقبات. لنفترض أنه لدينا نظام معادلات تفاضلية التى ينتج من وصف نظم فيزيائية. إذا كانت النقطة الحرجة تناظر نقطة أقل طاقة (Potential) للنظام وإذا كانت طاقة النظام ثابتة أو تتناقص فأنه يكون من المعقول أن نخمن بأن النقطة الحرجة تكون مستقرة. ومن الناحية الأخرى فإن النقطة الحرجة طبقاً لاقصى طاقة جهد فإن النقطة تكون غير مستقرة.

ليكن لدينا النظام الذاتى

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y) \qquad (1)$$

حيث نفترض ان نقطة الأصل نقطة حرجة. ليكن $V(x,y)$ دالة متغير حقيقى متصلة فى المستوى xy مع مشتقات جزئية متصلة من الرتبة الأولى. ليكن D منطقة تحتوى نقطة الأصل وأن $V(0,0)=0$ ، $V(x,y)>0$ لجميع (x,y) الأخرى فى D فانه يقال أن $V(x,y)$ موجبة حتما (positive definite) فى D. إذا كان $V(0,0)=0$ ، $V(x,y)<0$ لجميع (x,y) الأخرى فى D فانه يقال أن $V(x,y)$ سالبة حتما (negative definite) فى D. إذا كان $V(x,y)\geq 0$ (أو $V(x,y)\leq 0$) فانه يقال أن $V(x,y)$ شبه موجبه حتما (أو شبه سالبة حتما) positive semidefinite (negative semidefinite) فى D. إذا كان $V(x,y)$ لاتحقق أى من هذه الشروط فانه يقال أنها غير محددة.

مثال: (أ) الدالة $V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ موجبة حتما لجميع قيم x, y حيث x^2+y^2 هى مربع المسافة من النقطة (x,y) إلى نقطة الاصل.

(ب) الدالة $-(x^2+y^2)$ سالبة حتما.

(حـ) الدالة $V(x,y)=x^2$ شبه موجبه حتما لأن $V(0,\alpha)=0$ لأى قيمة للعدد الحقيقى α.

(د) الدالة $V(x,y)=-y^2$ شبه سالبة حتما.

(هـ) الدالة $V(x,y)=xy$ غير محددة، لأن $V(\alpha,\alpha)=\alpha^2>0$، $V(\alpha,-\alpha)=-\alpha^2<0$ لجميع الاعداد $\alpha>0$.

عادة الطاقة الكلية للنظام تتناسب مع x, y فى الحالة التى تكون فيها النظرية التالية محققة.

نظرية (١): تكون الدالة

$$V(x,y)=x^2+axy+by^2$$

(أ) موجبة حتما إذا وفقط إذا كان $4b^2-a^2>0$

(ب) شبه موجبة حتما إذا وفقط إذا كان $4b^2-a^2\geq 0$

البرهان: إذا كان $4b-a^2>0$ وباكمال المربع نجد أن

$$x^2+axy+bx^2=(x+\frac{a}{2}y)^2+(b-\frac{a^2}{4})y^2 \qquad (2)$$

إذا كان $y\neq 0$ فإن $\left[b-\frac{a^2}{4}\right]y^2>0$ من الافتراض وتكون $V(x,y)$ موجبة حتما. ومن الناحية الأخرى نفترض أن $\left[b-\frac{a^2}{4}\right]\leq 0$ وباختيار أى y غير صفرية $x=-\frac{a}{2}y,$ نجد أن التعبير (2) يكون أقل من أو يساوى الصفر والذى يتعارض مع الافتراض، حيث V موجبة حتما. وبالتالى $4b-a^2>0$ وهذا يثبت الجزء (أ) من النظرية. وبالمثل يمكن اثبات الجزء (ب).

ملحوظة: نلاحظ أن $V(x,y)$ سالبة حتما إذا وفقط لإذا كان $-V(x,y)$ موجبة جتما وعلى ذلك تكون النظرية السابقة صالحة فى حالة سالبة حتما وشبه حتما.

مثال (١):

(أ) الدالة $x^2-xy+2y^2$ تكون موجبة حتما لأن $4b^2-a^2=7>0$.

(ب) الدالة $V(x,y)=-x^2+4xy-4y^2$ شبه سالبه حتما، لأن $-V(x,y)=x^2-4xy+4y^2$ ، $4b^2-a^2=0$ ، $-V$ اكون شبه موجبة حتما.

(جـ) الدالة $x^2+4xy-4y^2$ غير محددة حيث لا V ولا $-V$ تنتمى إلى أى نوع من الانواع الأربعة.

ليكن $V(x,y)$ دالة موجبة حتما متصلة وقابلة للاشتقاق فإننا نعرف اشتقاق V على مسار النظام (1) بالعلاقة

$$V'(x,y)=\frac{\partial V}{\partial x}x'+\frac{\partial V}{\partial y}y'=\frac{\partial V}{\partial x}f(x,y)+\frac{\partial V}{\partial y}g(x,y) \qquad (3)$$

عندما تتحقق هذه العلاقة والنظام (1) فإن $V(x,y)$ تسمى بدالة ليبانوف للنظام. ونؤكد أنه لكى تكون دالة ليبانوف للنظام (1) فإنه يجب ان تحقق $V(x,y)$ قابلية الاشتقاق وموجبة حتما ولها مشتقات على مسارات معرفة بالعلاقة (3). ويجب أن نوكد أن $V(x,y)$ تكون دالة ليبانوف للنظام (1) فقط عندما تكون $V'(x,y)$ معرفة بالنسبة إلى (1) طبقا إلى (3). يوجد اختيارات كثيرة لدالة ليبانوف، ولكن أغلبها غير مفيد.

والأهمية العظمى لتعريف مشتقة V على مسارات (1) يعطى بالنظرية التالية:

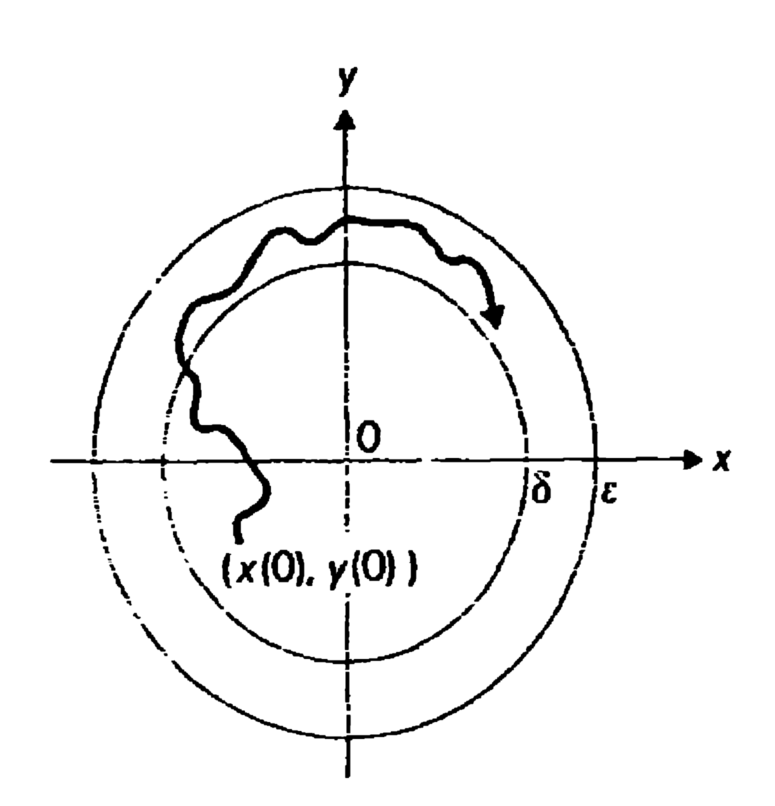
نظرية (٢): ليكن $V(x,y)$ دالة ليبانوف للنظام (1) فإن

(i) إذا كان $V'(x,y)$ شبه سالبة حتما فإن نقطة الأصل تكون مستقرة.

(ii) إذا كان $V'(x,y)$ سالبة حتما فإن نقطة الأصل تكون مستقرة تقاربياً.

(iii) إذا كان $V'(x,y)$ موجبة حتما فإن نقطة الأصل تكون غير مستقرة.

البرهان:



(i) ليكن $\varepsilon > 0$. يجب أن نثبت أنه يوجد $\delta > 0$ بحيث أنه إذا كان $(x_0, y_0) \in D$ وأن $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} < \delta$ فإن الحل $(x(t, x_0), y(t, y_0))$ يحقق المتباينة

$$\sqrt{[x(t, x_0)]^2 + [y(t, y_0)]^2} < \varepsilon$$

لجميع قيم $t \geq 0$. نعرف

$$m = \min_{\sqrt{x^2+y^2}=\varepsilon} V(x, y)$$

وهذه القيمة الأدنى تكون موجودة لأن $V(x, y)$ متصلة على الدائرة $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$. وعلاوة على ذلك من اتصال V وأن $V(0,0) = 0$ فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث أن $V(x, y) < m$ طالما $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} < \delta$ (كما فى الشكل). نفترض أنه يوجد عدد $t^* > 0$ بحيث $x^2(t^*, x_0) + y^2(t^*, y_0) = \varepsilon^2$. وبما أن $\frac{dV}{dt} = V'(x, y) \leq 0$ يكون لدينا

$$V(x(t, x_0), y(t, y_0)) \leq V(x_0, y_0), \quad t \geq 0$$

وبالتالى

$$V(x(t^*, x_0), y(t^*, y_0)) \leq V(x_0, y_0) < m \leq V(x(t^*, x_0), y(t^*, y_0)),$$

حيث أن m تكون أقل مايمكن على الدائرة $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ وهذا التناقض يثبت (i)، حيث أنه يبين أن $x(t, x_0)^2 + y(t, u_0)^2 < \varepsilon^2$ لجميع قيم $t \geq 0$.

(ii) من المعطيات أن V تتناقص عند تزايد t. وحيث أن V تكون موجبة لجميع قيم x ، y وتتناقص على المسار فإنه يوجد

$$\lim_{t \to \infty} V(x(t), y(t)) = \lambda \geq 0$$

وعلينا اثبات أن $\lambda = 0$ وحيث بالتالى $(0, 0)$ هى النقطة الوحيدة التى تكون عندها $V = 0$ وبالضرورة يكون لدينا

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

نفترض $\lambda > 0$، فإنه كما سبق يوجد $\eta > 0$ بحيث أن $V(x_0, y_0) < \lambda$ طالما $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} < \eta$ الذى يعنى أن المسار $(x(t), y(t))$ لايدخل أبداً المنطقة الحلقية المعطاه $x^2 + y^2 < \eta^2$. ليكن $\varepsilon > 0$ كما فى (i) وليكن أيضاً

$$m_1 = \min_{\eta \le \sqrt{x^2 + y^2} \le \varepsilon} -V'(x, y)$$

وحيث أن $\eta > 0$، V' سالبة حتما، يكون لدينا $m_1 > 0$. وبالتالى حيث $m_1 \le -V'(x, y)$ يكون لدينا $V'(x(t), y(t)) \le -m_1$ لجميع قيم $t \ge 0$. وبالتالى بالتكامل نحصل على

$$\int_0^t V'(x(s), y(s))ds \le \int_0^t -m_1 ds$$

أى

$$V(x(t), y(t)) - V(x_0, y_0) \le -m_1 t$$

أى

$$V(x(t), y(t)) \le V(x_0, y_0) - m_1 t$$

ولكن الطرف الأيمن من هذه المتباينة يصبح سالبا عندما $t \to \infty$ وهذا يتعارض مع كون V موجبة حتما إلا إذا كان $m_1 = 0$. ولكن $m_1 = 0$ إذا فقط وإذا كان $\eta = 0$ والتى تتحقق إذا وفقط إذا كان $\lambda = 0$ وهذا يثبت (ii) ويمكن إثبات (iii) بنفس الطريقة.

مثال (٢): ليكن لدينا النظام

$$x' = y, y' = -x - \varepsilon y$$

وأن دالة ليبانوف هى $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ وعلى ذلك

$$V'(x,y)=\frac{\partial V}{\partial x}x'+\frac{\partial V}{\partial y}y'=xy+y(-x-\varepsilon y)=-\varepsilon y^2$$

وهى شبه سالبة حتما وبالتالى تكون نقطة الأصل مستقرة.

مثال (٣): اعتبر النظام

$$\dot{x}=-y+xy,\quad \dot{y}=x-x^2$$

النقطة الحرجة هى نقطة الأصل. ليكن دالة ليبانوف هى $V=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

فإن

$$V'(x,y)=\frac{\partial V}{\partial x}x'+\frac{\partial V}{\partial y}y'=x(-y+xy)+y(x-x^2)=0$$

وحيث أن V موجبة حتما وان $\dot{V}=0$ فإن دالة ليبانوف تكون موجودة وبالتالى تكون نقطة الأصل مستقرة.

ملحوظة: نلاحظ أن نظرية (٢) لاتعطينا أحسن نتيجة ممكنة لأننا نعرف أن نقطة الأصل لهذا النظام مستقرة تقاربياً.

مثال (٤): فى حركة كتلة مربوطة فى زنبرك، مع عدم وجود احتكاك بافتراض أن قوة الاستعادة (restoring) تتناسب مع بعد الكتلة عن نقطة الأصل. وعادة نفترض أن قوة الاستعادة دالة غير خطية $-f(x)$ للمسافة من نقطة الأصل. وتكون معادلة الحركة هى

$$x''+f(x)=0 \qquad (1)$$

ولتحليل هذه المعادلة نفترض أن

$$f(0)=0,\quad xf(x)>0,\quad x\neq 0 \qquad (2)$$

أى أن x، $f(x)$ لهما نفس الاشارة. تسمى المعادلتان (1)، (2) بمعادلة الزنبرك غير الخطية. نكتب المعادلة (1) على الصورة

$$x'=y,\quad y'=-f(x) \qquad (3)$$

ومن الواضح أن نقطة الأصل نقطة حرجة للنظام (3) وطاقة الحركة لهذا النظام تتناسب مع مربع السرعة $x'(=y)$ بينما طاقة الوضع عند النقطة x تعطى بالعلاقة

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx$$

وتكون الطاقة الكلية للنظام هى

$$V(x,y)=F(x)+\frac{y^2}{2}$$

وحيث أن x، $f(x)$ لهما نفس الاشارة، $F\geq 0$، $V(x,y)$ تكون موجبه حتما. وعلاوة على ذلك $V'(x,y)$ تكون سالبه حتما لأن

$$V'(x,y)=F(x)x'+yy'=f(x)y+y(-f(x))=0$$

وبتطبيق نظرية (٢) تكون نقطة الأصل مستقرة. وفى هذه الحالة كما فى الحالة الخطية $x''+x=0$ ويمكن اثبات أن نقطة الأصل هى مركز.

مثال (٥): اعتبر النظام

$$x'=-x-\frac{x^3}{3}-x\sin y,\quad y'=-y-\frac{y^3}{3} \qquad (1)$$

الحل: نلاحظ أن نقطة الأصل نقطة حرجة (سكون). نعرف دالة ليبانوف كالتالى $V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

فإن

$$V'(x,y)=x\left(-x-\frac{x^3}{3}-x\sin y\right)+y\left(-y-\frac{y^3}{3}\right)$$

$$=-x^2-\frac{x^4}{3}-y^2-\frac{y^4}{3}-x^2\sin y$$

وحيث أن $|x^2\sin y|\leq|x^2|$ وبالتالى $x^2+x^2\sin y\geq 0$ وعلى ذلك

$$V'(x,y)=-\frac{x^4}{3}-y^2-\frac{x^4}{3}-(x^2+x^2\sin y)\le-\frac{x^4}{3}-y^2-\frac{y^4}{3}$$

ومن ذلك نرى أن V' سالبة حتما وتكون نقطة الأصل مستقرة تقاربيا.

مثال(٦): لعتبر النظام

$$x'=xy^2+x^2y+x^2\ ,\ \ y'=y^3-x^3$$

ليكن $V=x^2+axy+by^2$ ، $4b>a^2$. ومن نظرية (1) تكون V موجبة حتما وأن

$$V'=2x(xy^2+x^2y+x^3)+ax(y^3-x^3)$$
$$+ay(xy^2+x^2y+x^3)+2by(y^3-x^3)$$

إذا أخذنا $a=0$ ، $b=1$ فإن

$$V'=2x^2y^2+2x^3y+2x^4+2y^4-2y^3x=2(x^2y^2+x^4+y^4)$$

وهى موجبة حتما ومن نظرية (2) تكون نقطة الأصل غير مستقرة.

١٧-٣ الأنظمة غير الذاتية: Non autonomous system

النظريات المنصوص عليها للنظم الذاتية يمكن امتدادها للنظم غير الذاتية. وفى هذه الحالة يمكن أن تكون V دالة فى x، t.

تعريف: يمكن تعريف دالة ليبانوف $V(x,t)$ كما يلى

(أ) تكون دالة ليبانوف $V(x,t)$ **موجبة حتما** إذا كان

(i) لجميع قيم t ، $t\ge 0$ و $V(\underline{x},t)\ge W(\underline{x})>0$ حيث $W(\underline{x})$ دالة مطردة التزايد فى $\underline{x}$ ، $W(\underline{0})=0$

(ii) $V(\underline{0},t)=0$

(iii) $V(\underline{x},t)$ تكون متصلة ولها مشتقات جزئية من الرتبة الأولى متصلة.

(ب) تكون $V(\underline{x},t)$ **سالبة حتما** إذا كان $-V$ موجبة حتما

(جـ) تكون $V(\underline{x},t)$ **شبه موجبة** حتما إذا كان

(i) $V(\underline{x},t)\geq 0$ لجميع قيم $t\geq 0$.

(ii) $V(\underline{0},t)=\underline{0}$.

(iii) $V(\underline{x},t)$ دالة متصلة ولها مشتقات جزئية متصلة.

مثال (١): الدالة الموجبة حتما هى الدالة $V(x_1,x_2,t)=(x_1^2+x_2^2)(1+t^2)$

فى هذه الحالة نختار W على الصورة $W(x)=(x_1^2+x_2^2)$ ومنها نرى تحقق الشروط (i) ، (ii)، (iii).

مثال (٢): الدالة $V(x_1,x_2,t)=(x_1^2+x_2^2)e^{-t}$

هى الدالة الوحيدة شبه موجبة حتما لأن $V\rightarrow 0$ عندما $t\rightarrow\infty$ لقيم x_1، x_2 المحدودة.

واشتقاق $\dot{V}$ يعطى بالعلاقة.

$$\begin{aligned}\dot{V}&=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}\\&=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i\end{aligned}\qquad(6)$$

ملحوظة: تتحقق النظريات (١)، (٢)، (٣) فى البند ٢ لكل من النظم الذاتية وغير الذاتية. ونلاحظ أنه فى (ii) من النظرية يتطلب أن $\dot{V}$ يجب ان تكون سالبة حتما وهذا يعنى أن $-\dot{V}\geq W(x)>0$ كما فى الشرط (i). الشرط $\dot{V}<0$ غير كاف كما فى المثال التالى

مثال (٣): ادرس استقرار النظام التالى مستخدماً دالة ليبانوف المعتمدة على t.

(i) $\dot{x}_1=0,\ \dot{x}_2=0$ (١-أ)

(ii) $\dot{x}_1=-t^2x_1,\ \dot{x}_2=-tx_2$ (١-ب)

حل النظام (١- أ) يكون

$$x_1=x_{10}\quad,\quad x_2=x_{20}$$

حيث x_{10}، x_{20} ثابتان. ونلاحظ أن الحل مستقر وليس مستقر تقاربياً.

وكذلك يكون حل النظام (١- ب) هو

$$x_1 = x_{10}e^{-t^3/3} \quad , \quad x_2 = x_{20}e^{-t^2/2}$$

حيث x_{10}، x_{20} هى القيم الابتدائية للحلين x_1، x_2 . هذان الحلان مستقران تقاربياً.

نختار دالة ليبانوف المعرفة بالمعادلة

$$V = (x_1^2 + x_2^2)(1 + (1-t)^{-1}) \tag{2}$$

وبالاشتقاق نحصل على

$$\dot{V} = 2(x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2)[1 + (1+t)^{-1}] - (1+t)^{-2}(x_1^2 + x_2^2) \tag{3}$$

وباستخدام النظام المعطى (١ – أ) نجد أن

$$-\dot{V} = (1+t)^{-2}(x_1^2 + x_2^2) \tag{4}$$

من المعادلة (4) نستنتج أن $\dot{V}$ ليست سالبة حتماً لأن $(1+t)^{-2}(x_1^2 + x_2^2) \to 0$ عندما $t \to \infty$ وبالتالى الشرط $-\dot{V} > W(x)$ غير متحقق.

ولكن من المعادلتين (١ – ب)، (3) ينتج أن

$$-\dot{V} = x_1^2(2t^2[1 + (1+t)^{-1}] + (1+t)^{-2}) + x_2^2(2t[1 + (1+t)^{-1}] + (1+t)^{-2}) > x_1^2 + x_2^2 \tag{5}$$

ومن ذلك نستنتج أن $\dot{V}$ سالبة حتما وعليه يكون الحل مستقر تقاربياً.

١٧-٤ طرق إيجاد دالة ليبانوف:

لاتوجد طريقة عامة لإيجاد دالة ليبانوف وإختبارها يتوقف على الخبرة والتجربة ولكن توجد عدة طرق منها

أ) طريقة الميل المتغير: Variable gradient method

نعرف أنه لإثبات أن الحل مستقر تقاربياً فإننا نتطلب أن تكون V موجبة حتما وأن $\dot{V}$ سالبة حتما. ليكن $\text{grad } V$ (ميل V) على الصورة

$$gradV = \begin{bmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \qquad (1)$$

حيث α_{ij} دوال فى x_i وتختار بحيث تكون V فى المعادلة

$$\frac{dV}{dx} = grad\ V . \underline{f} = grad\ V . \underline{\dot{x}} \qquad (2)$$

سالبة حتما وتمثل المعادلة (2) معدل تغير V على مسار الحل حيث

$\dot{x}_1 = f(x,y)\quad , \quad \dot{x}_2 = g(x,y)$

ويمكن اختزال الحسابات بملاحظة ان $curl\ gradV = 0$ أى أن

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} - \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0 \qquad (3)$$

وبتكامل المعادلة (1) نحصل على

$$V = \int_0^{x_1} g_1 dx_1 + \int_0^{x_2} g_2 dx_2 + \ldots + \int_0^{x_n} g_n dx_n \qquad (4)$$

وتتضح الطريقة من المثال التالى:

مثال (١): استخدم طريقة الميل المتغير للحصول على دالة ليبانوف للنظام

$$\dot{x}_1 = -x_1^5 - 3x_2 \quad , \quad \dot{x}_2 = x_1^5 - 2x_2 \qquad (5)$$

واستخدم (2)، (1)، (5) نجد أن

$$\dot{V} = (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2)(-x_1^5 - 3x_2) + (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2)(x_1^5 - 2x_2)$$

$$= -x_1^6(\alpha_{11} - \alpha_{21}). + x_1x_2[-3\alpha_{11} - 2\alpha_{21} + x_1^4(\alpha_{22} - \alpha_{12})]$$

$$-x_2^2(3\alpha_{12} + 2\alpha_{22}) \qquad (6)$$

ولتأكيد أن تكون $\dot{V}$ سالبة حتما نختار α_{ij} بحيث أن معامل x_1x_2 تكون صفراً. والاختيار الوحيد الممكن لهذا هو:

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0 \ , \quad -3\alpha_{11} + \alpha_{22} x_1^4 = 0 \qquad (7)$$

بالتعويض فى (6) نجد أن

$$\dot{V} = -\frac{1}{3}\alpha_{22} x_1^{10} - 2\alpha_{22} x_2^2 \qquad (8)$$

وتكون $\dot{V}$ سالبة حتما إذا كان α_{22} موجبا وعلى ذلك من (1)، (7) نستنتج أن

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3\alpha_{22} x_1^5 \\ \alpha_{22} x_2 \end{bmatrix}$$

ونلاحظ أن المعادلة (2) قد تحققت أى أن

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_1} = 0$$

إذا كانت α_{22} ثابتا.

وتعطى الدالة V من (4): أى

$$V = \alpha_{22}\left[\frac{1}{3}\int_0^{x_1} x_1^5 dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 dx_2\right]$$
$$= \alpha_{22}\left(x_1^6 + ax_2^2\right)/18$$

ومن هذا نجد أن V موجبة حتما و $\dot{V}$ سالبه حتما ومنها نرى أن نقطة الأصل مستقرة تقاربيا.

(ب) طريقة زوبوف: Zubov's method

فى هذه الطريقة نفترض وجود دالة $\phi(\underline{x})$ بحيث أن

$$\dot{V} = grad\ V\ \underline{f} = -\phi(\underline{x}) \qquad (9)$$

وبتكامل (9) نحصل هلى V. والمعادلة (9) وهى معادلة تفاضلية جزئية من الصعب حلها. ونحتاج لتخمين $\phi(\underline{x})$ وهى أصعب من تخمين V والمثال التالى يوضح الطريقة.

مثال: أوجد دالة ليبانوف للنظام

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2^4 \quad , \quad \dot{x}_2 = -x_2$$

الحل: نختار ϕ على الصورة

$$\phi(x) = -24(x_1^2 + x_2^2)$$

وهى دالة سالبه حتما ، وعلى ذلك تصبح المعادلة (9)

$$(-2x_1 + 2x_2^4)\frac{\partial V}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial V}{\partial x_2} = -24(x_1^2 + x_2^2) \tag{10}$$

ويمكن حل المعادلة (9) بطريقة المميزات (characteristics) وتكون المعادلة المميزة هى

$$\frac{dx_1}{-2x_1 + 2x_2^4} = \frac{dx_2}{-2x_2} = \frac{dV}{-24(x_1^2 = x_2^2)} \tag{11}$$

ومنها نحصل على

$$x_2 dx_1 + (2x_1 - 2x_2^4)dx_2 = 0$$

ويكون عامل المكاملة $(1/x_2^3)$ ويكون الحل

$$x_1 = x_2^2(c - x_2^2) \tag{12}$$

حيث c ثابت

ومن (11)، (12) ينتج أن

$$\frac{dV}{dx_2} = 24x_2 + 24c^2x_2^3 - 48cx_2^5 + 24x_2^7$$

بالتكامل نجد أن

$$\begin{aligned} V &= 12x_2^2 + 6c^2x_2^4 - 8cx_2^6 + 3x_2^8 \\ &= 2x_1^2 + 12x_2^2 + (2x_1 + x_2^8)^2 \end{aligned}$$

وهذه الدالة موجبة حتما، $\dot{V}$ سالبة حتما وعليه فإن نقطة الاصل مستقرة تقاربيا.

(جـ) طريقة كراسوفسكى: Krasoviskii's method

ليكن لدينا النظام

$$\underline{x}' = \underline{f}(\underline{x}) \quad , \quad \underline{f}(0) = \underline{0} \qquad (13)$$

$\underline{f}(\underline{x}) \neq 0$ فى جوار $\underline{x} \neq 0$. تسمى المصفوفة الحقيقية المتماثلة $n \times n$

B بأنها موجبة حتما إذا كانت فقط الصورة التربيعية $\underline{x}^T B \underline{x}$ موجبة حتما وتسمى سالبة حتما إذا كان B - موجبة حتما أى أن $(-1)^j Be' B_j > 0$، $j = 1, 2, ..., n$.

نختار V بحيث أن

$$V = \underline{f}^T \underline{f} = \| \underline{f} \|^2 \qquad (14)$$

وهى موجبة حتما وبالاشتقاق نجد أن

$$\dot{V} = \dot{\underline{f}}^T \underline{f} + f^T \dot{\underline{f}} \qquad (15)$$

وباستخدام قاعدة السلسلة يمكن ان نكتب

$$\dot{\underline{f}} = (grad \, \underline{f}) \underline{f} \qquad (16)$$

وبأخذ مدور (transpose) الطرفين نجد أن

$$\dot{\underline{f}}^T = \underline{f}^T (grad \, \underline{f})^T \qquad (17)$$

ومن المعادلات (15)، (16) و (17) نحصل على

$$\dot{V} = \underline{f}^T [(grad \, \underline{f})^T + (grad \, f)] \underline{f} = \underline{f}^T \hat{M} \underline{f}$$

وحيث أن J هو الجاكوبى $\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}$ ، فيكون لدينا

$$\dot{V} = \underline{f}^T J^T f + f^T J \underline{f} = \underline{f}^T (J^T + J) \underline{f}$$
$$= \underline{f}^T (M) \underline{f}$$

إذا كانت محددات (M) سالبة حتما فيكون $\dot{V}$ سالبة حتما وتكون نقطة الاتزان مستقرة تقاربياً. وعلاوة على ذلك إذا كان $V(x) \to \infty$ عندما $\|x\| \to \infty$ فإن نقطة الاتزان تكون مستقرة تقاربيا شموليا.

وهذا يقودنا إلى النظرية التالية.

نظرية (١): إذا كانت V موجبه حتما ، $V \to \infty$ عندما $\|x\| \to \infty$ وكان $\dot{V}$ ساله حتما في المنطقة D ، فإن $\underline{x} = \underline{0}$ يكون مستقرا تقاربيا شموليا.

مثال (١): استخدم طريقة كراسوفسكى لتحديد نوع استقرار الحل الصفرى للنظام

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 - x_1^3 \quad , \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3$$

الحل: لدينا

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \underline{f} = \begin{bmatrix} -x_1 - x_2 - x_1^3 \\ x_1 - x_2 - x_2^3 \end{bmatrix}$$

$$J = grad\, \underline{f} = \begin{bmatrix} -1-3x_1^2 & -1 \\ 1 & -1-3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$J^T = \begin{bmatrix} -1-3x_1^2 & 1 \\ -1 & -1-3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$M = J + J^T = \begin{bmatrix} -2-6x_1^2 & 0 \\ 0 & -1-3x_2^2 \end{bmatrix}$$

وواضح أن كل محيددات المحدد M سالبة فإن

$$\underline{\dot{V}} = f^T M \; f$$

وحيث أن M سالبة حتما فتكون الحل الصفرى للنظام مستقرا تقاربيا.

(د) مقارنة بين طريقتى زوبوف وكراسوفسكى:

مثال: ناقش استقرار النظام

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2^4 \quad , \quad \dot{x}_2 = -x_2$$

الحل: فى هذه الحالة نستخدم اولا طريقة كراسوفسكى فيكون

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} -2x_1 + 2x_2^4 \\ -2x_2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

ويكون لدينا من المعادلات (14)، (18)

$$V = \underline{f}^T \underline{f} = (-2x_1 + 2x_2^4)^2 + x_2^2$$

وبالتالى فإن V موجبة حتما. وباشتقاق $\underline{f}$ نحصل على

$$M = J + J^T = \begin{bmatrix} -2 & 8x_2^2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 8x_2^2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8x_2^2 \\ 8x_2^2 & -2 \end{bmatrix}$$

العنصر الأول فى M هو 4-. M يكون سالباً حتماً إذا كان $|M|$ موجباً أى أن

$$8 - 64x_2^6 > 0$$

وتتحقق هذه المتباينة إذا كان $8x_2^6 < 1$ أى بالقرب من نقطة الأصل. والنتيجة التى حصلنا عليها أضعف من التى حصلنا عليها فى مثال طريقة زوبوف. وتكون $\dot{V}$ سالبة حتما لجميع قيم x وتكون نقطة الأصل مستقرة تقاربيا شموليا. وفى هذا المثال أمكننا استنتاج منطقة محددة للاستقرار التقاربى

$\|\underline{x}\| < \frac{1}{2}$. وبالتالى طريقة كراسوفسكى أسهل فى تطبيقها ولكن تعطى نتائج أضعف.

ملحوظة: من المعروف من معيار سلفستر (Sylvester) أن المصفوفة الحقيقية B، $n \times n$، $B = (b_{ij})$ تكون موجبة حتما إذا وفقط إذا كان

$$\det B_j = \det \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} \\ b_{12} & \dots & b_{2j} \\ b_{j1} & \dots & b_{jj} \end{vmatrix} > 0$$

حيث $j = 1,2,..n$، $\det B_j$ محيدد رئيسى للمصفوفة B.

تمارين

(١) اثبت أن حل النظام

$$x' = xy^2 - \frac{x^2}{2} \quad , \quad y' = -\frac{y^2}{x} + \frac{x^2 y}{5}$$

يكون مستقرا تقاربيا (تنويه: خذ $V = ax^2 + by^2$)

(٢) اعتبر النظام

$$x' = a_{11}x + a_{12}y \quad , \quad y' = a_{21}x + a_{22}y$$

ولفترض أن الحل الصفرى مستقر تقاربيا (أى الأجزاء الحقيقية لجذرى المعادلة المميزة سالبة. ليكن $(x_2(t), y_2(t))$ ، $(x_1(t), y_1(t))$ حلين للنظام ويحققان الشروط التالية

$$(x_1(0), y_1(0)) = (1,0) \quad , \quad (x_2(0), y_2(0)) = (1,0)$$

وعرف دالة ليبانوف بالتالى

$$V(x,y) = x^2 \int_0^{\infty} [x_1^2(t) + y_2^2(t)]dt + 2xy \int_0^{\infty} [x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t)]dt$$
$$+ y^2 \int_0^{\infty} [x_2^2(t) + y_2^2(t)]dt$$

اثبت أن: (أ) V تكون موجبة حتما

(ب) V' تكون سالبة حتما حول مسار النظام المعطى

(٣) استخدم نتائج التمرين 2 لايجاد دالة ليبانوف التى يمكن استخدامها لاثبات الاستقرار التقاربى للنظم التالية.

(i) $x' = -4x - y \quad , \quad y' = x - 2y$

(ii) $x' = -5x - 3y \quad , \quad y' = 4x + 2y$

(٤) بين نوع دالة ليبانوف فيما يلى

(i) $V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_1x_3$

(ii) $V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$

(iii) $V = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x$

(٥) ناقش استقرار النظام

$\dot{x}_1 = p(-x_1 + x_2),\ \ \dot{x}_2 = rx_1 - (x_2 + x_1x_3)$

$\dot{x}_3 = -bx_3 + x_1x_2$

حيث p، r، b ثوابت مستخدماً لحدى الدالتين

(i) $V = x_1^2 + p(x_2^2 + x_3^2)$, (ii) $V = \frac{1}{2}[rx_1^2 + px_2^2 + p(x_3 - 2r)^2]$

(٦) باختيار دالة ليبانوف المناسبة ادرس استقرار نقاط الاتزان

(i) $\dot{x}_1 = x_1 - 2x_2^2\ \ ,\ \ \dot{x}_2 = x_1x_2 - x_2^3$

(ii) $\ddot{x} + \dot{x}\sin x - x = 0$

(٧) استخدم طريقة الميل المتغير للحصول على دالة ليبانوف للانظمة التالية

(i) $\dot{x}_1 = x_1(x_2 - \alpha),\ \ \dot{x}_2 = x_2(x_1 - \beta)$

حيث α، β ثوابت

(ii) $\dot{x}_1 = x_2,\ \ \dot{x}_2 = -(x_1^3 + x_2)$

(٨) فى كل نظام، كون دالة ليبانوف على الصورة $V = Ax^2 + By^2$ حيث A، B ثوابت لتحديد ما إذا كانت النقطة الحرجة $(0, 0)$ لكل نظام مستقرة تقاربيا أو على الأقل مستقرة.

(i) $\dot{x} = -x + 2x^2 + y^2\ \ ;\ \ \dot{y} = -xy + 2y$

(ii) $\dot{x} = -x + y - x^3 - xy^2\ \ ,\ \ \dot{y} = -x - y - x^2y - y^3$

(iii) $\dot{x} = -x - y - x^3\ \ ,\ \ \dot{y} = x - y - y^2$

(iv) $\dot{x}=-3x=x^3+2xy^2 \quad , \quad \dot{y}=-2y+\frac{2}{3}y^3$

(٩) اختار دالة ليبانوف المناسبة لاثبات أن النقطة الحرجة $(0,0)$ للنظام

$\dot{x}_1=-2x_1+5x_2+x_2^2 \quad , \quad \dot{x}_2=-4x_1-2x_2=x_1^2$

تكون مستقرة تقاربيا فى جوار نقطة الأصل

(تنويه: استخدم $V=4x_1^2+5x_2^2$)

(١٠) اختار دالة ليبانوف المناسبة لاثبات أن الحل الصفرى للنظام

$\dot{x}_1=x_2+x_1(x_1^2+x_2^2)(ax_1^2+bx_2^2-1)$

$\dot{x}_2=-x_1+x_2(x_1^2+x_2^2)(ax_1^2+bx_2^2-1)$

حيث a، b ثوابت موجبة يكون مستقر تقاربيا فى المنطقة $ax_1^2+bx_2^2<1$

(١١) اختبر استقرار نقطة الاتزان $(0,0,0)$ للنظام

$x_1'=x_1-x_2+x_3-xx_2^2$

$x_2'=x_1+2x_2-2x_3-x_1^2x_2+2x_3^2$

$x_3'=x_1-2x_2-x_3+2x_2x_3$

(تنويه: استخدم $V=x_1^2+x_2^2-x_3^2$)

(١٢) كون دالة ليبانوف للنظام $x'=Ax$ حيث

$$\text{(i)}\ A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-8&-14&-7\end{pmatrix} \quad , \quad \text{(ii)}\ A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-4&-6\end{pmatrix}$$

(١٣) فى المسائل التالية أوجد دالة ليبانوف على الصورة $V=Ax^2+By^2$ لاستخدامها لمعرفة إستقرار أو إستقرار تقاربى لنقطة الأصل.

(i) $x'=-3x-2y, \quad y'=2x-3y$

(ii) $x'=2x_*-2y, \quad y'=-x_*-4y+x\sin x$

(iii) $x' = -2x + 2y, \quad y' = -2x - 2y$

(iv) $x' = y, \quad y' = -(x_1^2 + 2)y - x$

(١٤) فى المسائل التالية إستخدم دالة ليبانوف لدراسة استقرار نقطة الأصل

(i) $x' = 2y, \quad y' = -3x_1 - 3y^3, \quad V = 3x^2 + 2y^2$

(ii) $x' = y, \quad y' = -4x_1 - x^2y - y^3, \quad V = 4x_1^2 + y^2$

(iii) $x' = -x_1 + 6y, \quad y' = -x_1 - 2y, \quad V = x_1^2 + 2y^2$

(iv) $x' = y, \quad y' = -x^2y - y^3, \quad V = x^4 + y^2$

(١٥) المعادلة $y'' + y' + y = 0$ يمكن كتابتها على الصورة

$y_1' + y_2, \quad y_2' = -y_1 - y_2$

فإذا اعطينا $V = dy_1^2 + y_1y_2 + y_2^2$ ماهى الشروط على d لكى تكون V موجبة حتما ؟، V' تكون سالبة حتما.

(١٨) للنظام $x' = y, y' = -2y - x$. اوجد دالة ليبانوف على الصورة $V = ax^2 + 2bxy + by^2$ بحيث أن V' تكون سالبة حتما.

الثامن عشر

التفرع

Bifurcation

١٨-١ مقدمة: يفترض غالبا، أن أى تغير بسيط فى المدخلات تؤدى إلى تغيير بسيط فى المخرجات. أى أن المخرجات دالة متصلة فى المدخلات، وهذا ليس دائماً صحيحاً. نعتبر عملية التسخين فى غلاية الماء، فإنه بالقرب من نقطة الغليان، أى زيادة بسيطة فى درجة الحرارة تؤدى إلى تغير الحالة من سائله إلى بخار، وهذا تغير كيفى. ونظرية التفرع هى دراسة النقطة التى عندها يتغير السلوك الكيفى للنظام. وهذه الظاهرة موجودة فى النظم الحيوية والدوائر الكهربية والتى تصاغ فى صورة معادلات تفاضلية.

وعادة تحتوى المعادلات الديناميكية بارامترات أو ثوابت بجانب المتغيرات الديناميكية ومثال ذلك

(أ) معدل النمو للفرد (per capita) a، فى معادلة كثافة السكان (population)

$$\dot{x} = ax \qquad (1)$$

(ب) التردد الطبيعى ، w_0، وثابت الاخماد k فى المتذبذب التوافقى

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + w_0^2 x = 0$$

(جـ) الكمية μ فى معادلة فان دير بول

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

حيث a، w_0 ، μ بارامترات.

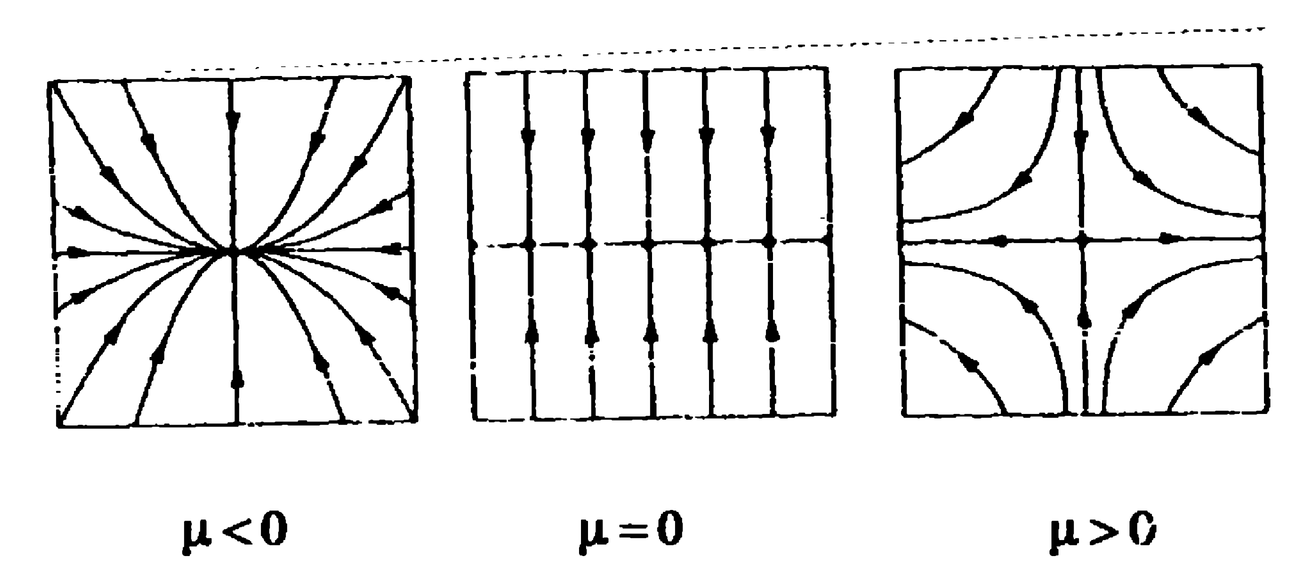
١٨-٢ التفرع

نعنى بتفرع حل معادلة تفاضلية بالتغيرات فى السلوك الكيفى فى شكل الطور بتغير البارامتر (أو بارامترات). فمثلا المعادلة (1) لها حل جاذب عند $x = 0$ إذا كان $a < 0$ ، وطارد إذا كان $a > 0$. وبزيادة a من سالب إلى موجب ومرورها بنقطة الأصل فإن الحل يتغير كدالة تناقصية إلى دالة تزادية فى t.

وفى هذه الحالة يقال أن للمعادلة التفاضلية لها نقطة تفرع عند $a = 0$.
وبالمثل النظام

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 \quad , \quad \dot{x}_2 = -x_2 \qquad (2)$$

حيث $\mu \in R$ يحدث لها تفرع عندما $\mu = 0$. وهنا يحدث تغير كيفى فى شكل الطور (phase portrait) عندما تتغير μ من $\mu < 0$ إلى $\mu = 0$ وإلى $\mu > 0$ كما فى الشكل



$\mu < 0$ $\qquad$ $\mu = 0$ $\qquad$ $\mu > 0$

عندما تكون $\mu < 0$ يكون شكل الطور عقدة مستقرة، وعندما $\mu = 0$ يكون شكل الطور لنقطة اتزان ليست بسيطة وعندما تكون $\mu > 0$ يكون شكل الطور نقطة سرج كما فى الشكل

مثال (١): اوجد انواع الاختلاف الكيفى فى شكل الطور للنظام ذا البارامتر الواحد

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \quad , \quad \dot{x}_2 = x_1 + \mu x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \qquad (3)$$

عندما تزداد μ من $-\infty$ إلى ∞ .

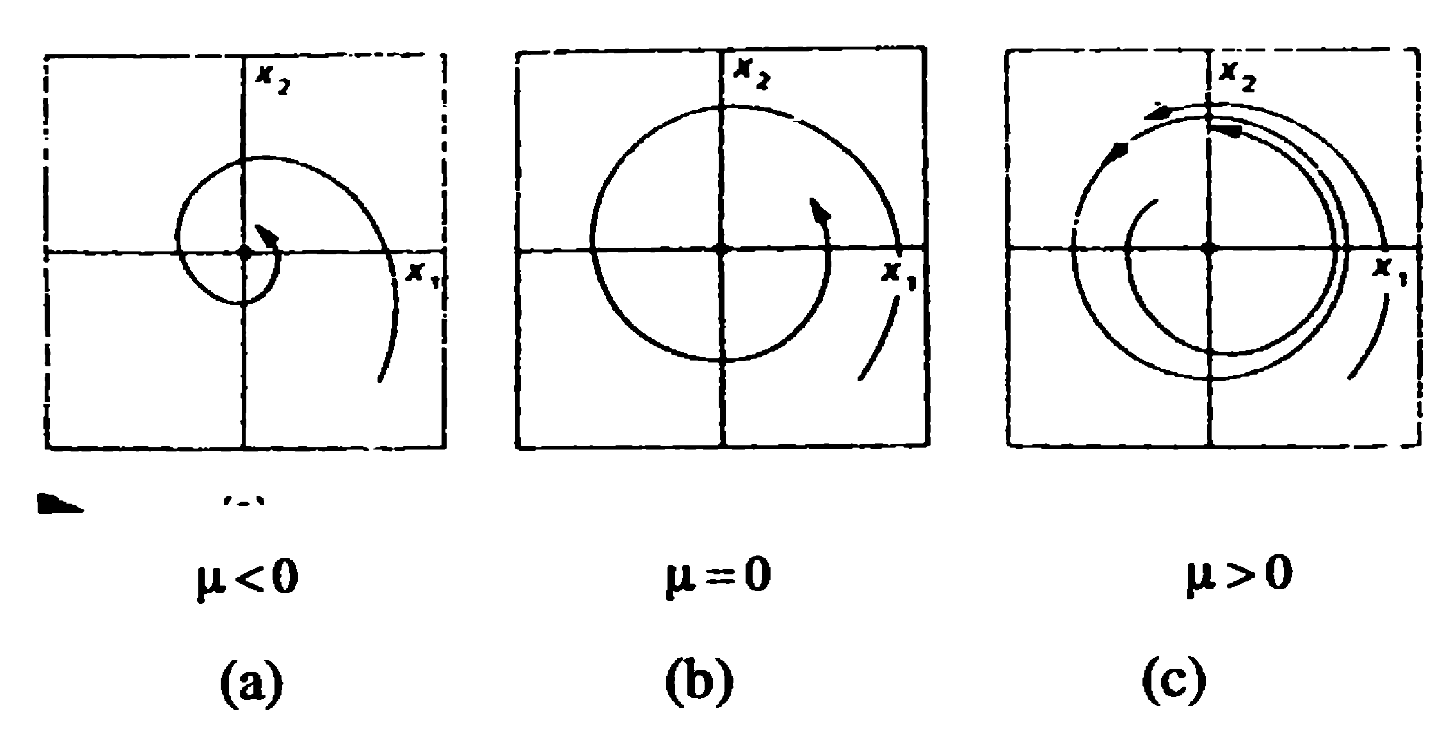
الحل: يمكن تبسيط النظام (3) باستخدام الاخداثيات القطبية إلى

$$\dot{r} = r(\mu - r^2) \quad , \quad \dot{\theta} = 1 \qquad (4)$$

إذا كانت $\mu < 0$ ، فإن $\dot{r} = 0$ عندما $r = 0$ وإلا $r < 0$. وبالتالى لجميع قيم μ السالبه يكون شكل الطور لولبيات جانبة. عندما $\mu = 0$ فإن $\dot{r} = -r^3$ ويكون شكل الطور أيضا لولبيا جاذباً ويكون المسارات اللولبية ضعيفة (حيث فى النظام الحظى المناظر تكون نقطة الاتزان مركز عندما $\mu = 0$). إذا كانت

$\mu > 0$ تكون نقطة الاتزان غير مستقرة لأن $\dot{r} > 0$ عندما يكون $0 < r < \sqrt{\mu}$.
والدالتان $r = \sqrt{\mu}$، $\theta = t$ هى حلول النظام (4) وبالتالى تكون الدائرة $r = \sqrt{\mu}$ مسار مغلق. وعندما تكون $r > \sqrt{\mu}$، $\dot{r} < 0$ يكون المسار المغلق دائرة نهاية مستقرة والمسارات تدور لولبيا إلى هذه الدائرة من الجهتين.

ولأنواع الاختلاف الكيفى لشكل الطور كما فى الشكل



$\mu < 0$ $\mu = 0$ $\mu > 0$

(a) (b) (c)

ومن ذلك نرى أن النظام (3) يحدث له تفرع عندما $\mu = 0$.

نلاحظ أن القيم الذاتية للنظام الخطى المناظر (linearization) للنظام (3) عند (0, 0) هى $\mu \pm i$ وتكون تخيلية صرفا (أو بحته) (pure) عند نقطة التفرع $\mu = 0$. عند $\mu > 0$ توجد دورة نهاية (limit cycle) التى تنمو تدريجيا فى الحجم بعيداً من نقطة الاتزان (النقطة الثابتة) بزيادة μ. وهذا مثال لتفرع هوبف (Hoph bifurcation) والأن سنعطى الشروط اللازمه لظهور دائرة النهاية بهذه الطريقة.

٣–١٨ تفرع هوبف: (Hoph bifurcation)

تنشأ رياضياً المسارات الدورية من ظاهرة تفرع هوبف. ويحدث هذا التفرع عندما تكون زوج القيم الذاتية المركبة يعبران المحور التخيلى عندما يتغير (يتحرك) البارامتر μ.

نظرية (١): (تفرع هوبف)

ليكن لدينا النظام ذو البارامتر

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \mu) \quad , \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \mu) \qquad (1)$$

الذي له نقطة ثابتة (نقطة اتزان) عند نقطة الأصل لجميع القيم الحقيقية للبارامتر μ. نفترض أيضا أن القيم الذاتية للنظام الخطى المناظر للنظام (1) هى $\lambda_1(\mu)$، $\lambda_2(\mu)$ وتكون تخيلية صرفه عندما $\mu = \mu_0$. إذا كان الجزء الحقيقى للقيم الذاتية $\{\mathrm{Re}[\lambda_1(u)] \{= \mathrm{Re}[\lambda_2(\mu)]\}$ تحقق الشرط $\frac{d}{d\mu}[\mathrm{Re}(\lambda_1(u))]_{\mu=\mu_0} > 0$

وتكون نقطة الأصل مستقرة تقاربياً عندما $\mu = \mu_0$ فإن

(أ) تكون $\mu = \mu_0$ نقطة تفرع للنظام

(ب) لبعض $\mu \in \{\mu_1, u_0\}$ ، $\mu_1 < \mu_0$ تكون نقطة الأصل بؤرة مستقرة

(جـ) لبعض $\mu \in \{u_0, \mu_1\}$ ، $\mu_2 > \dot{\mu}_0$ تكون نقطة الأصل بؤرة غير مستقرة محاطة بدورة نهاية مستقرة يزداد حجمها بزيادة μ

ويتميز تفرع هوبف بتغير الاستقرار للنقطة الثابتة مصاحبة بتكوين دورة نهاية. وتعطى النظرية السابقة شروط صريحة لحدوث مثل هذا التفرع عندما $\mu = \mu_0$.

مثال (١): أثبت أن النظام ذا البارامتر

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 - 2x_2 - 2x_1(x_1^2 + x_2^2)^2$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - \mu x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)^2 \qquad (1)$$

يحدث له تفرع هوبف عند نقطة الأصل عندما $\mu = 0$

الحل: نقطة الأصل هى النقطة الحرجة لجميع قيم μ. ويكون النظام الخطى المناظر للنظام (1) هو

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 - 2x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 + \mu x_2 \qquad (2)$$

والذى له القيم الذاتية $\lambda_1(u),\lambda_2(a)=\mu+2i$ وبالتالى عند $\mu=0$ يكون $\lambda_1(0),\lambda_2(0)=\pm 2i$ وأيضا $\frac{d}{d\mu}\operatorname{Re}(\lambda_1(u))\Big|_{u=0}=1>0$. وباستخدام النظرية السابقة يكون للنظام تفرع هوبف عند $\mu=0$. النظام (2) مع $\mu=0$ له دالة ليبانوف

$$V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2 \tag{3}$$

وكذلك

$$\dot{V}(x_1,x_2)=-2(2x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_2^2)^2$$

وعلى ذلك تكون نقطة الأصل مستقرة تقاربيا. وبالتالى من النظرية السابقة فإن النظام يتفرع ليعطى دائرة النهاية مستقرة والتى تحيط بنقطة الأصل لفترة لقيم μ الموجبة.

إذا تعذر إيجاد دالة ليبانوف للتأكد من أن نقطة الأصل مستقرة تقاربياً عندما تكون قيمة μ عند نقطة التفرع μ_0 فإن النظام الخطى المناظر لايمكن أن يحدد طبيعة النقطة الحرجة غير الخطية لأن النظام الخطى يكون دائماً مركزا. ويكون الدليل I والذى يمكن به تحديد الاستقرار عند $\mu=\mu_0$، ويكون حسابه كما يلى:

(أ) نوجد النظام الخطى المناظر للنظام (1) وهو $\dot{\underline{x}}=Ax$ عند نقطة الأصل عندما $\mu=\mu_0$.

(ب) نوجد المصفوفة غير الشاذة M بحيث أن

$$M^{-1}AM=\begin{bmatrix} 0 & |\omega_0| \\ -|\omega_0| & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

حيث القيم الذاتية للمصفوفة A هى $\pm i\omega_0$.

(جـ) نحول النظام $\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2,\mu)$ ، $\dot{x}_2=f_2(x_1,x_2,\mu_0)$

باستبدال المتغيرات $x=My$ إلى $\dot{y}_1=Y_1(y_1,y_2),\dot{y}_2=Y_2(y_1,y_2)$

(د) يحسب الدليل I كالتالى:

$$I = |\omega_0|(Y_{111}^{1} + Y_{122}^{1} + Y_{112}^{2} + Y_{222}^{2}) + (Y_{11}^{1}Y_{11}^{2} - Y_{11}^{1}Y_{12}^{1} + Y_{11}^{3}Y_{12}^{2}) +$$

$$+(Y_{22}^{3}Y_{12}^{2} - Y_{22}^{1}Y_{12}^{1} - Y_{22}^{12}Y_{22}^{2})$$

حيث

$$Y_{ik}^{i} = \frac{\partial Y_i^2}{\partial y_j \partial y_k}(0,0), \qquad Y_{jk\ell}^{i} = \frac{\partial^3 Y_i}{\partial y_j \partial y_k \partial y_\ell}(0,0)$$

إذا كان الدليل I سالباً فتكون نقطة الأصل مستقرة تقاربياً.

مثال (٢): أثبت أن المعادلة

$$\ddot{x} + (x^2 - \mu)\ \dot{x} + 2x + x^3 = 0 \qquad (1)$$

لها نقطة تفرع عند $\mu = 0$ وتكون تذبذبية لبعض قيم $\mu > 0$.

الحل: يمكن كتابة (1) على الصورة

$$\dot{x} = x_2,\ \ \dot{x}_2 = -(x_1^2 - \mu)x_2 - 2x_1 - x_1^3 \qquad (2)$$

والذى تكون نقطة الأصل نقطة حرجة. والقيم الذاتية للنظام الخطى هى $\lambda = [\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 8}]/2$، وعند $\mu = 0$ تكون تخيلية صرفه (بحته) وأن $\frac{d}{d\mu}\mathrm{Re}(\lambda)\ |_{\mu=0} = 1/2 > 0$. والنظام الخطى المناظر للنظام (6) هو

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

ومنه نرى أن مصفوفة المعاملات ليست فى الصورة المطلوبة لحساب الدليل I.

المصفوفة $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ لها الخاصية

$$M^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \mu \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

كما هو مطلوب فى (2). باستبدال المتغيرات $x = My$ تحول النظام (6) مع $\mu = 0$ إلى

$$\dot{y}_1 = \sqrt{2}, \quad \dot{y}_2 = -\sqrt{2}y_1 - y_1^2 y_2 - y_1^3/\sqrt{2} \qquad (4)$$

والأن يمكن حساب الدليل ويكون $-2\sqrt{2}$.

وبالتالى عندما تزداد μ خلال نقطة الأصل فالنظام يتفرع إلى دائرة (دورة) نهاية مستقرة تحيط نقطة حرجة غير مستقرة عند نقطة الأصل. والنظام (6) فى مستوى الطور ممثلاً المعادلة (5)، ووجود مسار مغلق يؤدى إلى أن $x(t)$ تتذبذب لبعض $\mu = 0$.

مثال (٣): (تفرع هويف)

ادرس حلول النظام

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned} \qquad (1)$$

حيث μ بارامتر.

الحل: تكون نقطة الأصل نقطة إتزان وباستخدام الاحداثيات القطنية يؤول النظام (1) إلى

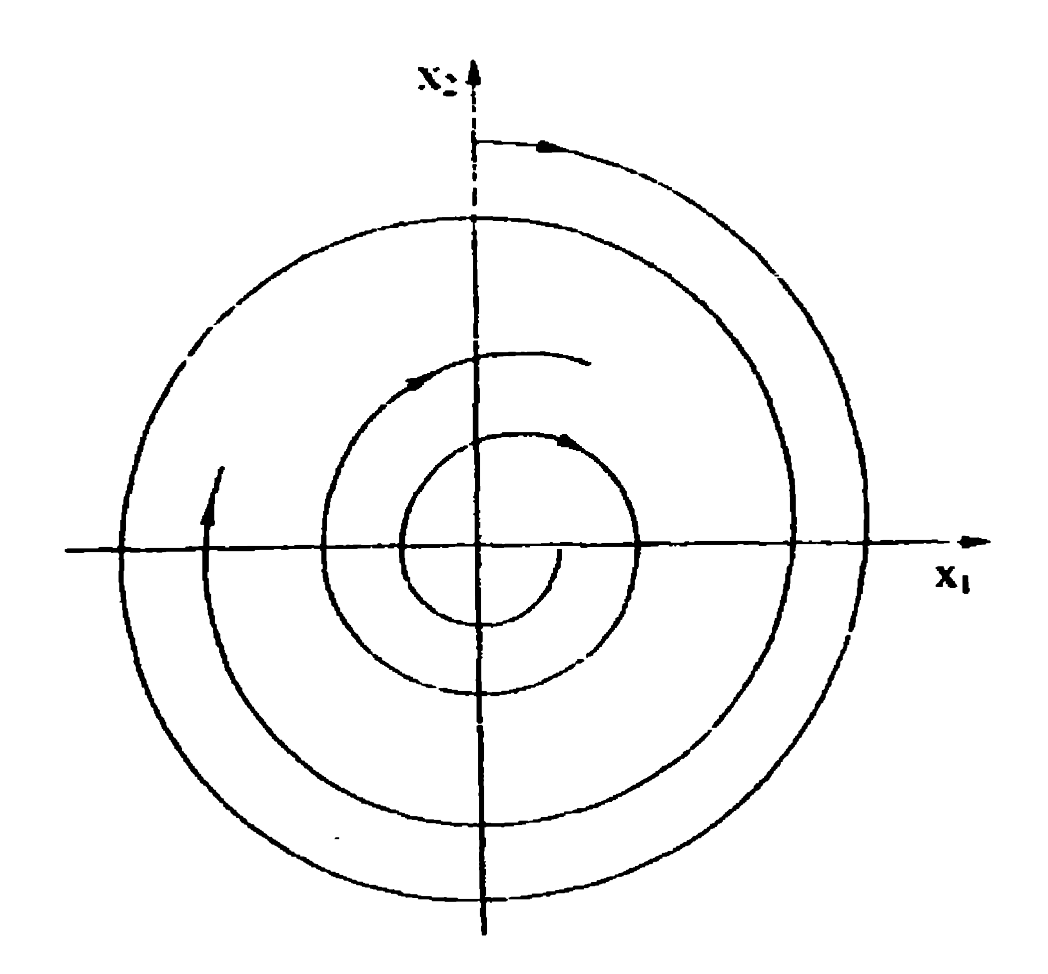
$$\dot{r} = r(\mu - r^2) \quad , \quad \dot{\theta} = -1 \qquad (2)$$

ويكون حل هذا النظام هو

$$\dot{r} = \mu/(1 + c_1 e^{-2\mu t}) \quad , \quad \theta = -t + c_1 \qquad (3)$$

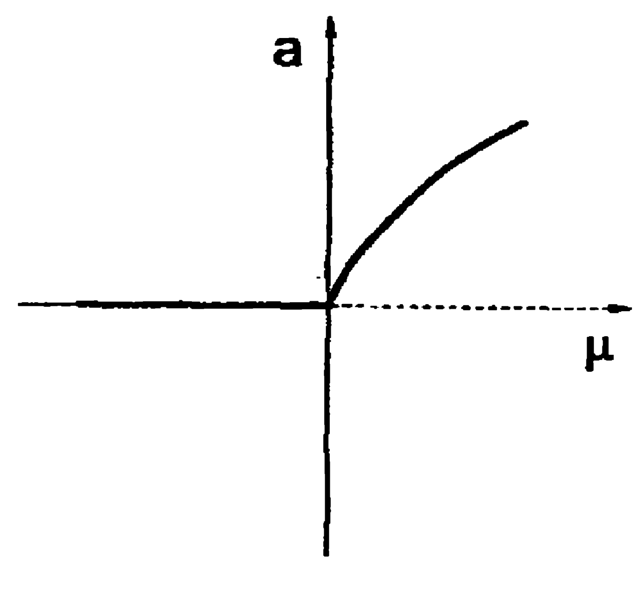
حيث c_0، c_1 ثوابت

من المعادلة (2) نستنتج أنه إذا كان $\mu < 0$ فإن $r \to 0$ عندما $t \to \infty$ وتدور المسارات لولبيا فى اتجاه نقطة الاتزان. وإذا كان $\mu > 0$ فإن المسارات تدور لولبيا فى اتجاه الدائرة التى نصف قطرها $\sqrt{\mu}$، أى أن نقطة الاتزان غير مستقرة (r لا تؤول إلى الصفر) ولكن $|r|$ لا يؤول إلى ∞ ولكنه يؤول إلى $\sqrt{\mu}$. وبالتالى تؤول الحلول غير المستقرة إلى الحل الدورى وتكون المسارات كما فى الشكل (أ)



شكل (أ)

وتكون نقطة التفرع $\mu = 0$ وأنه إذا شاركنا صاحبنا (associate) الحل الدورى مع السعه a، يكون شكل التفرغ كما فى الشكل (ب) وهذا هو تفرع هوبف



شكل (ب)

بينا فى هذين المثالين تركيبة واختلاف ظاهرة التفرغ فى بعدين تكون اكثر ثراء عن ذات البعد الواحد، وعلى وجه الخصوص الحل غير المستقر يمكن أن يؤول إلى حل دورى. ويكون تفرغ هوبف مفيداً فى كثير من التطبيقات

وسنسرد نظرية عن ذلك.

النظرية التالية تربط بين التفرع والحلول الدورية

نظرية (٢): ليكن لدينا النظام

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1 x_2, \mu) \quad , \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1 x_2, \mu) \qquad (8)$$

حيث $(0,0,\mu_0)$ نقطة إتزان. لتكن مصفوفة الجاكوبي

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \partial f_1/\partial x_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \partial f_2/\partial x_2 \end{bmatrix}_{(0,0)}$$

لها القيمتان الذاتيان $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ حيث $\alpha(\mu_0) = 0, \ \beta(\mu_0) \neq 0$ ، $\partial\alpha/\partial\mu|_{\mu_0} \neq 0$

فإن فى جوار $(0,0,\mu_0)$ يوجد حل دورى غير صفرى.

ونوضح هذه النظرية بالمثال التالى.

مثال (٤): اثبت أن النظام

$$\frac{dx_1}{dt} = 1 - (1+\mu)x_1 + a x_1^2 x_2 \qquad (1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \mu x_1 - a x_1^2 x_2$$

له حل دورى

الحل: لدينا

$$\frac{dx_1}{dt} = -1(1+\mu)x_1 + a x_1^2 x_2 \qquad (2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \mu x_1 - a x_1^2 x_2$$

حيث نقطة الاتزان $(1,\mu/a)$. وبنقل نقطة الأصل إلى $(1,\mu/a)$ مستخدماً التحويل

$$x_1^* = x_1 - 1 \quad , \quad x_2^* = x_2 - (\mu/a)$$

وتصبح المعادلتان (2) على الصورة

$$\dot{x}_1^* = x_1^*(\mu-1) + ax_2^* + 2ax_1^*x_2^* + x_1^{*2}(ax_2^* + \mu)$$

$$\dot{x}_2^* = -\mu x_1^* - ax_2^* - 2ax_1^*x_2^* - x_1^{*2}(\mu + ax_2^*)$$

وتكون مصفوفة الجاكوبى

$$J = \begin{bmatrix} \mu-1 & a \\ -\mu & -a \end{bmatrix}$$

والقيمتان الذاتيتان هما

$$\alpha \pm i\beta = \frac{1}{2}\left\{(1+a-\mu) \pm \sqrt{(1+a-\mu)^2 - 4a}\right\} \qquad (3)$$

وتكون القيمتان الذاتيتان تخيليتين صرفا إذا كان

$$\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \mu_0 = 1 + a \qquad (4)$$

ومن (3) نستنتج أن

$$\frac{d\alpha}{d\mu} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

ونجد أن كل شروط النظرية محققة وبذلك يكون فى جوار

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = \mu/a \quad , \quad \mu = 1 + a$$

يوجد حل دورى.

نلاحظ أن نقطة التفرع μ_0 معطاه بالمعادلة (4).

مثال (٥): اثبت أن معادلة فان ديربول

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad , \quad \dot{x}_2 = x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2 \qquad (1)$$

لها حل دورى.

الحل: نقطة الأتزان للنظام (1) هى $(0,0,\mu_0)$ ويكون الجاكوبى

$$J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & \mu\end{pmatrix}$$

وتكون القيم الذاتية للجاكوبى J هى

$$\alpha \pm i\beta=\frac{1}{2}[-\mu \pm \sqrt{\mu^2-4}] \qquad (2)$$

وتكون القيم الذاتية تخيلية صرف إذا كان

$$\mu=\mu_0=0$$

وتكون نقطة التفرع هى $(0,0,0)$ ومن المعادلة (2) نجد أن

$$\frac{d\alpha}{d\mu}=-1\neq 0$$

وجميع شروط نظرية (2) متحققة وان النظام (1) له حل دورى كما بينا ذلك فى حل نفس المثال فى باب الحلول الدورية.

١٨-٤ تطبيقات

مثال (٦): (نظام كيميائى)

نتعرض لدراسة نموذج ظاهرة التنبذب للنظم الكيميائية ليكن لدينا فئة التفاعلات الكيميائية

$$\begin{aligned} A &\to X\\ B+X &\to Y+D\\ 2X+Y &\to 3X\\ X &\to E \end{aligned} \qquad (1)$$

حيث نمهل التفاعلات العكسية والتركيز الابتدائى والنهائى لتركيز المنتجات A، B، D، E تكون ثابتة. ومعادلات الحركة الكيميائية الناتجة هى

$$\dot{X}=a-(b+1)X+X^2Y\,,\;\; \dot{Y}=-bX-X^2Y \qquad (2)$$

حيث a، b بارلمتران موجبان. يوجد نقطة ثابتة وحيدة (حرجة) P عند $(a,b/a)$. والنظام الخطى للنظام (2) عند P يكون له مصفوفة المعاملات

$$\left.\begin{pmatrix} 2XY-b-1 & X^2 \\ b-2XY & X^2 \end{pmatrix}\right|_{(a,b/a)} = \begin{bmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

ومحدة هذه المصفوفة هى a^2 وبالتالى يكون إستقرار P يحدد بأثر (trace) المصفوفة.

وتكون النقطة الحرجة مستقرة إذا كان $a^2+1>b$ وغير مستقرة عند $a^2+1<b$.

ولاستخدم نظرية تفرع هويف تستخدم الاحداثيات

$$x_1 = X-a, \quad x_2 = Y-b/a$$

لنحصل على

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (b-1)x_1 + a^2x_2 + 2ax_1x_2 + \frac{b}{a}x_1^2 + x_1^2x_2 \\ \dot{x}_2 &= -bx_1 - a^2x_2 - 2ax_1x_2 - \frac{b}{a}x_1^2 - x_1^2x_2 \end{aligned} \qquad (4)$$

والآن نفسر (4) كنظام ذا برامتر b مع ثبات a. الجزء الحقيقى للقيم الذاتية هى $\frac{1}{2}(b-a^2-1)$ عندما $(a-1)^2<b<(a+1)^2$ وبالتالى

$$\frac{d}{db}\left[\frac{1}{2}(b-a^2-1)\right] = \frac{1}{2} > 0$$

عند قيمة التفرع $b=a^2+1$.

والآن نناقش إستقرار النظام (4) عندما $b=a^2+1$.

المصفوفة $M = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}$ تحقق

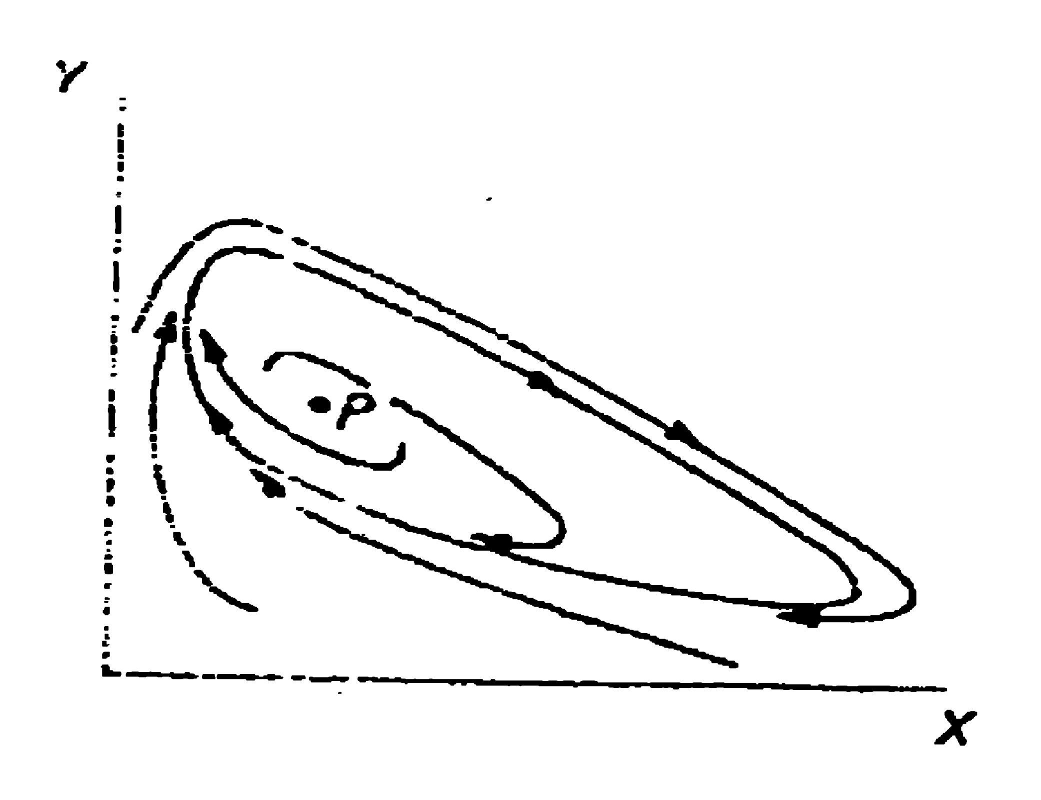
$$M^{-1}\begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

والآن التحويل $x = MY$ يحول (4) إلى

$$y_1' = ay_2 + (1-a^2)ay_1^2 + 2a^2 y_1 y_2 - a^4 y_1^3 + a^3 y_1^2 y_2 \qquad (6)$$

$$y_2' = -ay_1$$

ويمكن حساب الدليل بالعلاقة السابقة وحيث أن Y_{12}^1 Y_{11}^1، Y_{111}^1 فقط غير صفرية فإن $I = -2a^5 - 4a^3$. ويلي ذلك أن النظام (2) يتفرع إلى دائرة نهاية جاذبة تحيط بالنقطة P وبازدياد b من خلال القيمة الحرجة $1+a^2$. وكمثال لصورة الطور المناسبة معطاه بالشكل المبين.



١٨-٥ التفرع فى R^n:

والآن وقبل أن نسرد أمثلة أخرى، ندرس التفرع فى R^n ليكن لدينا النظام، .

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{\mu}) , \qquad (1)$$

حيث $\underline{x} \in R^n$ ، $\underline{\mu} \in R^n$ وهما متجهات أعمدة ذات مركبات x_i، μ_i على الترتيب و $i = 1,2,\ldots,n$

هدفنا هنا تعيين نقاط الاتزان واستقرارها عندما تتغير قيم $\underline{\mu}$. إذا كان عند بعض قيم $\underline{\mu}$($\underline{\mu}_0$=) يوجد تغير كيفى فى الحل فإن $\underline{\mu}_0$ تكون هى نقطة التفرع. ونقول أن نقاط الاتزان قد حددت وذلك بحل النظام

$$\underline{f}(\underline{x},\underline{\mu}) = 0 \qquad (2)$$

وفى بعض الأحيان قد يعبر عن $\underline{f}$ كانحدار (gradient) لكمية قياسية وعلى ذلك يمكن كتابة النظام (1) على الصورة (نظام إنحدارى (gradient system) التالية

$$\frac{dx}{dt} = -grad\,\phi(\underline{x},\underline{\mu}) \qquad (3)$$

وتعطى نقاط الاتزان من العلاقة

$$grad\,\phi = 0 \qquad (4)$$

تنص العلاقة (4) على أن نقاط الاتزان طبقا لقيم ϕ الثابتة (stationary) وأن حل النظام (4) يصف سطح فى الفضاء ($\underline{x},\underline{\mu}$). وإذا كان هذا السطح أملس فإن أى تغير صغير فى $\underline{\mu}$ يؤدى إلى تغير صغير فى $\underline{x}$ ولاتحدث مفاجآت. أما إذا كان السطح ذا طيات (folded) فإن أى تغير صغير فى $\underline{\mu}$ فى الطية (fold) ينتج عنه قفزة (jump) فى قيمة $\underline{x}$ وأن هذا بالضبط هى نقطة التفرع.

والآن نعتبر ϕ كدالة فى متغير واحد، وتعطى النقاط الثابتة بالعلاقة

$$\frac{d\phi}{dx} = 0 \qquad (5)$$

وتكون نقطة النهاية نقطة نهاية عظمى أو صغرى طبقاً لإشارة المشتقة الثانية. وبالمثل إذا كان $\phi(\underline{x},\underline{\mu})$ دالة فى متغيرات عدة فإن النقاط الثابتة تعطى بالعلاقة (9). ولتحديد نقطة الاتزان بأنها نقطة نهاية عظمى أو صغرى فإننا نفحص إشارة المحددات الذى أعمدته المشتقه الثانيه للدالة ϕ. إذا تلاشت كل المحددات فلا نحصل على أى نتيجة وتسمى هذه النقطة بنقطة الشذوذ (singularity) وتعرف دراسة هذه النقاط (نقاط الشذوذ) بنظرية الكوارث (catastrophe) وهذه النظرية خارج نطاق هذا الكتاب.

مثال (١): تفرع الشوكه (pitchfork bifurcation) عين نقاط الاتزان للنظام

$$\frac{dx}{dt} = (\mu - \mu_0)x - ax^3 \qquad (6)$$

حيث a ، μ، μ_0 ثوابت موجبه. وادرس استقرارها.

الحل: للنظام ثلاث نقط اتزان $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{\dfrac{\mu - \mu_0}{a}}$

نلاحظ أنه إذا كان $\mu < \mu_0$ فإنه يوجد حل حقيقي واحد، وحلان x_2، x_3 تخيليان ويمكن تجاهلهما.

الأن نفحص استقرار نقطة الاتزان $x_1 = x = 0$ يكون النظام الخطى المناظر للنظام (6) هو

$$\frac{dx}{dt} = (\mu - \mu_0)x \qquad (7)$$

ويكون حل هذه المعادلة

$$x = A_0 \exp[(\mu - \mu_0)t] \qquad (8)$$

حيث A_0 ثابت. نستنتج من المعادلة (8) أنه إذا كان $\mu > \mu_0$ فإن $|x| \to \infty$ عندما $t \to \infty$ وتكون نقطة الاتزان غير مستقرة. وإذا كان $\mu < \mu_0$ فتكون نقطة الاتزان مستقرة.

والآن نفحص نقطة الاتزان $x_2\left(= \sqrt{\dfrac{\mu - \mu_0}{2}}\right)$ كما بينا سابقا بنقل نقطة الاصل بكتابة $\bar{x} = x - x_2$

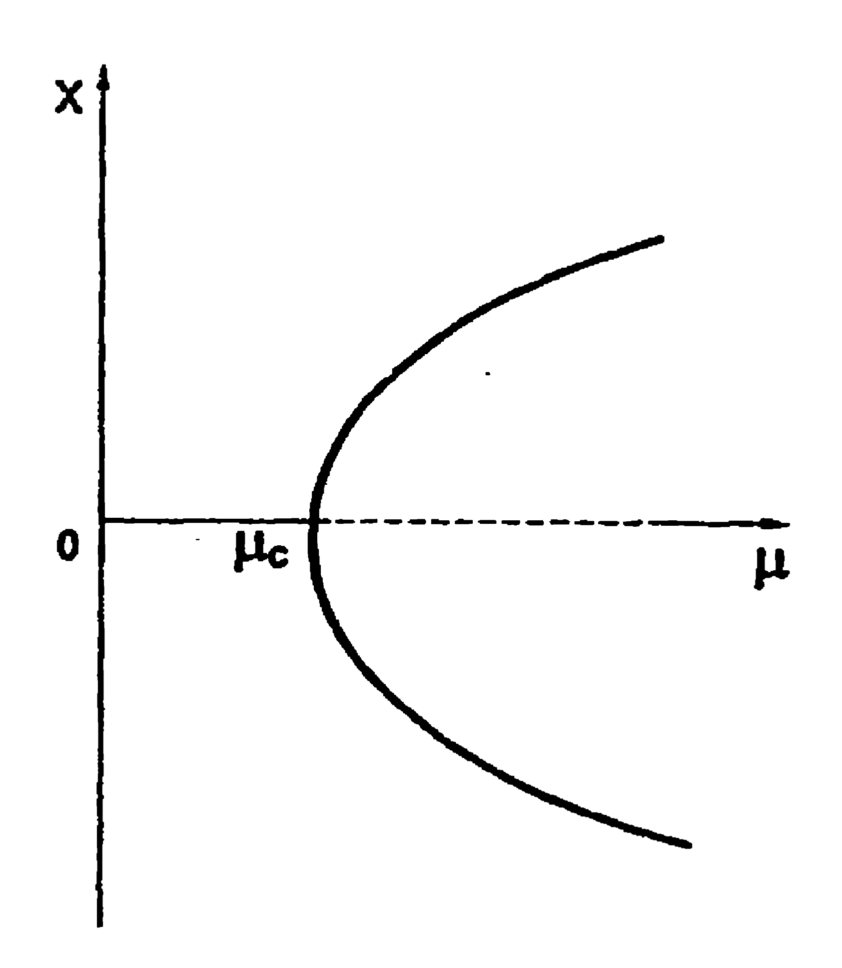
فيؤول النظام (6) إلى

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= -[a\bar{x}^3 + 3ax_2\bar{x}^2 + 2ax_2^2\bar{x}] \\ &= -2a\left[\frac{\mu - \mu_0}{a}\right]\bar{x} = -2(\mu - \mu_0)\bar{x} \end{aligned} \qquad (9)$$

وتكون نقطة الاتزان x_2 موجودة فقط إذا كان $\mu > \mu_0$ وبذلك نستنتج من (9) أن $\bar{x}$ تكون مستقرة. وبالمثل يمكن اثبات أن x_3 تكون مستقرة.

وبتلخيص هذه النتائج كما يلى: إذا كان $\mu < \mu_0$ فإنه يوجد حل وحيد $(x = 0)$. وإذا كان $\mu > \mu_0$ يكون لدينا ثلاثة حلول محتملة: الحل $x = 0$ وهو غير

مستقر والحلان الآخران غير الصفرين x_2، x_3 يكونا مستقرين كما فى الشكل حيث رسمنا x كدالة فى μ



- : مستقر

....: غير مستقر

عندما تكون $\mu<\mu_c$ يكون $x=0$ هو الحل الوحيد. عندما $\mu>\mu_c$ يوجد ثلاث حلول مختلفة. عندما $\mu=\mu_0$ يوجد تغير فى الاستقرار، الحل $x=0$ يتغير من حل مستقر إلى حل غير مستقر. النقطة $\mu=\mu_0$ هى نقطة تفرع وتسمى تفرع الشوكه (pitchfork bifraction) كما فى الشكل وكذلك تسمى تفرع متماثل. وفى هذا المثال نقطتى الاتزان المتفرعه تكون مستقرة ويسمى هذا التفرع بالتفرع فوق الحرج (supercritical).

مثال (٢): (transcritical bifurcation)

ناقش استقرار نقاط إتزان النظام

$$\frac{dx}{dt}=\mu x-x^2 \tag{10}$$

حيث μ ثابت .

الحل: تكون المعادلة (10) فى صورة المعادلة اللوجيستيه ونقاط إتزانها هى

$$x=0 \quad , \quad x=\mu \tag{11}$$

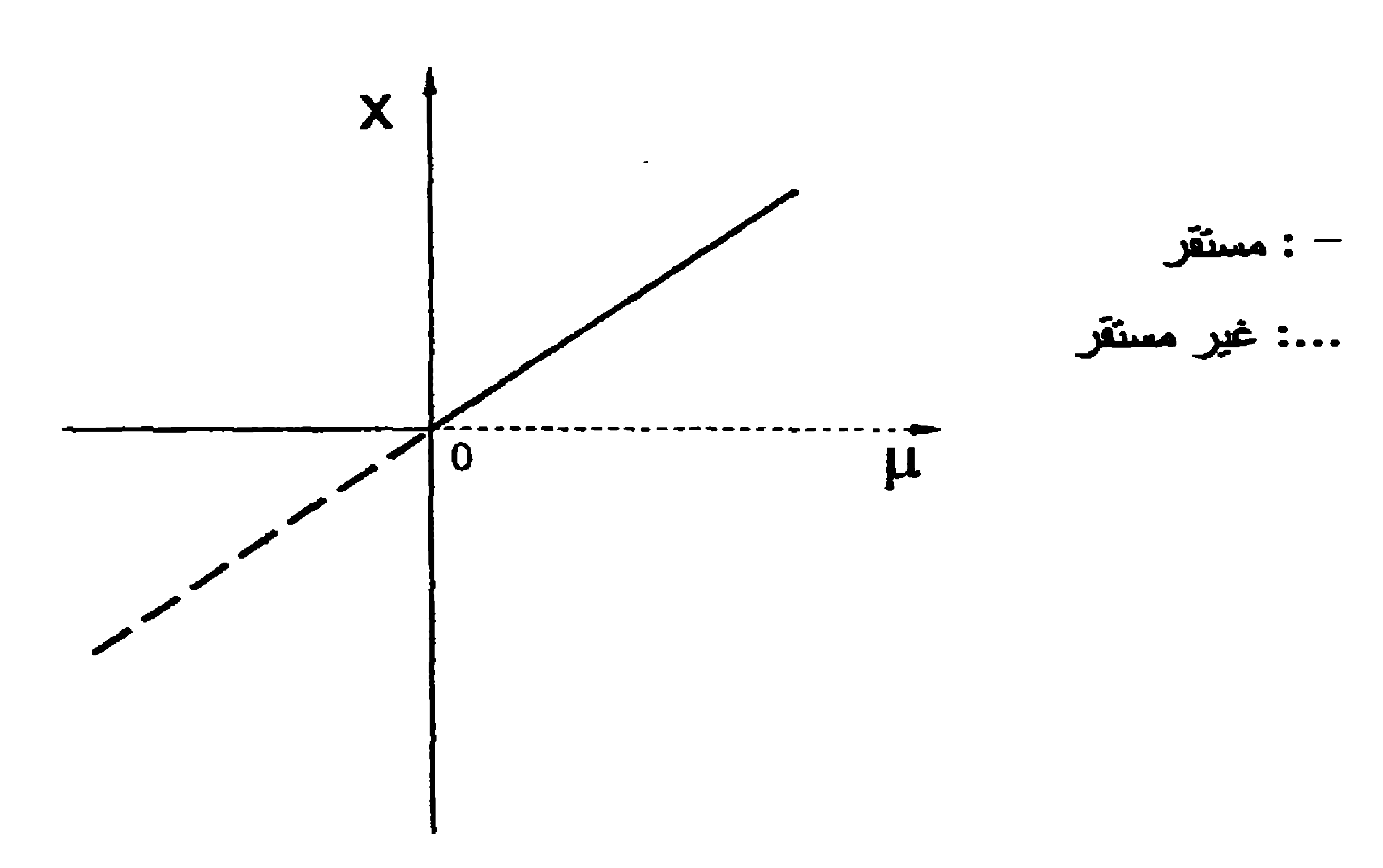
إذا كان $\mu = 0$ فإن الحلين يتحدان.والأن نفحص النقاط الحرجة.

$x = 0$ تكون مستقرة إذا كان $\mu < 0$ وغير مستقرة إذا كان $\mu > 0$. ولفحص استقرار الحل $\mu = x$ نضع $\bar{x} = x - \mu$ وتؤول المعادلة (10) إلى

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = -(\mu\bar{x} + \bar{x}^2) = -\mu\bar{x}$$

ومن هذه المعادلة نستنتج أن الحل $\mu = x$ يكون مستقرا إذا كان $\mu > 0$ وغير مستقر إذا كان $\mu < 0$

ونستخلص أنه إذا كان $\mu < 0$ فان الحل $x = 0$ يكون مستقرا والحل $\mu = x$ يكون غير مستقر إذا كان $\mu > 0$ فإن الحل $x = 0$ يكون غير مستقر بينما الحل $\mu = x$ يكون مستقرا. كما في الشكل.



تكون النقطة $\mu = 0$ نقطة تفرع (عابر الحرج) وتكون تخالفية (asymmetric) transcritical

مثال(٣): نقطة تفرع سرجية عقدية (saddlenode bifurcation)

ادرس استقرار نقاط الاتزان للنظام

$$\frac{dx}{dt} = \mu + x^2 \qquad (12)$$

حيث μ بارامتر.

الحل: ليس للمعادلة (12) نقطة إتزان إذا كان $\mu > 0$. وللسهولة سنكتب المعادلة (12) على الصورة

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - \lambda^2 \quad , \quad \mu = -\lambda^2$$

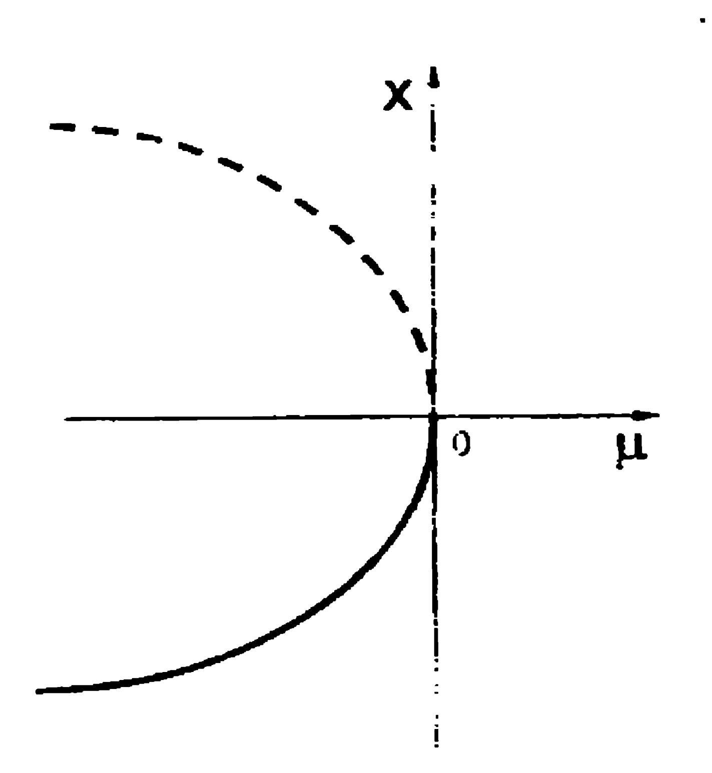
ويكون نقطتا الاتزان هما $x_1 = \lambda \ , \ x_2 = -\lambda$. وبنقل نقطة الأصل بكتابة

$$\bar{x} = x - \lambda$$

فإن المعادلة (12) تؤول إلى

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = 2\lambda\bar{x} + \bar{x}^2$$

من هذه المعادلة نستنتج أن $x_1 = \lambda$ تكون غير مستقرة وبالمثل يمكن اثبات أن $x_2 = -x$ تكون مستقرة. المعادلة (12) ليس لها نقطة اتزان إذا كان $\mu > 0$. ولها حلين إذا كان $\mu < 0$. والحل الموجب يكون غير مستقر بينما الحل السالب يكون مستقراً. كما هو مبين فى الشكل. تكون النقطة $\mu = 0$ نقطة تشتت سرجيه عقديه saddlemade bifurcation.



- : مستقر

...: غير مستقر

والآن نختتم دراسة مسائل البعد الواحد فى الصورة العامة والتى تحتوى على بارامتر واحد والتى يمكن كتابة المعادلة (6) على الصورة

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\mu) \tag{13}$$

نفترض أن (x_0,μ_0) هى نقطة الاتزان بحيث

$$f(x_0,\mu_0)=0 \tag{14}$$

ولفحص استقرار نقطة الاتزان نفك $f(x,\mu)$ حول (x_0,μ_0) فنحصل على

$$\begin{aligned} f(x,\mu) &= (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}+(\mu-\mu_0)\frac{\partial f}{\partial \mu}+\frac{1}{2}(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+ \\ &\quad (x-x_0)(\mu-\mu_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial \mu}+\frac{1}{2}(\mu-\mu_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}+\ldots.. \\ &= a(\mu)+(x-x_0)b(\mu)+(x-x_0)^2 c(\mu)+\ldots. \end{aligned} \tag{15}$$

حيث

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\ a(\mu)=(\mu-\mu_0)\frac{\partial f}{\partial \mu}+\frac{1}{2}(\mu-\mu_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}+\ldots \\ &\text{(ii)}\ b(\mu)=(\mu-\mu_0)\frac{\partial^2 f}{\partial \mu\partial x}+\frac{1}{2}(\mu-\mu_0)\frac{\partial^3 f}{\partial \mu^2\partial x}+\ldots \\ &\text{(iii)}\ c(\mu)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{1}{2}(\mu-\mu_0)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial \mu}+\ldots \end{aligned} \tag{16}$$

وجميع المشتقات الأخرى محسوبة عند (x_0,μ_0).

إذا لم تتلاشى $\frac{\partial f}{\partial x}$ عند نقطة الاتزان فإن النظام يكون زائديا (hyperbolic) وإلا يكون غير زائدى. ويكون التفرع عادة، مصاحبا لنقاط الاتزان غير الزائدية وإننا فى المعادلة (ii-16) افترضنا ان النظام غير زائدى. ودراسة التفرع هى أساسا تحديد أصفار

$$a(\mu)+(x-x_0)b(\mu)+(x-x_0)^2 c(\mu)=0 \tag{17}$$

نظرية (٢): وتكون نقطة التفرع:

(i) تفرع الشوكة (Pitckfork) إذا كان

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial \mu\partial x}\neq 0,\quad \frac{\partial^2 f^{\,3}}{\partial x^3}\neq 0$$

(ii) عابرة الحرج (transcritical) إذا كان

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}=0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x}\right)^2 > \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}$$

(iii) عقدة سرج Saddlenode إذا كان

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}\neq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\neq 0$$

مثال (٤): تمثل المعادلة

$$\frac{dx}{db}=\mu x - bx^2 - hx \qquad (A)$$

حيث μ ، b , h ثوابت موجبة، التعداد الذى ينمو طبقاً للمعادلة اللوجستية

$$\frac{dN_1}{dt}=a_1 N_1\left(1-\frac{N_1}{K}\right)$$

حيث N هو كثافة السكان، K ثابت موجب، ويحصد بمعدل يتناسب مع كثافة السكان.

تكون نقطتا الاتزان للمعادلة (A) هما

$$x_1=0, \quad x_2=(\mu-h)/b$$

وحيث أن التعداد يكون موجباً وبالتالى يوجد x_2 إذا كان $\mu>h$
وباستخدام نظرية (٢) يكون لدينا

$$f=(\mu-b)x-bx^2$$

وبالاشتقاق وحساب المشتقات عند x_1 نحصل على

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}=0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-b\neq 0, \ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x}\right)^2=1, \ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=0$$

وعلى ذلك نستنتج أن نقطة التفرع تكون نقطة عابرة الحرج transcritical وكذلك نستنتج أنه إذا كان $\mu<h$ فإن التعداد ينقرض ($x=0$ هى الحل الوحيد المستقر) وإذا كان $\mu>h$ فإن التعداد يؤول إلى $(\mu-h)/b$ وهو الحل المستقر وهذه النتيجة متوقعة. إذا كان معدل الحصاد اكبر من معدل النمو فإن التعداد يستأصل (أى ينقرض السكان)، ويمثل هذا المثال الحصاد المتناسب (proportional harvesting)

ب- مسائل ذات بعدين

فى هذا النوع نقدم مثال على التفرع يحتوى متغيرين تابعين أو معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.

مثال (٥): افحص سلوك الحل الكيفى للنظام (المتذبذب التوافقى المضطرب)

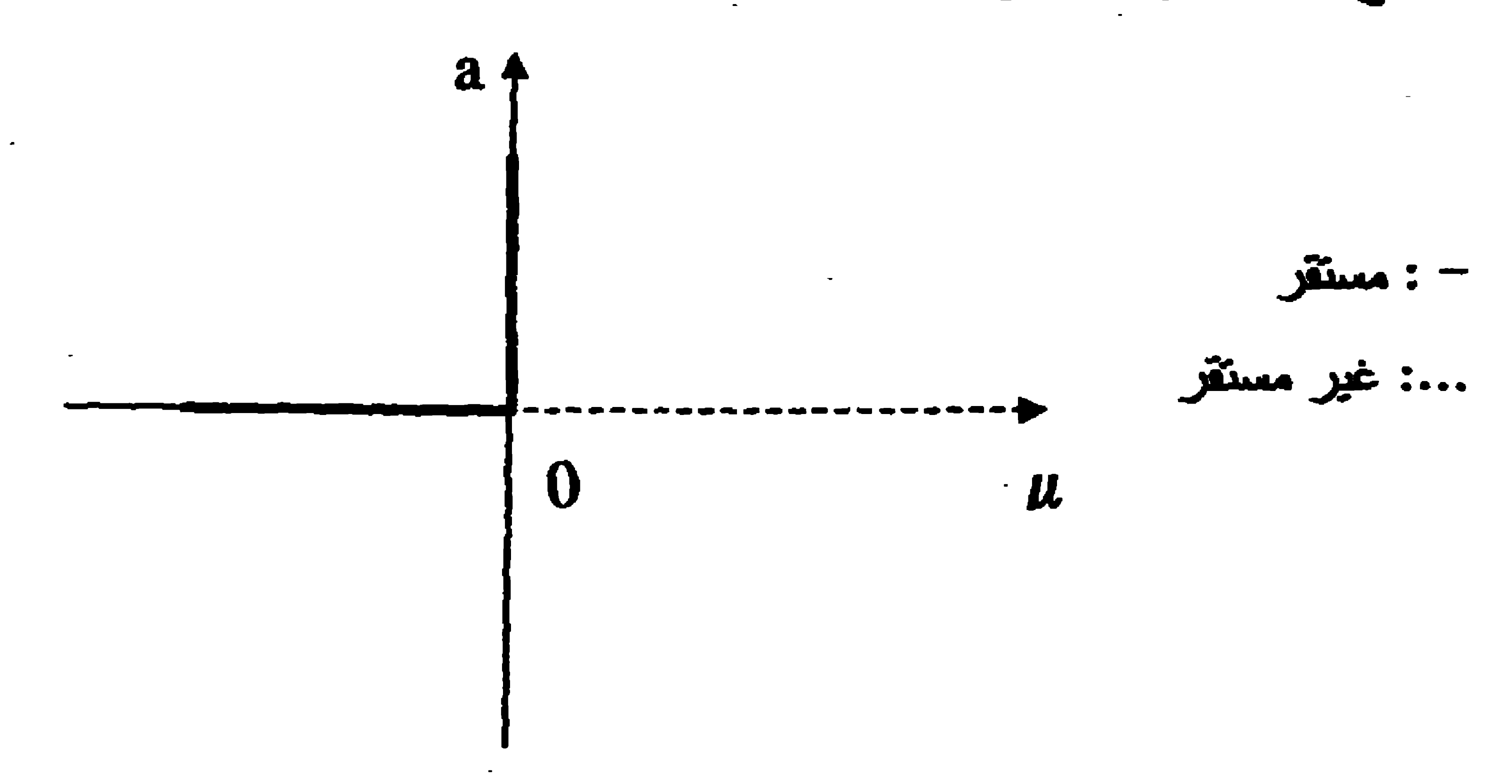
$$\frac{d^2x}{dt^2}-\mu\frac{dx}{dt}+x=0 \qquad (18)$$

الحل: إذا كان $\mu>0$ تكون (18) معادلة متذبذب مخمد.

بوضع $x=x_1$ يمكن كتابة النظام (18) على الصورة

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -\mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \qquad (19)$$

وتكون نقطة الاتزان هى (0, 0). وهى بؤرة مستقرة إذا كان $\mu>0$ وغير مستقرة إذا كان $\mu<0$، ومركز مستقر إذا كان $\mu=0$ وبذلك تكون نقطة التفرع هى $\mu=0$. ولرسم تخطيط (بيان) التفرع، فإننا نصاحب الحل الدورى $\mu=0$ مع السعه غير الصفرية a. وفى حالة البؤرة المستقرة $(\mu>0)$ تكون السعة a تساوى الصفر وعندما يكون $\mu<0$ يكون الحل الصفرى غير مستقر. وشكل التفرع التخطيطى (bifurcation diagram) كما هو مبين فى الشكل التالى



ويكون نوع التفرع هو تفرع رأسى (vertical bifurcation)

تمارين

(١) اوجد نقاط الاتزان وأفحص استقرارها وناقش خواص التفرع للنظم التالية

a) $\dot{x} = x(\mu - x^2)$, b) $\dot{x} = x(\mu - x - x^2)$,

c) $\dot{x} = \mu x - bx^2 - h$

(٢) عين نقاط الاتزان وحدد نوع التفرع للنظم التالية ،

a) $\dot{x} = x^3 + x^2 - (2+\mu)x + \mu$

b) $\dot{x} = x(x^2 - \mu)(x^2 - \mu^2 - 1)$

(٣) استنتج، إذا كانت $w \neq 0$ ان نقطة الاصل هى نقطة الاتزان الوحيدة للمعادلتين

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 - w x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = w x_1 + \mu x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

ناقش هل للنظام تفرع هوبف عند (0, 0, 0) وأعد كتابة النظام فى الصورة القطنية واستنتج دورة النهاية.

(٤) اثبت أن النظام

$$\ddot{x} - (\mu - x^2)\dot{x} + x = 0$$

له تفرع هوبف عند (0, 0)

(٥) اثبت أن معادلة فان ديربول لها حل دورى مستخدما نظرية تفرع هوبف

(٦) اثبت أن النظم التالية ذات البارامتر الواحد يحدث لها تفرع هوبف عند $\mu = 0$ بحيث أن دائرة النهاية المستقرة تحيط بنقطة الأصل عندما $\mu > 0$

a) $\dot{x}_1 = x_2 - x_1^3$, $\dot{x}_2 = -x_1 + \mu x_2 - x_1^2 x_2$

b) $\dot{x}_1 = \mu x_1 + x_2 - x_1^3 \cos x_1$, $\dot{x}_2 = -x_1 + \mu x_2$

c) $\dot{x}_1 = \mu x_1 + x_2 + \mu x_1^2 - x_1^2 - x_1 x_2^2$, $\dot{x}_2 = -x_1 + x^{22}$

(٧) اثبت أن معادلة ريلى (Rayleigh)

$$\ddot{x}+\dot{x}^2-\mu\dot{x}+x=0$$

يحدث لها تفرع هوبف عند $\mu=0$ ولوصف شكل الطور بالقرب من $\mu=0$

(٨) اثبت أن النقطة الثابتة عند نقطة الاصل للنظام

$$\dot{x}_1=(\mu-3)x_1+(5+2\mu)x_2-2(x_1-x_2)^3$$

$$\dot{x}_2=-2x_1+(3+\mu)x_1-(x_1-x_2)^3$$

لها جذرين تخيلين صرفا عندما $\mu=0$

(٩) اثبت أن النظام

$$\dot{x}_1=-\mu x_1-x_2\ ,\ \ \dot{x}_2=x_1+x_2^3$$

بحيث لها تفرع هوبف عند $\mu=0$ لدوائر النهاية غير المستقرة تحيط ببؤرة مستقرة عندما $\mu>0$

(١٠) ادرس تفرع هوبف للنظام

$$\dot{x}_1=\mu x_1-wx_2+\theta x_1(x_1^2+x_2^2)$$

$$\dot{x}_2=wx_1+\mu x_2+\theta x_2(x_1^2+x_2^2)$$

فى الحالتين $\theta=1$ ، $\theta=-1$

الباب التاسع عشر

المعادلات التامة

Exact Differential Equations

١٩-١ مقدمة : تسمى المعادلة التفاضلية التى على الصورة

$$f\left(\frac{d^n y}{dx},\ldots,\frac{dy}{dx},y\right)=\phi(x) \qquad (1)$$

بأنها تامة إذا امكن استنتاجها بالاشتقاق فقط وبدون أى عملية أخرى ، من معادلة تفاضلية رتبتها $(n-1)$ على الصورة

$$f\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}},\ldots,\frac{dy}{dx},y\right)=\int \phi(x)dx+c \qquad (2)$$

وتسمى المعادلة (2) بانها التكامل الأول للمعادلة (1) . إذا كانت المعادلة (2) تامة فانه يمكن الحصول عليها من معادلة على الصورة

$$f\left(\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}},\ldots,\frac{dy}{dx},y\right)=\int\int \phi(x)(dx)^2+c \qquad (3)$$

كما سبق . وتسمى المعادلة (3) بالتكامل الثانى للمعادلة (1) .

وعموماً ، يوجد n تكاملات للمعادلة التفاضلية النونية .

١٩-٢ شرط التمام (exactness) لمعادلة تفاضلية خطية من الرتبة النونية :

لتكن المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة النونية على الصورة

$$P_0 y^{(n)}+P_1 y^{(n-1)}+\ldots+P_n y=\phi(x) \qquad (1)$$

حيث $P_0,P_1,\ldots,P_n,\phi$ دوال متصلة فى x فقط . لتكن (1) تامة ، أى يمكن الحصول عليها من معادلة ذات رتبة $(n-1)$ بالاشتقاق .

وحيث أن $P_0(d^n y/dx^n)$ يمكن الحصول عليها من اشتقاق $P_0(d^{n-1}y/dx^{n-1})$. سنفترض أننا حصلنا عليها بالاشتقاق من المعادلة

$$P_0\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^n}\right)+Q_1\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)+\dots+Q_{n-1}y=\int \phi(x)dx+c \qquad (2)$$

حيث $Q_1,Q_2,\dots,Q_{n-1}$ دوال فى x فقط وباشتقاق (2) بالنسبة إلى x نحصل على

$$(P_0y^{(n)}+P_0'y^{(n-1)})+(Q_1y^{(n-1)}+Q_1'y^{(n-2)})+\dots$$
$$+Q_{n-1}y'+Q_{n-1}'y=\phi(x)$$

أو

$$P_0y^{(n)}+(P_0'+Q_1)y^{(n-1)}+(Q_1'+Q_2)y^{(n-2)}+\dots$$
$$+Q_{n-2}'+Q_{n-1})y'+Q_{n-1}'y=\phi(x) \qquad (3)$$

وحيث أن (2) ، (3) هما نفس المعادلة وبمساواة معاملات المشتقات $y^{(n-1)},y^{(n-2)},\dots,y',y$ نحصل على

$$\left.\begin{array}{l}P_1=P_0'+Q_1,\ P_2=Q_1'+Q_2,\ P_3=Q_2'+Q_3,\dots\\ P_{n-1}=Q_{n-2}'+Q_{n-1},\ P_n=Q_{n-1}'\end{array}\right\} \qquad (4)$$

وللحصول على الشرط المطلوب لابد من حذف كل Q_i ، $i=1,2,n-1$ للحصول على علاقات بين P_i ، $i=0,1,2,\dots,n$. ولذلك سوف تحسب Q_i بدلالة P_i و بالتعويض عنهم فى المعادلة (2) نحصل على التكامل الأول . العلاقات (4) تعطى

$$Q_1=P_1-P_0'$$

$$Q_2=P_2-Q_1'=P_2-(P_1-P_0')'=P_2-P_1'+P_0''$$

$$Q_3=P_3-Q_2'=P_3-(P_2-P_1'-P_2'')'=P_3-P_2'+P_1''-P_0'''$$

... ...

$$Q_{n-1}=P_{n-1}-P_{n-2}'+P_{n-3}''-\dots(-1)^{n-1}P_0^{(n-1)}$$

$$P_n = Q'_{n-1} = P'_{n-1} - P''_{n-2} + P'''_{n-3} - ...(-1)^{n-1} P_0^{(n)}$$

أى

$$P_n - P'_{n-1} + P''_{n-2} - P'''_{n-3} + ... + (-1)^n P_0^{(n)} = 0 \qquad (5)$$

وهو شرط التمام للمعادلة (1) .

وبتعويض قيم $Q_1, Q_2, ..Q_{n-1}$ فى (2) نحصل على

$$P_0 y^{(n-1)} + (P_1 - P'_0) y^{(n-2)} + (P_2 - P'_1 + P''_0) y^{(n-3)} + ...$$

$$+\{P_{n-1} - P'_{n-2} + P''_{n-2} - ... + (-1)^{n-1} P_0^{(n-1)}\} y = \int \phi dx + c \qquad (6)$$

وهو التكامل الأول .

ملحوظة (١) : والشرط (5) هو شرط تمام المعادلة (1) . وحين تحقق هذا الشرط يكون (6) هو التكامل الأول .

ملحوظة (٢) : لحل المعادلات التامة نتبع الآتى :

١- نكتب المعادلة كاملة (أى بوضع صفر بدلا من المعامل الغائب)

٢- نكتب قيم $P_0, P_1, ...$ بمقارنة المعادلة المعطاه مع المعادلة (1)

٣- نكتب $P_n, P_{n-1}, P_{n-2}, ...$ مبتدأ من الأعلى وضع إشارة (+) ، (−) ، ... قبل كل منهم

٤- وضع لا شرطه ، شرطه (dash) ، شرطتين ... عليهم

٥- وتوجد قيمة هذا التعبير . إذا كان يساوى الصفر تكون المعادلة تامة ويكون تكاملها الأول هو (6)

٦- بعد الحصول على التكامل الأول نكرر الخطوات 1 − 5 لاثبات أنه تام بطريقة مماثلة وبتكرار هذه العمليات حتى نصل إلى $y' + Py = \varphi$ وتحل بالطرق القياسية إذا لم تكن تامة .

ولتوضيح الفكرة تعطى الأمثلة التالية :

مثال (١) : حل المعادلة

$$(1+x+x^2)y'''+(3+6x)y''+6y'=0$$

الحل لدينا

$$(1+x+x^2)y'''+(3+6x)y''+6y'=0 \qquad (1)$$

بمقارنة (1) مع

$$P_0y'''+P_1y''+P_2y'+P_3y=\phi(x)$$

فيكون

$$P_0=1+x+x^2,\ P_1=3+6x,\ P_2=6,\ P_3=0,\ \phi=0 \qquad (2)$$

وتكون المعادلة تامة إذا كان

$$P_3-P_2'+P_1''-P_0'''=0 \qquad (3)$$

بالتعويض عن قيمة P_0''' ، P_1'' ، P_2' ، P_3 نجد أن :

$$0-0+0-0=0$$

وبذلك تكون المعادلة المعطاة تامة ويكون تكاملها الأول

$$P_0y^{(2)}+(P_1-P_0')y'+(P_2-P_1'+P_0'')y=c_1 \qquad (4)$$

وباستخدام (2) فان (4) تختزل إلى

$$(1+x+x^2)y''+\{3+6x-(1+2x)\}y'+(6-6+2)y=c_1 \qquad (5)$$

الآن نفحص (5) من حيث أنها تامة . سوف نكرر الخطوات السابقة كما عملنا مع المعادلة (1) . بالنسبة إلى المعادلة (5) التى نقارنها مع

$$P_0y''+P_1y'+P_2y=\phi(x)$$

فنجد أن

$$P_0=1+x+x^2,\ P_1=2+4x,\ P_2=2,\ \phi(x)=c_1 \qquad (6)$$

وعلى ذلك

$$P_2 - P_1' + P_2'' = 2 - 4 + 2 = 0$$

والذى يبين أن (5) تامة ويكون تكاملها الأول

$$P_0 y' + (P_1 - P_0')y = \int c_1 dx + c_2$$

$$(1 + x + x^2)y' + [2 + 4x - (1 + 2x)]y = c_1 x + c_2 \qquad (7)$$

نفحص (7) لمعرفة ما إذا كانت تامة . ونقارنها مع المعادلة .

$$P_0 y' + P_1 y = \phi(x)$$

ويكون

$$P_0 = 1 + x + x^2, P_1 = 1 + 2x, \phi = c_1 x + c_2$$

مع ذلك

$$P_1 - P_0' = 1 + 2x - (1 + 2x) = 0$$

وعلى ذلك تكون (7) معادلة تامة ويكون تكاملها الأول هو

$$P_0 y = \int (c_1 x + c_2) dx + c_3$$

أى أن

$$(1 + x + x^2)y = \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

وهو الحل المطلوب .

مثال (٢) : حل المعادلة

$$xy''' + (x^2 + x + 3)y'' + (4x + 2)y' + 2y = 0$$

الحل : بالمقارنة مع المعادلة

$$P_0 y''' + P_1 y'' + P_2 y' + P_3 y = \phi(x)$$

نجد أن

$$P_0 = x_1 P_1 = x^2 + x + 3, \quad P_2 = 4x + 2, \quad P_3 = 2, \quad \phi = 0 \qquad (1)$$

فيكون

$$P_3 - P_2' + P_1'' - P_0''' = 2 - 4 + 2 - 0 = 0$$

وبالتالى المعادلة تامة ويكون تكاملها الأول هو

$$P_0 y'' + (P_1 - P_0) y' + (P_2 - P_1' + P_0'') y = c_1$$

أى

$$xy'' + (x^2 + x + 2) y' + (2x + 1) y = c_1 \qquad (2)$$

حيث من (2) يكون

$$P_0 = x, \quad P_1 = x^2 + x + 2, \quad P_2 = 2x + 1 \qquad (3)$$

$$P_2 - P_1' + P_0'' = 2x + 1 - (2x + 1) + 0 = 0$$

وبذلك تكون (2) معادلة تامة ويكون تكاملها الأول

$$P_0 y' + (P_1 - P_0') y = \int c_1 dx + c_2$$

$$xy' + (x^2 + x + 1) y = c_1 x + c_2$$

وهي ليست تامة (تأكد من ذلك) ويمكن كتابتها فى صورة المعادلة الخطية .

$$y' + (x + 1 + \frac{1}{x}) y = c_1 x + \frac{c_2}{x}$$

ويكون عامل التكامل هو

$$I, F = e^{\int (x+1+\frac{1}{x}) dx} = e^{\ln x} e^{x + x^2/2} = x e^{\left(\frac{x}{2}\right)(x+2)}$$

ويكون الحل هو

$$xye^{\frac{x}{2}(x+2)} = \int \left(c_1 + \frac{c_2}{x}\right) xe^{\frac{x}{2}(x+2)} dx + c_3$$

وهذا الحل المطلوب حيث التكامل يصعب حسابه .

مثال (٣) : هل المعادلة

$$\cos xy'' + 2\sin xy' + 3\cos xy = \tan^2 x$$

تامة ؟

الحل : بالمقارنة مع المعادلة

$$P_0 y'' + P_1 y' + Py = \phi(x)$$

فيكون

$$P_0 = \cos x\,,\;\; P_1 = 2\sin x\,,\;\; P_2 = 3\cos x$$

وتكون تامة إذا كان

$$P_2 - P_1' + P_0'' = 3\cos x - 2\cos x + (-\cos x) = 0$$

وبذلك تكون المعادلة تامة وتحل كما سبق .

تمارين

حل المعادلات التفاضلية التالية

1- $xy'' + (1-x)y' - y = e^x$

2- $(x^3+4x)y''' + (9x^2-12)y'' + 18xy' + 6y = 0$

3- $x^2y'' + 3xy' + y = 1/(1-x^2)$

4- $y'' + 2\tan x y' + 3y = \tan^2 x \sec$

5- $xy''' + (x^2-3)y'' + 4xy' + 2y = 0$

6- $(2x^2-3x)y'' + (6x+3)y' + 2y = (x+1)e^x$

7- $\sin^2 x . y'' = 2y$

8- $x^3y''' + 9x^2y'' + 18xy' + 6y = \cos x$

9- $(1+x^2)y'' + 3xy' + y = 1+3x^2$

10- $(1+x^2)y'' + 3xy' + y = 1+3x^2$

الباب العشرون

المعادلات التفاضلية الكلية

Total (or Pfaffin) Differential Equations

٢٠-١ مقدمة:

فى هذا الباب سنتعرض لدراسة معادلات تفاضلية آنيه من الرتبة الأولى والدرجة الأولى. والمعادلة تحتوى على ثلاث متغيرات فقط. ويلاحظ أن الطريقة التى سوف نشرحها هنا يمكن تعميمها إلى n من المتغيرات. ثم سنتعرض بالدراسة أيضاً إلى معادلات تفاضلية ذات متغير مستقل وأكثر من متغير تابع.

٢٠-٢ المعادلات الآنية:

الصورة العامة لمجموعة المعادلات الآنية من الرتبة الأولى ولها ثلاثة متغيرات هى

$$\begin{aligned} P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz &= 0 \\ P_2 dx + Q_2 dy + R_2 dz &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

حيث المعاملات دوال فى x ، y و z. وبحل هذه المعادلات آنيا نحصل على

$$\frac{dx}{Q_1R_2 - Q_2R_1} = \frac{dy}{R_1P_2 - R_2P_1} = \frac{dz}{P_1Q_2 - P_2Q_1}$$

أى على الصورة

$$dx / P = dy / Q = dz / R \qquad (2)$$

حيث P ، Q ، R دوال فى x ، y ، z. وبالتالى فإن المعادلات الآنية (1) يمكن دائماً وضعها فى الصورة (2).

ويقال أن المعادلات المعطاه حلت تماماً عندما نحصل على حل على الصورة

$$u_2(x, y, z) = c_2 \quad ، \quad u_1(x, y, z) = c_1$$

حيث u_1 ، u_2 حلان (تكامليان) مستقلان للمعادلات (1). كما يقال أن u_1 ، u_2 مستقلان إذا كان $u_1/u_2 \neq c$ حيث C ثابت

ويمكن اعطاء للمعادلات (2) تفسير هندسي وهو أنه في الهندسة الفراغية نعرف أن جيوب تمام اتجاه المماس لمنحنى يتناسب مع dx, dy, dz. وبالتالى فإن المعادلات التفاضلية المعطاه ، تعبر عن الحقيقة أن جيوب تمام إتجاه المماس لمنحنى عند نقطة يتناسب مع R ، φ ، P . نفترض حل المعادلات المعطاه هى

$$u_1(x, y, z) = c_1 \quad ، \quad u_2(x, y, z) = c_2$$

نلاحظ أن الحل يمثل منحنيات تقاطع السطوح $u_1 = c_1$، $u_2 = c_2$. حيث c_1 ، c_2 يمكن ان تأخذ أى قيم بطريقة لا نهائية.

لحل المعادلات الآنية (2) توجد عدة قواعد.

القاعدة الأولى: بمساواة كسرين من الثلاثة كسور للمعادلة (2) يمكن أن نحصل على معادلة فى متغيرين فقط. وفى بعض الأحيان مثل هذه الحالة نحصل عليها من حذف عامل ما من الكسرين المختارين. وبمكاملة المعادلة فى متغيرين بالطرق المعروفة، سنحصل على أحد العلاقات فى الحل العام للمعادلة (2). يمكن تكرار هذه الطريقة للحصول على علاقة بمساعدة الكسرين الآخرين.

مثال (١): حل

$$\frac{xdx}{y^2 z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y^2}$$

الحل: بأخذ الكسرين الأول والثانى نحصل على

$$x^2 dx = y^2 dy \quad \Rightarrow \quad x^3 - y^3 = c_1 \qquad (1)$$

أما إذا أخذنا الكسرين الأول والثالث نحصل على

$$xdx = zdz \quad \Rightarrow \quad x^2 - z^2 = c_2 \qquad (٢)$$

وحيث أن $x^3 - y^3$ ، $x^2 - z^2$ مستقلين فإن الحل العام يعطى بالعلاقتين (1)، (2).

مثال (٢): حل المعادلات

$$\frac{dx}{z}=\frac{dy}{0}=\frac{dz}{-x}$$

الحل: من الكسر الثانى $dy=0$ وبالتالى $y=c_1$

من الكسرين الأول والثالث $xdx+zdz=0 \Rightarrow x^2+z^2=c_2$

ويكون الحل معطى بالعلاقتين $x^2+z^2=c_2$ ، $y=c_1$

القاعدة الثانية: ليكن واحد فقط من العلاقة $f(x,y,z)=c_1$ يمكن إيجادها من القاعدة الأولى. فانه فى بعض الأحيان نحاول إستخدام هذه العلاقة للتعبير عن متغير واحد بدلالة الأخرين. وهذا يساعدنا للحصول على معادلة فى متغيرين. وحل هذه المعادلة يعطى علاقة ثانية للحل العام للنظام (1). يلاحظ ان العلاقة الثانية تحتوى على ثابت اختيارى c_1. ولايجاد الصورة النهائية للعلاقة الثانية فانه يمكن حذف c_1 بمساعدة العلاقة الأولى $f(x,y,z)=c_1$.

مثال (١): حل

$$\frac{dx}{xz(z^2+xy)}=\frac{dy}{-yz(z^2+xy)}=\frac{dz}{x^4}$$

الحل: بحذف العامل $z(z^2+xy)$ من الكسرين الأول والثانى فنحصل على

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0 \quad \text{أو} \quad \frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}$$ وبالتكامل نحصل على

$$\ln x+\ln y=\ln c_1 \qquad \text{أو} \qquad xy=c_1 \qquad (1)$$

بإستخدام الكسرين الأول والثالث نحصل على

$$x^4dx=xz(z^2+c_1)dz$$

$$x^3dx-(z^3+c_1z)dz=0$$

وبالتكامل

$$\frac{x^4}{4}-\left(\frac{z^4}{4}+\frac{1}{2}c_1z^2\right)=\frac{1}{4}c_2$$

أى

$$x^4-z^4-2c_1z^2=c_2$$

وباستخدام (1) لحذف c_1 نحصل على

$$x^3+y^2-2xyz^2=c_2 \qquad (2)$$

الحل العام يعطى بالعلاقتين (1) ، (2)

القاعدة الثالثة: ليكن P_1,Q_1,R_1 دوال فى x, y, z فإنه من مبادىء الجبر فان كل كسر على الصورة

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \qquad (1)$$

يكون مساوياً

$$\frac{P_1dx+Q_1dy+R_1dz}{P_1P+Q_1Q+R_1R} \qquad (2)$$

إذا كان $P_1P+Q_1Q+R_1R=0$ فى (2) ، فإن البسط فى (2) يكون صفراً. وهذا يعطى $P_1dx+Q_1dy+R_1dz=0$ والذى يمكن تكامله لنحصل على $u_1(x,y,z)=c_1$. ويمكن تكرار ذلك للحصول على تكامل آخر $u_2(x,y,z)=c_2$ يسمى P_1,Q_1,R_1 بالمضاريب (multipliers). فى بعض الاحيان يكون تكامل واحد هو الممكن باستخدام المضاريب وفى هذه الحالة يمكن الحصول على التكامل الثانى باستخدام القاعدة الأولى والثانية.

مثال (١): حل المعادلات

$$\frac{adx}{(b-c)yz}=\frac{bdy}{(c-a)zx}=\frac{cdz}{(a-b)xy}$$

الحل باختبار x, y, z كمضاريب على الترتيب فإن كل كسر يساوى

$$=\frac{axdx+bydy+czdz}{xyz[(b-c)+(c-a)+(a-b)]}=\frac{axdx+bydy+czdz}{0}$$

فيكون

$$axdx+bydy+czdz=0$$

وبالتكامل نحصل على

$$ax^2+by^2+cz^2=c_1 \qquad (1)$$

وباجتياز ax, by, cz كمضاريب، كل كسر يساوى =

$$=\frac{a_2xdx+b^2y+c^2zdz}{xyz[a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)]}=\frac{a^2xdx+b^2ydy+c^2zdz}{0},$$

وبالتالى يكون

$$a^2xdx+b^2ydy+c^2zdz=0$$

وبالتكامل نحصل على

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=c_2 \qquad (2)$$

ويكون الحل التام معطى بالعلاقتين (1)، (2).

مثال (٢): حل المعادلات

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{bx-ay}$$

الحل: بأخذ 1 و a, b كمضاريب فإن كل كسر يساوى

$$=(adx+bdy+dz)/0 \Rightarrow adx+bdy+dz=0$$

وبالتكامل نحصل على

$$ax+by+z=c_1 \qquad (1)$$

من الكسرين الاول والثانى نحصل على $xdx + ydy = 0$

وبالتكامل نحصل على

$$x^2 + y = c_2 \qquad (2)$$

ويكون الحل المطلوب يعطى بالعلاقتين (1)، (2)

القاعدة الرابعة: ان كان لدينا

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \qquad (1)$$

ليكن P_1, Q_1, R_1 دوال فى x ، y ، z فإنه من مبادىء الجبر كل كسر فى (1) يساوى

$$\frac{P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz}{P_1 P + Q_1 Q + R_1 R} \qquad (2)$$

حيث يكون البسط فى (2) تفاضل تمام للمقام فى (2). فإنه يمكن ربط (2) مع كسر مناسب فى (1) للحصول على تكامل. وقد يمكن فى بعض المسائل ان نختار مضاريب اخرى P_2, Q_2, R_2 بحيث

$$\frac{P_2 dx + Q_2 dy + R_2 dz}{P_2 P + Q_2 Q + R_2 R} \qquad (3)$$

بحيث يكون بسطه تفاضل تام للمقام. ويمكن ربط الكسرين فى (2) ، (3) مع بعضهما يعطى تكامل المسألة. وهذه الطريقة يمكن تكرارها فى بعض المسائل للحجصول على تكامل آخر.

مثال: حل المعادلات

$$\frac{dx}{y^2(x-y)} = \frac{dy}{-x^2(x-y)} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)} \qquad (1)$$

الحل: من الكسرين الأول والثانى نحصل على

$$x^3 + y^3 = c_1 \qquad (2)$$

باختيار $1, -1, 0$ كمضاريب فيكون كل كسر يساوى

$$=\frac{dx-dy}{y^2(x-y)+x^2(x-y)}=\frac{dx-dy}{(x-y)(x^2+y^2)} \qquad (3)$$

باختيار الكسر الثالث فى (1) مع (3) نحصل على

$$\frac{dz}{z(x^2+y^2)}=\frac{dx-dy}{(x-y)(x^2+y^2)} \Rightarrow \frac{dz}{z}=\frac{dx-dy}{x-y}$$

بالتكامل نحصل على

$$\ln(x-y)-\ln c=\ln z \Rightarrow (x-y)/z=c_2 \qquad (4)$$

ويكون الحل المطلوب هو (2)، (4).

٢٠-٣ المعادلات التفاضلية الكلية:

Total (Pfaffin) Differential Equations

تعريف: صورة معادلة بافيان: ليكن $u_i, i=1,2,...,n$، n من الدوال لبعض او كل n من المتغيرات المستقلة $x_1,x_2,...,x_n$ يسمى التعبير $\sum_{i=1}^{n} u_i dx_i$ صورة معادلة بافيان فى n من المتغيرات كما تسمى $\sum_{i=1}^{n} u_i dx_i=0$ معادلة بافيان التفاضلية فى n من المتغيرات $x_1,x_2,...,x_n$.

وتسمى أى معادلة على الصورة

$$Pdx+Qdy+Rdz=0 \qquad (1)$$

حيث R, Q, P دوال فى x، y، z بمعادلة تفاضلية كلية فى ثلاث متغيرات.

والمعادلة (1) يمكن تكاملها مباشرة إذا وجدت دالة $u(x, y, z)$ يكون تفاضلها الكلى du يساوى الطرف الأيسر من (1). وفى بعض الأحيان الأخرى قد تكون (1) غير قابلة للتكامل. ونريد إيجاد الشرط الذى يجب أن تحققه P, Q, R

وبالتالى تكون (1) قابلة للتكامل. وهذا يسمى بشرط أو معيار القابلية للتكامل للمعادلة التفاضلية (1).

نظرية (١): الشرط الضرورى والكافى لقابلية المعادلة التفاضلية

$Pdx + Qdy + Rdz = 0$ للتكامل هو

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0$$

البرهان: الشرط ضرورى

تعتبر معادلة تفاضلية

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \tag{1}$$

حيث P، Q، R دوال فى x، y، z.

لتكن (1) قابلة للتكامل بحيث

$$u(x, y, z) = c \tag{2}$$

فإن التفاضل الكلى du يجب أن يساوى $Pdx + Qdy + Rdz$ أو يساويها مضروبه بعامل. ولكن تعرف أن

$$du = \frac{\partial u}{dx}dx + \frac{\partial u}{dy}dy + \frac{\partial u}{dz}dz \tag{3}$$

وحيث أن (2) هى تكامل (1) فإن P, Q, R يجب أن تتناسب إلى

$\frac{\partial u}{dx}, \frac{\partial u}{dy}, \frac{\partial u}{dz}$ وبالتالى

مثلا $$\frac{\partial u/\partial x}{P} = \frac{\partial u/\partial y}{Q} = \frac{\partial u/\partial z}{R} = \lambda(x, y, z)$$

أى أن

$$\lambda P = \frac{\partial u}{\partial x}, \ \lambda Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \ \lambda R = \frac{\partial u}{\partial z} \qquad (4)$$

من المعادلة الأولى والثانية فى (4) نحصل على

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda P) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda Q)$$

أو

$$\lambda \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial \lambda}{\partial x}$$

أى

$$\lambda\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q \frac{\partial \lambda}{\partial x} - P \frac{\partial \lambda}{\partial y} \qquad (5)$$

وبالمثل

$$\lambda\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) = R \frac{\partial \lambda}{\partial y} - Q \frac{\partial \lambda}{\partial z} \qquad (6)$$

$$\lambda\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) = P \frac{\partial \lambda}{\partial z} - R \frac{\partial \lambda}{\partial x} \qquad (7)$$

بضرب (5)، (6)، (7) فى Q, P, R على الترتيب والجمع نحصل على

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0 \qquad (8)$$

وهذا هو الشرط الضرورى لقابلية المعادلة (1) للتكامل.

الشرط كافى:

نفترض أن المعاملات P, Q, R فى (1) تحقق العلاقة (8). وسوف نثبا أن هذه العلاقة تعطى ان الشرط الكافى لوجود حل (تكامل) للمعادلة (1). سوف نثبت أن تكامل (1) يمكن إيجاده عندما تتحقق (8).

سوف نثبت أولاً أننا إذا أخذنا $P_1 = \mu P, Q_1 = \mu Q, R_1 = \mu R$ حيث μ أى دالة فى x, y, z، ونفس الشرط يتحقق للدوال P_1, Q_1, R_1 كما للدوال P, Q, R. فيكون لدينا

$$\frac{\partial Q_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial y} = \mu \frac{\partial Q}{\partial z} + Q \frac{\partial u}{\partial z} - \left(\mu \frac{\partial R}{\partial y} + R \frac{\partial \mu}{\partial y} \right),$$

أى

$$\frac{\partial Q_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + Q \frac{\partial \mu}{\partial z} - R \frac{\partial R}{\partial y} \tag{9}$$

وبالمثل

$$\frac{\partial R_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + R \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial z} \tag{10}$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + P \frac{\partial \mu}{\partial x} - Q \frac{\partial \mu}{\partial y} \tag{11}$$

بضرب (9)، (10)، (11) بالدوال P_1, Q_1, R_1 على الترتيب والجمع ويوضح $\mu P, \mu Q, \mu R$ بدلا من P_1, Q_1, R_1 على الترتيب فى الطرف الأيمن نحصل على

$$P_1 \left(\frac{\partial Q_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial y} \right) + Q_1 \left(\frac{\partial R_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial z} \right) + R_1 \left(\frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial x} \right)$$

$$= \mu \left\{ P \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + Q \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + R \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \right\} = 0 \tag{12}$$

وذلك باستخدام (8). والأن يمكن اعتبار أن $Pdx + Qdy$ كتفاضل تام. وإذا لم تكن كذلك نضرب المعادلة (1) بعامل المكاملة $\mu(x,y,z)$، وبذلك بدون فقد العموم فى إعتبار $Pdx + Qdy$ كتفاضل تام. ولهذا الشرط يكون

$$(\partial P / \partial y) = (\partial Q / \partial x) \tag{13}$$

ليكن

$$V = \int Pdx + Qdy \tag{14}$$

فيلى ذلك أن

$$P = \frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad Q = \partial V / \partial y \tag{15}$$

من (15) نجد أن

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x} \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial y}$$

باستخدام هذه العلاقات (13)، (14) فإنه من (8) نحصل على

$$\frac{\partial V}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + \frac{\partial V}{\partial y}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}\right) = 0$$

أو

$$\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y} - R\right) - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial z} - R\right) = 0$$

أو

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial V}{\partial z} - R\right) \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial V}{\partial z} - R\right) \end{vmatrix} = 0$$

وهذا يبين أن العلاقة التى لا تعتمد على x، y موجودة بين V، $\left(\frac{\partial V}{\partial z}-R\right)$. وبالتالى فإنه يمكن أن نعبر عن $\left(\frac{\partial V}{\partial z}-R\right)$ لدالة فى z، V فقط.

وعلى ذلك يمكن أن نأخذ

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)-R=\phi(z,V) \qquad (16)$$

والآن

$$Pdx+Qdy+Rdz=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\left(\frac{\partial V}{\partial z}-\phi\right)dz ,$$

(باستخدام (14)، (16)).

$$=\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz\right)-\phi dz$$

$$=dV-\phi dz$$

وبالتالى يمكن كتابة (1) على الصورة $dV-\phi dz=0$ وهى معادلة فى متغيرين. وعلى ذلك يكون تكاملها يعطى تكامل (حل) على الصورة

$$F(V,z)=0$$

وبذلك يكون الشرط (8) كاف. وبذلك يكون (8) شرط ضرورى وكاف ليكون للمعادلة (1) تكامل.

نظرية (٢): إثبت أن الشرط الضرورى لقابلية تكامل المعادلة التفاضلية الكلية

$$\underline{A}\,\underline{dr}=Pdx+Qdy+Rdz=0$$

هو

$$\underline{A}\,.\,curl\,\underline{A}=0$$

البرهان: لدينا

$$\underline{A}\,\underline{dr} = Pdx + Qdy + Rdz \qquad (1)$$

$$\underline{r} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k} \qquad (2)$$

$$\underline{A} = P\,\underline{i} + Q\,\underline{j} + z\,\underline{k} \qquad (3)$$

نلاحظ أن (1) متحققة من قاعدة القرب القياسى لمتجهين $\underline{dr}$ و $\underline{A}$. نعرف أن الشرط الضرورى لتكامل (1) هو

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0 \qquad (4)$$

ومن حساب المتجهات

$$cur\,\underline{A} = \left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)\underline{i}+\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\underline{j}+\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\underline{k} \qquad (5)$$

باستخدام (3)، (5) فإننا نجد أن الشرط الضرورى للقابلية للتكامل يمكن كتابته على الصورة $\underline{A}\,.\,curl\,\underline{A} = 0$

٢٠-٤ شروط تمام المعادلة $Pdx + Qdy + Rdz = 0$:

يقال أن المعادلة التفاضلية الكلية أنها تامة (exact) إذا تحققت الشروط التالية.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z} \qquad (1)$$

نلاحظ عند تحقق الشروط (1) يتحقق شرط القابلية للتكامل وهو

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0 \qquad (2)$$

للمعادلة $Pdx + Qdy + Rdz$ لكل حد فى (2)، يتلاشى تطابقيا.

٥-٢٠ طرق حل المعادلة: $Pdx + Qdy + Rdz = 0 \quad (1)$

توجد طرق متعددة لحل المعادلة (1). نعرف أن (1) تكون قابلة لتكامل عند تحقق الشرط

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0 \qquad (2)$$

وقبل استعراض هذه الطرق لحل المعادلة (1) يجب ان التأكد من تحقق الشرط (2)

الطريقة الأولى: الفحص المباشر Inspection

قد يكون فى بعض الاحيان إعادة ترتيب حدود المعادلة المعطاه مثل القسمة على دالة فى x, y, z مناسبة ، فان المعادلة الناتجة تحتوى على أجزاء متعددة تكون تفاضل تام. الجدول التالى يساعدنا فى ترتيب حدود المعادلة المعطاه

(i) $\dfrac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\dfrac{y}{x}\right)$, (ii) $\dfrac{xdy - ydx}{xy} = d\left(\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)$

(iii) $\dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d\left(\tan^{-1}\dfrac{y}{x}\right)$, (iv) $\dfrac{xdy + ydx}{xy} = d\left(\ln(xy)\right)$

(v) $\dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d\left(\dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\right)$,(vi) $\dfrac{2xydy + y^2dx}{x^2} = d\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$

(vii) $xdy + ydx = d(xy)$,

(viii) $d(xyz) = xy\,dz + xz\,dy + yz\,dx$

(ix) $\displaystyle\int \frac{df(x,y,z)}{f(x,y,z)} = \ln(f(x,y,z))$

(x) $\displaystyle\int f(x,y,z)^n df(x,y,z) = \frac{[f(x,y,z)]^{n-1}}{n+1}, n \neq -1$

(xi) $\frac{2x^2ydy-2xy^2dx}{x^4}=d\left(\frac{y^2}{x^2}\right)$ (xii) $\frac{xdy+ydx}{x^2y^2}=d\left(\frac{1}{xy}\right)$

(xiii) $\frac{xe^xdy-e^xdy}{y^2}=d\left(\frac{e^x}{y}\right)$ (xiv) $y^2dx+2xydy=d(y^2x)$

(xv) $2(xdx+ydy)=d(x^2+y^2)$

(xvi) $2(xdx+2ydy+2zdz)=d(x^2+y^2+z^2)$

(xvii) $3x^2ydx+x^3dy=d(x^3y)$

والأمثلة التالية توضح هذه الطريقة

مثال (١): تأكد من شرط قابلية التكامل للمعادلة

$$zdx+zdy+2(x+y+\sin z)dz=0$$

الحل: المقارنة بالمعادلة $Pdx+Qdy+Rdz=0$ نجد أن

$$P=z,\ Q=z,\ R=z(x+y+\sin z)$$

والآن

$$P(\partial Q/\partial z-\partial R/\partial y)+Q(\partial R/\partial x-\partial P/\partial z)+R(\partial P/\partial y-\partial Q/\partial x)$$

$$=z(1-2)+z(2-1)+2(x+y+\sin z)0-0)=0$$

ومن هنا نرى تحقق شروط القابلية للتكامل

مثال (٢): حل المعادلة

$$(yz+xyz)dx+(zx+xyz)dy+(xy+xyz)dz=0$$

الحل: بالمقارنة مع المعادلة $Pdx+Qdy+Rdz=0$ نجد أن

$$P=yz+xyz,\ Q=2x+xyz,\ R=xy+xyz$$

وعلى ذلك

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

$$=yz(1+x)\{(x+xy)-(x+xz)\}+zx(1+y)\{(y+yz)-(y+xy)\}+$$

$$+xy(1+z)\{(z+xz)-(z+yz)\}$$

$$=yz(1+x)x(y-z)+zx(1+y)y(z-x)+xy(1+z)z(x-y)$$

$$=xyz\{(y-z)+(z-x)+(x-y)\}+\{x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)\}$$

$$=xyz\{0+0\}=0$$

مثبتاً المعادلة التفاضلية الكلية قابلة للتكامل. بالقسمة على xyz نحصل على

$$\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{y}+1\right)dy+\left(\frac{1}{z}+1\right)dz=0$$

وبالتكامل

$$\ln x+x+\ln y+y+\ln z+z=c$$

$$\ln(xyz)+x+y+z=c$$

وهو الحل المطلوب، حيث c ثابت إختياري.

مثال (٣): حل المعادلة

$$(yz+2x)dx+(zx-2z)dy+(xy-2y)dz=0$$

الحل: تأكد بنفسك بأنها قابلة للتكامل. باعادة ترتيب الحدود نحصل على

$$(yzdx+zxdy+xydz)+2xdx-2(zdy+ydz)=0$$

وبالتكامل

$$xyz+x^2-2yz=c_1$$

وهو الحل المطلوب، حيث c ثابت إختيارى.

مثال (٤): حل المعادلة

$$xdy - ydx - 2x^2zdz = 0$$

الحل: تأكد بنفسك أنها قابلة للتكامل بالقسمة على x^2

$$\frac{xdy + xdx}{x^2} - 2zdz = 0 \quad \Rightarrow \quad d\left(\frac{y}{x}\right) - 2zdz = 0$$

وبالتكامل $\frac{y}{x} - z^2 = c$ ، c ثابت إختيارى.

الطريقة الثانية: حل المعادلة المتجانسة

تسمى المعادلة $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ متجانسة إذا كان كل من R, Q, P دوال متجانسة فى z, y, x بنفس الدرجة .

١- نتأكد من أن المعادلة قابله للتكامل

٢- نضع $x = zu$ ، $y = zv$، $dx = udz + zdu$، $dy = zdv + vdz$
وبالتعويض فى المعادلة المعطاه يكون لدينا حالتان

(i) إذا كان معامل dz صفراً فيكون لدينا معادلة فى متغيرين u, v وبإعادة ترتيب الحدود يمكن تكاملها بسهولة.

(ii) إذا كان معامل dz لايساوى الصفر فإننا نكون قادرين لفصل z عن v, u وتكون المعادلة الناتجة على الصورة

$$\frac{f_1(u,v)du + f_2(u,v)dv}{f(u,v)} + \frac{dz}{2} = 0 \qquad (A)$$

والآن نرمز بالرمز G للدالة $f(u, v)$ ونوجد $d(G)$ حيث $G = Px + Qy + Rz$ نجمع ونطرح $d(G)$ فى A ونتذكر أن كل هذا يتم فقط

للحد الأول ثم تكامل وبعد التكامل نضع $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ بدلا من u، v على الترتيب لتحصل على الحل بدلالة x, y, z.

مثال (١): حل المعادلة

$$z^2dx+(z^2-2yz)dy+(2y^2-yz-xz)dz=0$$

الحل: نتأكد أن المعادلة قابلة للتكامل . وحيث ان المعادلة متجانسة نضع

$$x=uz,\ y=vz,\ dx=zdu+udz,\ dy=zdv+vdz \qquad (1)$$

بالتعويض في المعادلة المعطاه نحصل على

$$z^2(zdu+udz)+z^2(1-2v)(zdv+vdz)+(2v^2-v-u)z^2dz=0$$

أي

$$z^3du+z^3(1-2v)dv+[u+v(1-2v)+2v^2-v-u]z^2dz=0$$

$$z^3du+z^3(1-2v)dv+(0.z^2)dz=0$$

بالقسمة على z^3

$$du+(1-2v)dv=0$$

بالتكامل

من (1)
$$u-v-v^2=0\Rightarrow\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-\frac{y^2}{z^2}=c$$

أو
$$(x+y)z-y^2=cz^2$$

مثال (٢): حل المعادلة

$$yz(y+z)dx+zx(x+z)dy+xy(x+y)dz=0$$

الحل: تأكد من قابلية المعادلة للتكامل. نضع

$$x=uz,\ y=vz\ \Rightarrow\ dx=zdu+udz,\ dy=zdv+vdz$$

بالتعويض فى المعادلة نحصل على

$$v(v+1)z^3(zdu+udz)+u(u+1)z^3(zdv+vdz)+uv(u+v)z^3dz=0$$

أو

$$[v(v+1)du+u(u+1)dv]z^4+[uv(v+1)+uv(u+1)+uv(u+v)]z^3dz=0$$

أو

$$[v(v+1)du+u(u+1)dv]z^4+2uv(v+u+1)z^3dz=0$$

بالقسمة على $uv(u+v+1)z^4$ نحصل على

$$\frac{(v+1)du}{u(u+v+1)}+\frac{(u+1)dv}{v(u+v+1)}+2\frac{dz}{z}=0$$

أو

$$\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+v+1}\right)du+\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{u+v+1}\right)dv+2\frac{dz}{z}=0$$

$$\frac{du}{u}+\frac{dv}{dv}-\frac{du+dv}{u+v+1}+2\frac{dz}{z}=0$$

و التكامل

$$\ln u-\ln v-\ln(u+v+1)+2\ln z=\ln c$$

$$uvz^2=c/(u+v+1)\Rightarrow\left(\frac{x}{z}\right)\left(\frac{y}{z}\right)z^2=c\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1\right)$$

أى $xyz=c(x+y+z)$

وهو الحل المطلوب.

الطريقة الثالثة: إستخدام المعادلة المساعدة

ليكن لدينا المعادلة:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \tag{1}$$

وشرط تكاملها هو

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0 \tag{2}$$

بمقارنة (1)، (2) نحصل على المعادلات الآتيه تعرف بالمعادلة المساعدة

$$\frac{dx}{\partial Q/\partial z - \partial R/\partial y} = \frac{dy}{\partial R/\partial x - \partial P/\partial z} = \frac{dz}{\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x} \tag{3}$$

وهذه المعادلة سبق أن شرحنا طريقة حلها. ليكن $u = c_1$ ، $v = c_1$ تكاملين (حلين) حصلنا عليهما بالمعادلات (1) والمعادلة

$$Adu + Bdv = 0 \tag{4}$$

بمقارنة (1)، (4) نحصل على A، B. بوضع قيم A، B فى (4) ثم تكامل المعادلة الناتجة. ثم نعوض قيم v, u فى العلاقة بعد التكامل فنحصل على الحل المطلوب.

ملحوظة: تفشل هذه الطريقة عندما تكون المعادلة (1) تامة وتستخدم هذه الطريقة عند فشل الطريقتين السابقتين

مثال (١): حل المعادلة

$$xz^3dx - zdy + 2ydz = 0$$

الحل: لدينا

$$xz^3dx - zdy + 2ydz = 0 \tag{1}$$

بمقارنة (1) مع $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ نحصل على

$$P = xz^3,\ Q = -z,\ R = 2y$$

وتكون المعادلات المساعدة هى

$$\frac{dx}{\partial Q/\partial z-\partial R/\partial y}=\frac{dy}{\partial R/\partial x-\partial P/\partial z}=\frac{dz}{\partial P/\partial y-\partial Q/\partial x}$$

أى

$$\frac{dn}{-1-2}=\frac{dy}{0-3xz^2}=\frac{dz}{0}$$

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{xz^2}=\frac{dz}{0} \qquad (3)$$

من الكسر الثالث $dz=0$ وبالتالى ، $z=c_1=u \qquad (4)$

من الكسرين الأول والثانى فى (3) نجد أن

$$xz^2dx-dy=0 \Rightarrow 2xu^2dx-2dy=0$$

بالتكامل (مثلا) $x^2u^2-2y=c_2=v$

أو

$$x^2z^2-2y=v \qquad (5)$$

بتعويض قيم u، v فى $Adz+Bdv=0$ نحصل على

$$Adz+Bd(x^2z^2-2y)=0$$

$$Adz+B(2xz^2dx+2x^2zdz-2dy)=0$$

$$2Bxz^2dx-2Bdy+(A+2Bx^2z)dz=0 \qquad (6)$$

بمقارنة (1)، (6) نحصل على

$$xz^3=2Bxz^2,\ -z=-2B,\ 2y=A+2Bx^2z$$

أى

$$B=\frac{1}{2}z,\ A=2y-2Bx^2z=2y-x^2z^2$$

أو

$$B = \frac{1}{2}u,\ A = -v$$

(من (4)، (5))

بتعويض هذه للقيم فى $Adu + Bdv = 0$

نحصل على

$$-vdu + \frac{1}{2}udv = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v}dv = 2\frac{1}{u}du$$

وبالتكامل نحصل على $\ln v = 2\ln u + \ln c$ أى

$$v = cu^2 \qquad (7)$$

وبوضع قيم u، v من (4)، (5) فى (7) نحصل على

$$x^2z^2 - 2y = cz^2$$

وهو الحل المطلوب.

الطريقة الرابعة:

تستخدم النظرية التالية عندما تكون المعادلة $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ متجانسة ومن درجة $n \neq -1$ وتامة .

نظرية(٣): يكون $xP + yQ + zP = c$ حلاً للمعادلة $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ عندما تكون هذه المعادلة تامة ومتجانسة من درجة $n \neq -1$.

البرهان: ليكن لدينا

$$xP + yQ + zP = c \qquad (1)$$

باشتقاق (1) نحصل على

$$\left(P+x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial x}+z\frac{\partial R}{\partial x}\right)dx+\left(x\frac{\partial P}{\partial y}+Q+y\frac{\partial Q}{\partial y}+z\frac{\partial R}{\partial y}\right)dy$$

$$+\left(x\frac{\partial P}{\partial z}+y\frac{\partial Q}{\partial z}+R+z\frac{\partial R}{\partial z}\right)=0 \qquad (2)$$

وحيث أن $Pdx+Qdy+Rdz=0$ معادلة تامة أى

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z} \qquad (3)$$

يمكن إعادة ترتيب (2) باستخدام (3) كالتالى

$$\left(P+x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial P}{\partial y}+z\frac{\partial P}{\partial z}\right)dx+\left(Q+x\frac{\partial Q}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial y}+z\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy$$

$$+\left(R+x\frac{\partial R}{\partial x}+y\frac{\partial R}{\partial y}+z\frac{\partial R}{\partial z}\right)dz=0 \qquad (4)$$

وحيث أن $Pdx+Qdy+Rdz=0$ متجانسه من درجة n، أى أن R,Q,P دوال متجانسة من درجة n . واستخدام نظرية أويلر للدوال المتجانسة R,Q,P من درجة n يكون لدينا

$$x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial P}{\partial y}+z\frac{\partial P}{\partial z}=nP$$

$$x\frac{\partial Q}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial y}+z\frac{\partial Q}{\partial z}=nQ \qquad (5)$$

$$x\frac{\partial R}{\partial x}+y\frac{\partial R}{\partial y}+z\frac{\partial R}{\partial z}=nR$$

بإستخدام (5) فإن (4) نختزل إلى

$$(P+nP)dx+(Q+nQ)dy+(R+nR)dz=0$$

$$(n+1)(Pdx+Qdy+Rdz)=0$$

وحيث أن $n+1\neq 0$ (إفتراضياً) فإن

$$Pdx+Qdy+Rdz=0 \qquad (6)$$

وهى المعادلة التفاضلية المعطاه وبالتالى فإن (1) يكون هو حل المعادلة (6).

مثال (٢): حل المعادلة

$$(x-3y-z)dx+(2y-3x)dy+(z-x)dz=0$$

الحل: لدينا

$$(x-3y-z)dx+(2y-3x)dy+(z-x)dz=0 \qquad (1)$$

بالمقارنة مع $Pdx+Qdy+Rdz=0$ يكون لدينا

$$P=(x-3y-z),\ Q=(2y-3x),\ R=(z-x) \qquad (2)$$

وهذه الدوال متجانسه من درجة $n=1$ وكذلك من (2) نحصل على

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-3=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=0=\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x}=-1=\frac{\partial P}{\partial z} \qquad (3)$$

وهذه تبين أن (1) تامة ومتجانسة من درجة $n=1(n\neq -1)$ وعلى ذلك يكون حل المعادلة (1) هو

$$xP+yQ+zR=c$$

أى

$$x(x-3y-z)+y(2y-3x)+z(z-x)=0$$

أى

$$x^2+2y^2+z^2-6xy-2xy=c$$

٢٠-٦ عدم قابلية التكامل:

نفترض أن شرط القابلية للتكامل غير متحقق للمعادلة

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \qquad (1)$$

فان (1) تمثل عائلة منحنيات متعامدة على العائلة الممثلة بالمعادلات

$$dx/P + dy/Q + dz/R \qquad (2)$$

وفي مثل هذه الحالات يمكن أن نجد عدد لا نهائي من المنحنيات تقع على سطح معطى وتحقق (1). ولبيان ذلك

لتكن عائلة المنحنيات الممثلة في (1) تقع على السطح

$$f(x, y, z) = c \qquad (2)$$

وباشتقاق (2) وتحذف z، dz من المعادلات الناتجة باستخدام (1)، (2).
وبتكامل المعادلة الناتجة التي تحتوى على x، y فقط. فان الحل الناتج (من التكامل) مع (2) معاً يمثلان المنحنيات المطلوبه.

مثال (١): اوجد المنحنيات الممثلة بحل المعادلة
$ydx + (z-y)dy + xdz = 0$ والتي تقع في المستوى $2x - y - z = 1$

الحل: لدينا

$$ydx + (z-y)dy + xdz = 0 \qquad (1)$$

$$2x - y - z = 1 \qquad (2)$$

بمقارنة (1) مع $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ نجد أن

$$P = y,\ Q = z - y,\ R = x \qquad (3)$$

وباستخدام (3) نجد أن

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) =$$

$$= y(1-0)-(z-y)(1-0)+x(1-0)=x+z \neq 0$$

وهذا يثبت أن شرط القابلية للتكامل غير متحقق من (1) باشتقاق (2) نجد أن

$$2dx-dy-dz-0 \quad \Rightarrow \quad dz=2dx-dy \qquad (4)$$

تستخدم (4) لحذف dz من (1)

$$ydx+(z-y)dy+x(2dx-dy)=0$$

أو باستخدام (2) نجد أن

$$ydx+(2x-y-1-y)dy+x(2dx-dy)=0$$

أى

$$(y+2x)dx+(x-2y-1)dy=0$$

أى

$$(ydx+xdy)+2xdx-2ydy-dy=0$$

وبالتكامل

$$xy+x^2-y^2-y=c \qquad (5)$$

وتكون عائلة المنحنيات المطلوبة تعطى بتقاطع المستوى (2) مع الاسطوانة الزائدية (5).

تمارين

أ - حل المعادلات التالية

(1) $\dfrac{dx}{xz(z^2+xy)}=\dfrac{dy}{-yz(z^2+xy)}=\dfrac{dz}{x^4}$

(2) $\dfrac{dx}{xy}=\dfrac{dy}{y^2}=\dfrac{dz}{zxy-2x^2}$

(3) $\dfrac{dx}{1}=\dfrac{dy}{3}=\dfrac{dz}{5z+\tan(y-3x)}$

(4) $\dfrac{dx}{y^2}=\dfrac{dy}{x^2}=\dfrac{dz}{x^2y^2z^2}$

(5) $dx=dy=dz/\sin x$

(6) $\dfrac{dx}{y}=\dfrac{dy}{-x}=\dfrac{dz}{2x-3y}$

(7) $\dfrac{dx}{mz-ny}=\dfrac{dy}{nx-\ell z}=\dfrac{dz}{\ell y-mx}$

(8) $\dfrac{dx}{y^3x-2x^4}=\dfrac{dy}{2y^4-x^3y}=\dfrac{dz}{9z(x^3-y^2)}$

(9) $\dfrac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\dfrac{dy}{2xy}=\dfrac{dz}{2xz}$

(10) $\dfrac{dx}{x^2-yz}=\dfrac{dy}{y^2-zx}=\dfrac{dz}{z^2-xy}$

(11) $\dfrac{dx}{y+z}=\dfrac{dy}{z+x}=\dfrac{dz}{x+y}$

(12) $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z-a\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(13) $\frac{dx}{\cos(x=y)}=\frac{dy}{\sin(x+y)}=\frac{dz}{z}$

ب – حل المعادلات التفاضلية التالية

1- $(y+z)dx+(z+y)dy+(x+y)dz=0$

2- $(yz+2x)dx+(zx+2y)dy+(xy+2x)dz=0$

3- $(x-y)dx-xdy+zdz=0$

4- $dx+dy+(x+y+z1)dz=0$

5- $(2x^3-z)zdx+2x^2yzdy+x(z+x)dz=0$

جـ – حل المعادلات التفاضلية التالية

1- $(x^2y-y^3-y^2z)dx+(xy^2-x^2z-x^3)dy+(xy^2+x^2y)dz=0$

2- $(x-y)dx-xdy+zdz=0$

3- $yz^2(x^2-yz)dx+x^2z(y^2-xz)dy+xy^2(x^2-xy)dz=0$

4- $(2x^2-xy+y^2)zdx+(2z^2+x^2-xy)zdy-(x+y)(xy-z^2)dz=0$

5- $2(2y^2+yz-z^2)dx+x(4y+z)dy+x(y-2z)dz=0$

د – حل المعادلات التفاضلية التالية (بالمعادلة المساعدة)

1- $(2xz-yz)dx+(2yz-zx)dy-(x^2-xy+y^2)dz=0$

2- $(y^2+yz+z^2)dx+(z^2+zx+x^2)dy+(x^2+xy+y^2)dz=0$

3- $(y^2+yz)dx+(xz+z^2)dy+(y^2-xy)dz=0$

4- $z(z-y)dx+(z+x)zdy+x(x+y)dz=0$

هـــ – اوجد نظام المنحنيات الواقعة على نظام السطوح $zx = c$ وتحقق المعادلات التفاضلية $yzdx + z^2dy + y(z + x)dz = 0$.

و – اثبت أن المعادلة $3ydx + (z - 3)dy + xdz = 0$

غير قابلة للتكامل ثم اثبت أن المسقط على المستوى xy للمنحنيات التى تحقق المعادلة تقع على المستوى $2x + y - z = a$ هى القطوع الزائدية القائمة ، $x^2 + 3xy - y^2 - ay = b$

ز– اوجد معادلة الاسطوانة التى مولدها يوازى المحور y وتمر خلال النقطة (2, 1, -1) وكذلك خلال المنحنى الذى يقع على الكره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ وتحقق المعادلة

$$(xy + 2xz)dx + y^2dy + (x^2 + yz)dz = 0$$

الباب الحادى والعشرون

التذبذب

Oscilations

٢١-١ مقدمة: للخواص الكيفية لحلول المعادلات التفاضلية أهمية قصوى فى غياب وجود صيغ الحلول. على شكل دوال. وبالتالي يكون من الضرورى دراسة المعادلة التفاضلية لمعرفة خواص هذه الحلول. ومن أهم هذه الخواص الكيفية التى لها تطبيقات واسعة، هى تذبذب الحلول

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية

$$y'' = f(x, y, y') \quad , \quad x \geq 0 \qquad (*)$$

حيث $y(t)$ حل للمعادلة (*) على . ومالم ينص على غير ذلك نقص بالحل هو الحل غير البديهى (أى $y(x) \neq 0$).

تعريف (١): تسمى النقطة $x = x^* \geq 0$ بأنها صفر الحل $y(x)$ للمعادلة (*) إذا كان $y(x^*) = 0$.

تعريف (٢): تسمى المعادلة (*) بأنها غير تذبذبية، إذا كان لكل حل غير بديهى $y(x)$ يوجد $x_0 > 0$ بحيث أن $y(x)$ ليس لها صفر فى $[x_0, \infty)$

تعريف (٣): تسمى المعادلة (*) تذبذبية إذا كان التعريف (٢) خاطئا.

مثال (١): ليكن لدينا المعادلة $y'' - y = 0$، $x \geq 0$. وهذه المعادلة غير تذبذبية حيث أ، حلها العام هو $Ae^x + Be^{-x}$ حيث A، B ثابتان

مثال (٢): المعادلة $y'' + y = 0$ تذبذبيه لأن حلها العام هو $y(x) = A\cos x + B\sin x$، $x \geq 0$. وبدون فقد العموم يمكن أن نفترض أن $A \neq 0$، $B \neq 0$ وإلا كان الحل $y(t)$ حل بديهى. نلاحظ أن الحل $y(x)$ له صفر عند $n\pi + \tan^{-1}(A/B)$، $n = 0, 1, 2, \ldots$ وبالتالى تكون المعادلة تذبذبية.

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad , \quad x \geq 0 \qquad (**)$$

حيث كل من $a(x)$ ، $b(x)$ دالة متصلة على $[0, \infty)$.

تمهيدية (١): بافتراض أن $a'(x)$ موجودة ومتصلة لكل $x \geq 0$. فإن المعادلة (**) تكون تذبذبية إذا وفقط إذا كان

$$y'' + c(x)y = 0 \qquad (***)$$

تذبذبية حيث $c(x) = b(x) - \frac{1}{4}a^2(x) - \frac{a'(x)}{2}$. تسمى المعادلة (***) بالصورة النظامية (normal) للمعادلة (**).

البرهان: ليكن $y(x)$ حلا للمعادلة (**) ونعتبر التحويل $y(x) = v(x)z(x)$ حيث كل من $v(x)$، $z(x)$ دالة قابلة للاشتقاق مرتين. بالتعويض في المعادلة (**) نجد أن

$$vz'' + (2v' + a(x)v)z' + (v'' + a(x)v' + b(x)v)z = 0$$

وبمساواة معامل z' بالصفر نحصل على

$$v(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^x a(s)\right)ds$$

وبالتالى فإن $z(x)$ تحقق المعادلة التفاضلية

$$z'' + c(x)z = 0 \quad , \quad x \geq 0$$

ومن ذلك نرى أن إذا كان $y(x)$ حل المعادلة (2) فإن

$$z(x) = y(x)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^x a(s)\right)ds$$

هو حل المعادلة (3) . وبالمثل إذا كان $z(x)$ حل المعادلة (3) فإن

$$y(x) = z(x)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^x a(s)\right)ds$$

هو حل المعادلة (2). وبهذا يتم البرهان.

ملحوظة: يجب أن تؤكد أن المعادلة (**) تكون تذبذبية إذا وإذا كان المعادلة (***) تذبذبية والعكس صحيح.

تمهيدية (٢): إذا كان y_1 ، y_2 حلين مستقلين خطياً للمعادلة (**) فإنه لايوجد صفر مشترك بين الحلين.

البرهان: ليكن $x=a$ صفر مشترك للحلين y_1 ، y_2. وبالتالى يكون الرونسكى للحلين y_1 ، y_2 مرتبطين خطياً، وهذا يتعارض الأفتراض وعلى ذلك يكون y_1 ، y_2 مستقلين خطياً.

تمهيدية (٣): أصفار حل المعادلة (**) تكون معزولة.

البرهان: مباشر مع مراعاة أنه إذا كان $x=a$ صفر للحل y للمعادلة (***) فإن $y(a)=0$ ، $y'(a)\neq 0$ وإلا $y(x)\equiv 0$ وهو الحل البديهى. وبدراسة الحالتين $y'(a)>0$ ، $y'(a)<0$ ينتج المطلوب.

ملحوظة: تسمى الحلول الدورية للنظم الخطية ذات معاملات ثابتة بأنها تذبذبية خطية ومثال ذلك المعادلة $y''+w^2y=0$ ، حيث w ثابت وحلولها $\sin wx$ ، $\cos wx$ تذبذبية.

يكون للصورة المترافقة ذاتيا للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية أهمية خاصة وتأخذ المعادلة المترافقة ذاتيا الصورة

$$(p(x)y')'+q(x)y=0 \tag{1}$$

حيث p، q متصلتان $p>0$ على I. ويمكن كتابة المعادلة التفاضلية

$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0 \tag{2}$$

على الصورة (1) بضرب المعادلة (2) فى

$$\frac{1}{a(x)}\exp\int_{x_0}^{x}[b(x)/a(x)]dx$$

فإن

$$p(x)=\exp\int_{x_0}^{x}[b(x)/a(x)]dx\ ,\quad q(x)=\frac{c(x)}{a(x)}p(x)$$

صيغة آبل Abel's formula

ليكن $u(x)$ ، $v(x)$ حلين للمعادلة (1) سوف نثبت أن

$$p(x)[u(x)v'(x)-u'(x)v(x)]\equiv k \qquad (3)$$

حيث k ثابت. وحيث أن $v\,,u$ حلين للمعادلة (1) فإن

$$[p(x)u'(x)]'+q(x)u(x)\equiv 0$$

$$[p(x)v'(x)]'+q(x)v(x)=0$$

وإذا ضربنا المعادلة الأولى فى $v(x)$ والثانية فى $u(x)$ بالطرح نحصل على

$$u(x)[pv']'-v(x)(pu')'\equiv 0$$

وبتكامل الطرفين من a إلى x نحصل على

$$p(x)[u(x)v'(x)-u'(x)v(x)]\equiv p(a)[u(a)v'(a)-u'(a)v(a)]=K$$

ونلاحظ أن المقدار داخل القوس هو رونسكى الحلين $u(x)$ و $v(x)$. ويكون الثابت k مساويا للصفر إذا كان الحلان $u(x)$ و $v(x)$ مرتبطين خطياً. وتسمى المتطابقة (3) بصيغة آبل.

٢١-٢ بعض الخواص:

يكون لحلول المعادلة التفاضلية

$$(p(x)y')'+q(x)y=0 \qquad (1)$$

الخواص التالية :

خاصية (١): إذا كان $y(x)$ حلا للمعادلة (2) بحيث أن لنقطة ما $x_0\in[a,b]$ يكون $y(x_0)=0$، $y'(x_0)=0$ فإن $y(x)=0$ لجميع قيم $x\in[a,b]$.

البرهان: الدالة $y_0(x)$ التى تساوى صفراً تطابقيا فى $[a,b]$، وهى تحقق المعادلة (2) والشرط الابتدائيى $y_0'(x_0)=0$. وبالتالى الدالتان $y(x)$، $y_0(x)$ تحققان نفس الشرط الابتدائى عند x_0، ومن نظرية الوحدوية نرى أن $y(x)=y_0(x)=0$ لجميع قيم $x\in[a,b]$.

ملحوظة (١):

(i) فى المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية لايوجد حل غير بديهى له صفر من الرتبة الأولى (أى $y'(x) \neq 0$)

(ii) فى المعادلات التفاضلية من الرتبة النونية لايوجد حل غير بديهى له صفر من الرتبة $(n - 1)$ (أى $y^{(n-1)}(x_0) \neq 0$)

خاصية (٢): إذا كان $y(x)$ له صفر عند $x = a$ فإن $y'(a) \neq 0$

البرهان: إذا كان $y'(a) = y(a) = 0$ فإنه من الخاصية (١) يكون $y(x)$ هو الحل البديهى.

خاصية (٣): فى أى فترة مغلقة محدودة يكون للحل $y(x)$ عدد محدود من الاصفار.

خاصية (٤): إذا كان $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ حلين للمعادلة (1) والذى لهما صفر مشترك عند $x = a$ فإن $y_2(x)$ يكون ثابت مضاعف للحل $y_1(x)$ [أى $y_2(x) = cy_1(x)$ ، c حيث c ثابت]

البرهان: حيث $y_1'(a) \neq 0$ من الخاصية (٢) فإنه يمكننا تعريف الثابت c بالعلاقة $c = y_2'(a) / y_1'(a)$. وبالتالى الحل ϕ للمعادلة (1) المعرف بالعلاقة $\phi(x) = y_2(x) - y_1(x)$ يكون بحيث $\phi(a) = \phi'(a) = 0$. وبالتالى $\phi(x) = 0$ أى أن $y_2(x) = cy_1(x)$.

نظرية (١): إذا كانت $p(x) > 0$ وكانت $p(x)$ ، $q(x)$ متصلين على الفترة $a \leq x \leq b$، فإن الحل الوحيد للمعادلة (1) الذى يكون له عدد غير محدود من الاصفار فى هذه الفترة هو الحل الصفرى (null).

البرهان: ليكن الحل $y(x)$ له عدد لا نهائى من الأصفار على هذه الفترة. فإن فئة هذه الأصفار لها نقطة نهاية x^* فى هذه الفترة ومن نظرية بولزانو- فيرلشتراس (Bolzano-Weierstrass) يوجد متتابعة $\{x_n\}_0^\infty$ من الأصفار والتى تتقارب إلى x^* مع

$$x_n \neq x^* \quad , \qquad n = 0,1,2,.....$$

سوف نثبت $y(x^*) = y'(x^*) = 0$ والذى يلى من الخاصية (i) أن $y(x) \equiv 0$.

وحيث أن $y(x)$ دالة متصلة في x. فإن

$$\lim_{x \to x^*} y(x) = y(x^*)$$

عندما $x \to x^*$ من خلال أى متتابعة من الأعداد على $[a,b]$. وباختيار $x_0, x_1, x_2, ...$ كمتتابعة من الأعدا فنرى أن $y(x^*) = 0$. كما نلاحظ أن

$$\lim_{x \to x^*} \frac{y(x) - y(x^*)}{x - x^*} = y'(x^*)$$

وحيث تعلم ان $y'(x^*)$ موجودة، فإننا نوجد قيمة النهاية بأخذ x تؤول إلى x^* خلال متتابعة الأعداد $x_0, x_1, x_2, ...$. وبالتالى $y'(x^*) = 0$. وبهذا يتم البرهان.

تمهيدية (٤): (بدون برهان) إذا كان الحل $y(x)$ له N من الاصفار في الفترة $[x_0, x_1]$ ولن ℓ ، M ثابتان موجبان بحيث $p(x) \geq \ell$, $q(x) \leq M$ في $[x_0, x_1]$. فإن

$$N \leq (x_1 - x_0)\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{M}{\ell}} + 1$$

٢١-٣ نظريات شتورم (Sturm Theorems)

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0 \qquad (1)$$

سوف نبرهن الآن نتائج أساسية برهنها شتورم وسوف نحتاج إلى التمهيدية التالية لاثبات النظرية.

تمهيدية (١): إذا كان الحلان $u(x)$، $v(x)$ للمعادلة (1) لهما صفر مشترك فإنهما يكونا مرتبطين خطياً. وعلى العكس إذا كان $u(x)$، $v(x)$ مرتبطين خطياً ولا يساويان الصفر تطابقياً، فإذا تلاشى احدهما عند $x = x_0$ فإن الثانى يتلاشى عند $x = x_0$.

البرهان: متروك للقارئ.

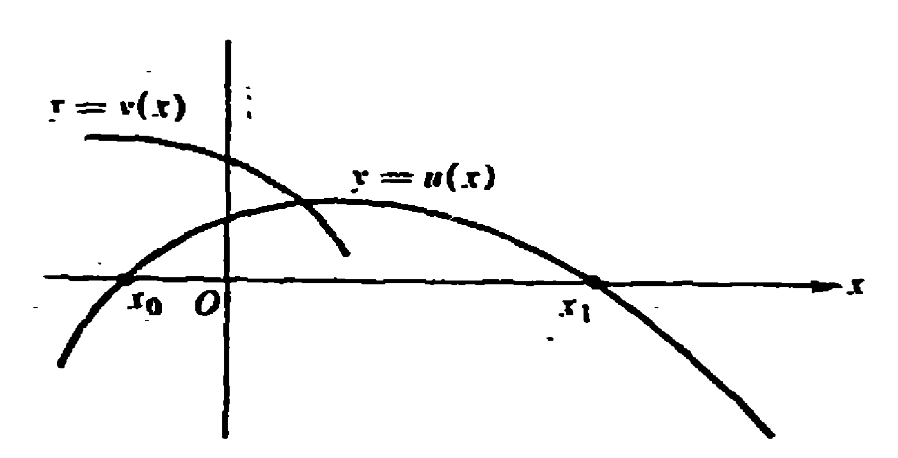
نظرية (١): نظرية شتورم للفصل (Separation) إذا كان $u(x)$، $v(x)$ حلين مستقلين خطياً للمعادلة (1) فإنه بين أى صفرين متتاليين للحل $u(x)$ يوجد صفر وحيد للحل $v(x)$.

البرهان: ليكن $x = x_0$، $x = x_1$ صفرين متتاليين للحل $u(x)$ وأن $x_0 < x_1$ كما فى الشكل. وبدون فقد للتعميم سنفترض أن $u(x) > 0$ على الفترة $x_0 < x < x_1$. وهذا ينتج من الحقيقة أن $-u(x)$ يكون أيضاً حلاً له نفس الصفرين مثل $u(x)$. ومن الافتراض ينتج أن $u'(x_0) > 0$، $u'(x_1) < 0$. وبالمثل بدون فقد العموم سوف نفترض أن $v(x_0) > 0$ حيث $v(x_0) \neq 0$ (خاصية (٤)) بوضع $x = x_0$ فى المعادلة

$$p(x)[u(x)v'(x) - u'(x)v(x)] \equiv k$$

نلاحظ أن $k < 0$. ويلى ذلك ان

$$p(x_1)[u(x_1)v'(x_1) - u'(x_1)v(x_1)] < 0$$



ولكن $u(x_1) = 0$، $u'(x_1) < 0$ وبالتالى $v(x_1) < 0$. وحيث أن $v(x)$ دالة متصلة، فيجب أن يكون لها صفراً واحداً على الأقل بين x_0 (حيث $v(x)$ موجبة)، x_1 (حيث $v(x)$ سالبة). وعلى ذلك لايمكن أن يكون هناك اكثر من صفر واحد. وبعكس الحجة أعلاه بافتراض أن للحل $v(x)$ صفران متتاليان يكون الحل $u(x)$ صفراً واحداً فقط وهذا يتناقض مع الافتراض. وبهذا يتم البرهان.

ملحوظة (١): ليس كل المعادلات (1) يكون لها صفرين على I.

وعموما يكون لدينا النظرية التالية

نظرية (٢): ليكن $u(x)$، $v(x)$ دالتين من الفصل C^1 على $[a,b]$ ونفترض أن $v(a)=v(b)=0$، $v(x)\neq 0$ على (a,b). إذا كان

$$w(x)=u(x)v'(x)-v(x)u'(x)\neq 0$$

على $[a,b]$ فإن $u(x)$ تتلاشى مرة واحدة على (a,b).

البرهان: بدون فقد العموم ليكن $w(x)>0$ على $[a,b]$ وان $v(x)>0$ على $[a,b]$. فإن

$$w(a)=u(a)v'(a)<0\ ,\quad w(b)=u(b)v'(b)>0$$

ولأن $v'(a)>0$، $v'(b)<0$ فيلي أن $u(a)>0$ ، $u(b)<0$ وطبقاً لذلك فإنه يجب أن تتلاشى $u(x)$ مرة واحدة على الأقل على (a,b). وطالما أن $w(x)\neq 0$ على (a,b) فإن صفر الدالة $u(x)$ يكون بسيطاً. نفترض أن $u(x)$ لها صفرا ثانياً على (a,b). باستخدام نفس الحجة السابقة ويتبادل $u(x)$، $v(x)$ يتبين أن $v(x)$ لها صفر بين صفرين الدالة $u(x)$ مناقضا الافتراض. وبهذا يتم البرهان.

ومن النظرية السابقة يكون لدينا النتيجة التالية.

نتيجة: إذا كان للدالة $v(x)$ عدد لانهائى من الأصفار وكانت $w(x)\neq 0$ على $[a,b]$ فإن:

(i) يكون للدالة $u(x)$ عدد غير منتهى من الاصفار على (a,b) أيضاً

(ii) أصفار كل من $u(x)$، $v(x)$ بسيطة

(iii) أصفار $u(x)$، $v(x)$ يفصل كل منهما الأخر

وقد تكون b محدودة أو غير محدودة.

ملحوظة (٢): لاحظ أن إذا كانت $b=\infty$، $w(x)$ لها اشارة واحدة فإن معطيات النتيجة تتحقق لقيم x الكبيرة.

التمهيدية التالية (بدون برهان)

تمهيدية (٢): ليكن $u(x)$، $v(x)$ دالتان من الفصل $C^1[a,b]$ وأن $u(a)=u(b)=0$ بحيث $v(x)\neq 0$ على $[a,b]$ فإنه يوجد ثابتان c_1، c_2

ليس كليهما صفر، بحيث أن الدالة $c_1u(x)+c_2v(x)$ لهما صفر مكرر على (a,b).

نظرية (شتورم للمقارنة) (Sturm Comparison Theorem)

تعرف أن حلول المعادلة $y''+4y=0$ تتذبذب على الفترة $0\le x\le 2\pi$ لكثر من حلول المعادلة $y''+y=0$ على نفس الفترة حيث أن أحد حلول المعادلة الأولى $\sin 2x$ بينما احد حلول الثانية $\sin x$.

وإن نظرية شترم للمقارنة تقارن بين معدل تذبذب حلول المعادلتين

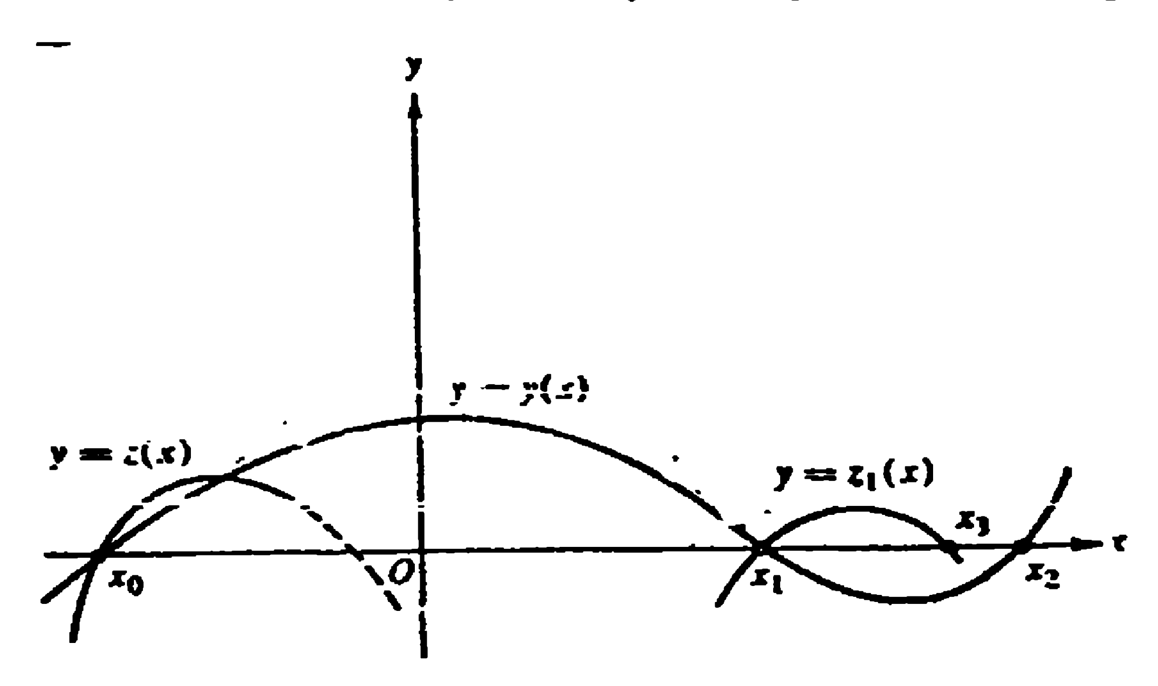
$$(p(x)y')'+q(x)y=0 \qquad (2)$$

$$(p(x)z')'+q_1(x)z=0 \qquad (3)$$

حيث $p>0$ ، p، q، q_1 دوال متصلة على $a\le x\le b$.

نظرية (٣): (نظرية شتورم للمقارنة)

إذا كان الحل $y(x)$ للمعادلة (2) له صفرين متتالين عند $x=x_0$، $x=x_1$، ($x_0<x_1$)، وكان $q_1(x)\ge q(x)$ (حيث تتحقق المتباينة على الأقل عند نقطة فى الفترة $[x_0,x_1]$)، فإن الحل $z(x)$ للمعادلة (3) الذى يتلاشى عند $x=x_0$ سوف يتلاشى مرة أخرى على الفترة $x_0<x<x_1$.



البرهان: نفترض بدون فقد العمومية ، أن $y(x)>0$ على الفترة $x_0<x<x_1$ وأن $y'(x_0)>0$، $y'(x_1)<0$ وأن $z'(x_0)>0$. وحيث أن $y(x)$، $z(x)$ حلين للمعادلتين (2)، (3) فيكون لدينا المتطابقتان.

$[p(x)y']' + q(x)y(x) \equiv 0$

$[p(x)z']' + q_1(x)z(x) \equiv 0$

بضرب المعادلة الأولى فى $-z(x)$ والثانية فى $y(x)$ والجمع وتكامل المعادلة الناتجة على الفترة $x_0 \le x \le x_1$ فنحصل على

$$p(x)[yz' - y'z]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} [q_1 - q]yz\,dx = 0$$

أو

$$p(x_1)y'(x_1)z(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} [q_1(x) - q(x)]y(x)z(x)dx \qquad (4)$$

الأن نفترض أن $z(x) > 0$ على $x_0 < x < x_1$. فإن التكامل فى (4) يكون موجباً بينما الطرف الأيسر ليس كذلك وهذا يؤدى إلى تناقض مما يؤكد صحة النظرية.

كما نلاحظ أيضاً أنه إذا كانت $y(x)$ تتلاشى أيضاً عند $x = x_2 > x_1$ مع $q_1 > q$ على (x_1, x_2) فإن $z(x)$ سوف تتلاشى أيضاً عند $x_1 < x < x_2$. لذلك نعتبر حلا ثانيا $z_1(x)$ للمعادلة (3) معرف بالشروط $z_1(x_1) = 0$، $z_1'(x_1) \ne 0$، وعلى ذلك يكون للحل $z_1(x)$ صفراً x_3 فى الفترة $x_1 < x < x_2$ وباستخدام نظرية شتورم للفصل نجد أن $z(x)$ لها صفراً على الفترة $x_1 < x < x_3$.

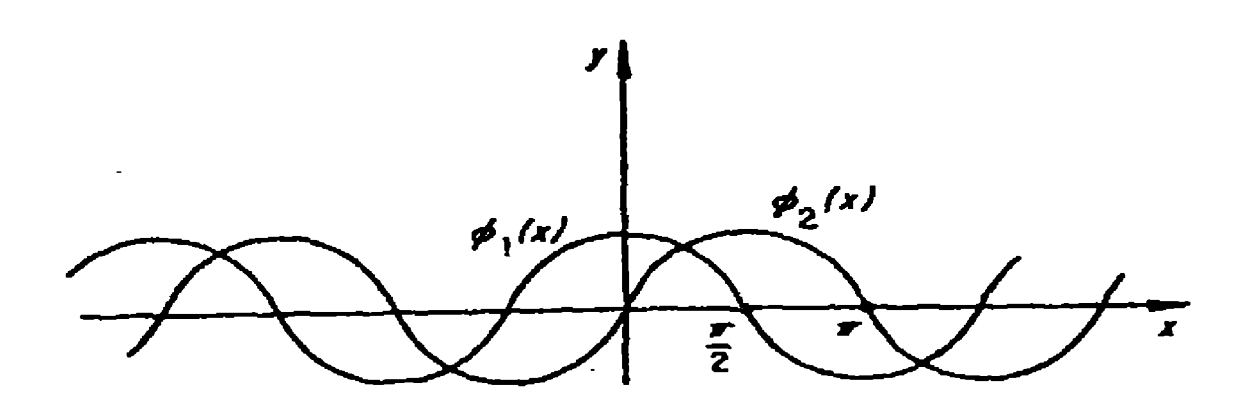
مثال (١): اثبت أن كل حب للمعادلة $y'' + x^2 y = 0$ لها عدد غير منتهى من الاصفار على $[1, \infty)$.

الحل: نعتبر $y'' + y = 0$ والذى حلها $\sin x$ الذى له اصفار عندما $x = k\pi$، $k = 0, 1, 2, ...$. وحيث أن $x^2 \ge 1$ على $[1, \infty)$ فإن من نظرية شتورم للمقارنة فإن للمعادلة المعطاة فى المسألة لها على الأقل صفر بين $k\pi$، $(k+1)\pi$. وبالتالى لها عدد لانهائى من الأصفار على $[1, \infty)$.

مثال (٢): ليكن لدينا المعادلة $y'' + y = 0$ الذى حليهما هما

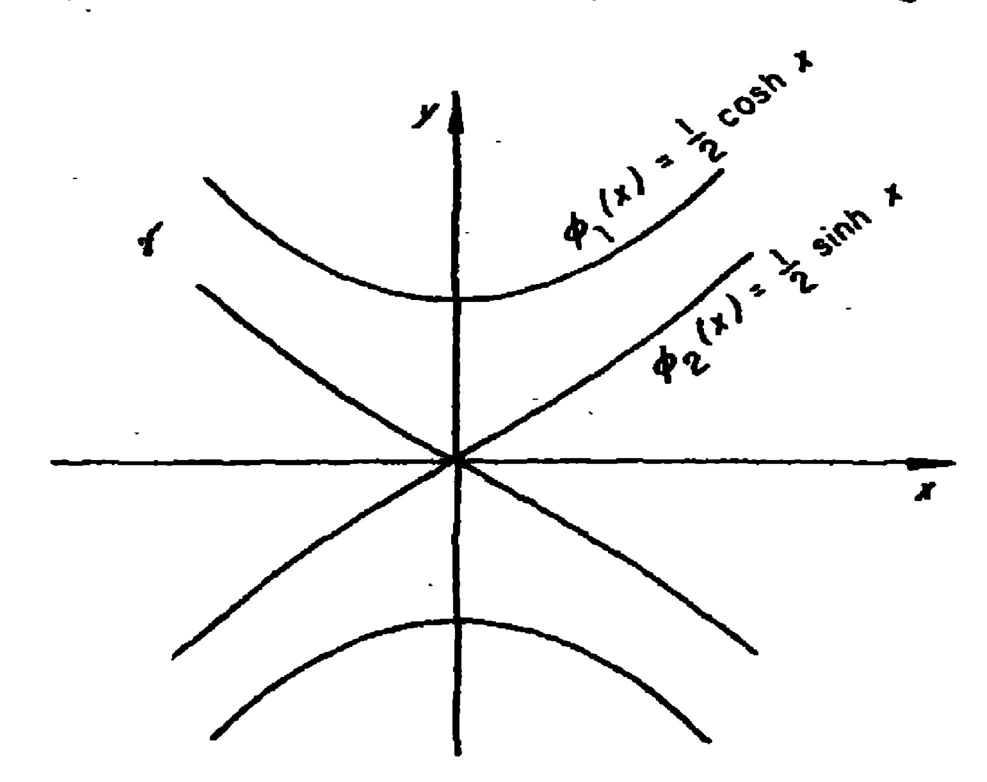
$\phi_1(x) = \cos x \qquad , \qquad \phi_2(x) = \sin x$

وان أصفار ϕ_1 هى $(n+\frac{1}{2}\pi)$ وأصفار ϕ_2 هى $n\pi$ حيث n عدد صحيح.
فإن هذه الحلول تتبادل (تتعاقب) على $(-\infty,\infty)$ كما فى الشكل



ومن نظرية شتروم للفصل فان بين أى صفرين للحل $\varphi_1(x)$ يوجد صفر وحيد للحل $\varphi_2(x)$.

مثال (٣): الدالتان $\sinh x$ ، $\cosh x$ يكونا حلين مستقلين $y''-y=0$. فإننا $\sinh x$ لها صفراً عند $x=0$ بينما $\cosh x$ ليس لها أصفار كما فى الشكل



نرى من هذه الأمثلة أن نظرية شتروم لاتتعرض لعدد أصفار الحل.

مثال (٤): ليكن لدينا المعادلتين

(i) $\frac{d^2y}{dx^2}+A^2y=0$, (ii) $\frac{d^2y}{dx^2}+B^2y=0$

حيث A، B ثابتان $B > A > 0$. فالدالتان φ_2 , φ_1 المعرفتان على الترتيب كما يلي $\varphi_2(x) = \sin Bx$, $\varphi_1(x) = \sin Ax$ وهما حلين حقيقيين نعتبر أصفار $\sin Ax$ وهى

$$\frac{n\pi}{A} , \quad \frac{(n+1)\pi}{A} , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

فإن من نظرية شتورم للمقارنة نكون متأكدين من أن $\sin Bx$ لها على الأقل صفر ξ_n بحيث أن

$$\frac{n\pi}{A} < \xi_n < \frac{(n+1)\pi}{A} , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

وعلى وجه الخصوص $x = 0$ هى صفر لكل من $\sin Ax$، $\sin Bx$. ويكون الصفر التالى للحل $\sin Bx$ هو $\frac{\pi}{B}$ ومن الواضح أن $\frac{\pi}{B} < \frac{\pi}{A}$.

مثال (٥): ليكن لدينا

(i) $y'' + y = 0, \quad q = 1, x \geq 0$

(ii) $y'' - y = 0, \quad q_1 = -1, x \geq 0$

جميع شروط النظرية (٣) متحققة ماعدا q_1 ليست لكبر من q. ونلاحظ بسهولة أن يبين أى صفرين للحل $y(x)$ للمعادلة (i)، فإن أى حل $y(x)$ للمعادلة (ii) لايسمح وجود صفر يبين صفرى الحل $y(x)$ للمعادلة (i). وعلى ذلك لاتتحقق النظرية إذا اسقطنا الشرط $q_1(x) \geq q(x)$.

مثال (٦): ليكن لدينا

(i) $y'' + y = 0, \quad q(x) \equiv 1$

(ii) $z'' + 4z = 0, \quad q_1(x) \equiv 4$

نلاحظ تحقق الشرط $q_1(x) > q(x)$ وكذلك شروط نظرية (٣) $y = \sin x$ هو حل المعادلة (i) وان $z = \sin(2x)$ هو حل المعادلة (ii) الذى له صفر عند $x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{2}$. ومن الواضح أن $y(x) = \sin x$ لايتلاشى فى الفترة $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

وهذا يبين أن تحت شروط النظرية (٣) بين أى صفرين للحل $z(x)$ لايشترط وجود صفر للحل $y(x)$.

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0 \qquad \text{(A)}$$

والتى يمكن تحويلها إلى

$$u''+q(x)u=0 \qquad \text{(B)}$$

وذلك باستخدام التحويل $y=u\exp\left(-\frac{1}{2}\int\frac{a_1}{a_0}dt\right)$ حيث

$$q(x)=\frac{a_0}{a_0}-\frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_0^2}-\frac{1}{2}\frac{a_1'a_0-a_1a_0'}{2}$$

وهذا يقودنا إلى النظرية التالية.

نظرية (٤): لذا كان $q(x)\le 0$ فى الفترة (x_1,x_2) فإن أى حل غير صفرى $\phi(x)$ للمعادلة (B) له على الأكثر صفر واحد على (x_1,x_2)

البرهان: نفترض أن $\phi(x_0)\neq 0$ فإن $\phi'(x_0)\neq 0$ حيث $x_1<x_0<x_2$ وإلا إذا كان $\phi'(x_0)=0$ فإن $\phi(x)=0$ من نظرية وجود الحل. إذا كان $\phi'(x_0)>0$ فإن لكل $x>x_0$ يكون $\varphi(x)>0$ وبالتالى $\varphi''(x)=-q(x)\varphi(x)\ge 0$ وبالتالى تكون $\varphi(x)$ دالة مطردة التزايد وبالتالى ليس لها صفر لكل $x>x_0$ وبالمثل ليس للحل φ اصفار عندما $x<x_0$. وبالمثل يتحقق ذلك إذا إفترضنا $\phi'(x_0)<0$ ومن هذا نستنتج أن ϕ ليس لها اكثر من صفر واحد فى الفترة (x_1,x_2).

٢١-٤ الصيغ المترافقة (القرينة): Adjoint forms

ليكن لدينا

$$L[y]=a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$$

معرفة على الفترة I ، وبتكامل $zL[y]$ بالتجزئ من a إلى x نحصل على

$$\int_a^x zL[y]dx = [(za_0)y' - (za_0)'y + (za_1)y]_0^x$$

$$+\int_a^x [(za_0)'' - (za_0)' + (za_2)]ydx \qquad (1)$$

والأن نعرف مؤثر من الرتبة الثانية L^* بالعلاقة

$$L^*(z) = (za_0)'' - (za_1)' + (za_2) = a_0z'' + (2a_0' - a_1)z' + (a_0'' \neg a_1' + a_0)z$$

وتأخذ العلاقة (1) الصورة

$$\int_a^x (zL[y] - yL^*[y])dx = [a_0(y'z - yz') + (a_1 - a_0')yz]_0^x \qquad (2)$$

يسمى L^* بالمؤثر المترافق (القرين) للمؤثر L. ويمكن التأكد من أن المؤثر المترافق للمؤثر L^* هو L نفسه. إذا كان $L^* = L$ فإنه يقال أن L مؤثر مترافق ذاتى self-adjoint والشرط الضرورى لتحقيق ذلك

$$a_1 = 2a_0' - a_1 \quad , \quad a_2 = a_0'' - a_1' + a_2$$

وهذا يتحقق إذا كان $a_1 = a_0'$.

وإذا كان L مؤثر ذاتى فيكون لدينا

$$L[y] = a_0y'' + a_0'y' + a_2y = (a_0y') + a_2y \qquad (3)$$

وعموماً إذا لم يكن L غير مترافق ذاتياً، فإذا وضعنا

$$h(x) = \frac{1}{a_0}\exp\left[\int^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)}\right]dt \qquad (4)$$

فإن $h(x)L(y)$ يكون مترافق ذاتياً .

كثير من معادلات الفيزياء الرياضية يعبر عنها فى الصورة المترافقة وتكون ذات أهمية فى نظرية شتروم وليوفيل Shurm-Liouville

والأن إذا اشتققنا طرفى (2) نحصل على

$$zL[y]-yL^*(z)=\frac{d}{dx}[a_0(y'z-yz')+(a_1-a_0')yz] \qquad (5)$$

والتى تعرف بمتطابقة لاجرانج Lagrange identity للمؤثر L.

وإذا كاملنا (2) من a إلى b نحصل على متطابقة جرين.

$$\int_a^b (zL[y]-yL^*[z])dx^x=[a_0(y'z-yz')+(a_1-a_0')yz]_a^b \qquad (6)$$

وإذا كان L مؤثر مترافق ذاتيا فى هذه العلاقة (6) تؤول إلى

$$\int_a^b (zL[y]-yL^*[z])dx=a_0(y'z-yz')]_a^b$$

٢١-٥ تعويض بروفر (Prüfor substitution) (طريقة شتورم الثانية للمقارنة)

من الطرق الجيدة لتحديد موقع أصفار حلول المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية المترافقة ذاتياً

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y=0 \quad , \quad p(x)>0 \qquad (1)$$

تلك التى وضعها بروفر. والطريقة تتكون من استخدام طريقة تعويض بروفر

$$py'=r\cos\theta \quad , \quad y=r\sin\theta \qquad (2)$$

والمتغيران المرتبطان الجديدان، حيث لا يتلاشى الجاكوبى، هما

$$r^2=(py')^2+y^2, \quad r>0 \qquad (3)$$

$$\theta=\arctan(y/py') \qquad (4)$$

حيث يسمى r بمتغير السعة ، $\theta(x)$ بمتغير الطور (phase variable). ومن الواضح أنه إذا كان $r=0$ يكون مكافئاً إلى $y=0$ ، $y'=0$ لأى x معطاة. ومن نظرية وحدوية الحل يكون $y(x)=0$

ولتعيين نظام المعادلات التفاضلية المكافئ إلى $r(x)$، $\theta(x)$ تشتق أولا (3) ثم نبسطها فنحصل على

$$r^{1}(x)=\left(\frac{1}{p}-q\right)r\sin\theta\cos\theta \qquad (5)$$

ثم نشتق (4) ونبسطها فنحصل على

$$\theta'(x)=\frac{1}{p}\cos^{2}\theta+q\sin^{2}\theta \qquad (6)$$

يسمى النظام (5)، (6) الذى يكافئ المعادلة (1) بنظام بروفر المصاحب للمعادلة المترافقة ذاتيا (1) وعندما تكون p، q متصلتان فيمكننا أن نكتب

$$f(x,\theta)=\frac{1}{p}\cos^{2}\theta+q\sin^{2}\theta$$

وبالتالى

$$\frac{\partial f}{\partial\theta}=\left(q-\frac{1}{p}\right)\sin 2\theta$$

ونرى أن f، f_{θ} متصلتان وأن f تحقق شرط لبشتز الذى له ثابت لبشتز

$$K=\sup_{a<x<b}|f_{\theta}|\leq\sup_{a<x<b}|q(x)|+\sup_{a<x<b}\frac{1}{p(x)}$$

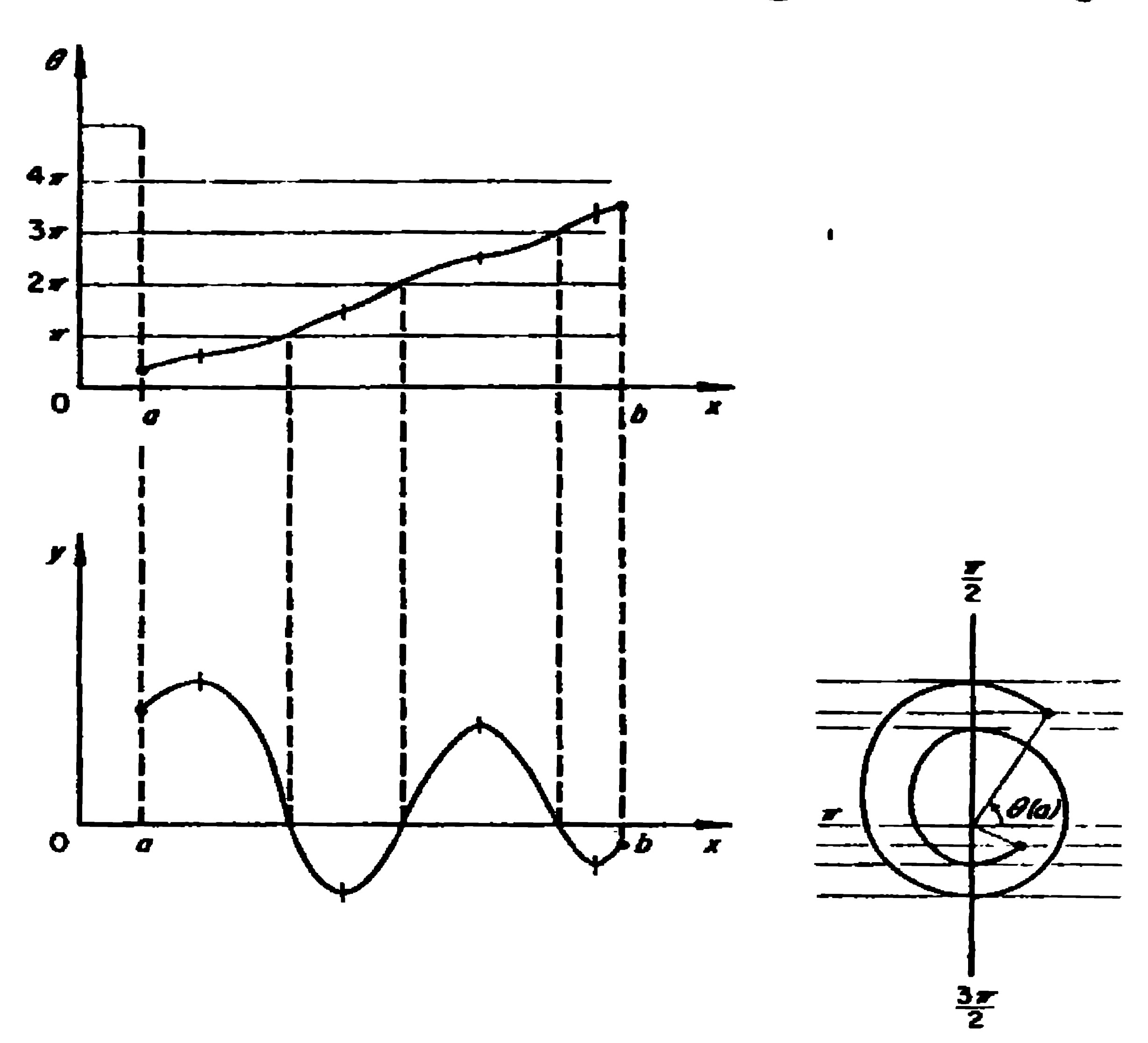
وعلى ذلك إذا كانت القيمة الابتدائية $\theta(a)=\alpha$ معطاة، فإن من نظرية وحدوية الحل يوجد حل وحيد $\theta(x)$. وعندما تكون $\theta(x)$ معلومة فإنه يمكن أن توجد $r(x)$ من (5) مستخدمين العلاقة

$$r(x)=r(a)\exp\left\{\int_{a}^{x}\left[\frac{1}{p(t)}-q(t)\right]\sin\theta(t)\cos\theta(t)dt\right\}$$

نلاحظ أن الحل يعتمد على $r(a)$ ، $\theta(a)$. وبتغير $r(a)$ يحدث تغير فقط فى $y(x)$ بمعامل ثابت. وبالتالى يمكن دراسة أصفار أى حل للمعادلة (1) بدراسة المعادلة (6).

وحيث أن $r(x)>0$ ، توجد أصفار أى حل $\varphi(x)$ عند النقاط حيث $\sin\theta=0$. وعند كل من هذه النقاط $\theta=0,\pm\pi\pm2\pi\pm....$ يكون لدينا $\cos^{2}\theta=1$ ،

$\frac{d\theta}{dx}>0$. وعلى ذلك يكون المنحنى $(r(x),\theta(x))$، فى نظام الاحداثيات القطبية، يمكن أن يقطع الأشعة $n=0,\pm1,\pm2,\pm....$ ، $\theta=n\pi$ فقط فى عكس إتجاه عقارب الساعه كما فى الشكل



نظرية (١): ليكن $p(x)>0$، p، q دالتان متصلتان على $[a,b]$ فإن الحل الوحيد للمعادلة

$$L[y]=\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{py}{dx}\right)+q(x)y=0$$

الذى له عدد غير منتهى من الاصفار على $[a,b]$ يكون هو الحل الصفرى.

البرهان: ليكن $\varphi(x)$ له عدد غير منتهى منن الأصفار على $[a,b]$. فإنه يكون لهم نقطة نهاية تجمع c. ليكن $\{x_n\}$ هى متتابعة من الأصفار التى لها $c=\lim_{n\to\infty}x_n$. وحيث أن $\varphi(x)$ دالة متصلة فيكون لدينا

$$\phi(c)=\lim_{n\to\infty}\phi(x_n)=0$$

وكذلك

$$\phi'(c)=\lim_{x_n\to c}\frac{\varphi(x_n)-\varphi(c)}{x_n-c}=0$$

ومن نظرية وحدوية الحل يكون $\phi(x)=0$.

ملحوظة: بالرغم من أن النظرية السابقة تنص على أنه فى فترة منتهية، يمكن للحل غير الصفرى أن يكون له عدد منتهى من الأصفار.

نظرية (٢): (نظرية شتروم الثانية للمقارنة)

ليكن p_1' ، p_2' ، q_1 ، q_2 دوال متصلة على $[a,b]$ وليكن $q_2(x)\ge q_1(x),\ 0<p_2(x)\le p_1(x)$ على $[a,b]$. وليكن φ_1 ، φ_2 حلين غير صفرين للمعادلتين

$$\frac{d}{dx}(p_1y')+q_1y=0$$

$$\frac{d}{dx}(p_2y')+q_2y=0$$

على الترتيب. إذا كان $\theta_2(a)\ge\theta_1(a)$ فإن $\theta_2(x)\ge\theta_1(x)$.

البرهان: تكون معادلتا بروفر هما

$$\theta_1'=\frac{1}{p_1}\cos^2\theta_1+q_1\sin^2\theta_1=F_1(x,\theta_1(x)) \qquad (7)$$

$$\theta_2'=\frac{1}{p_2}\cos^2\theta_2+q_2\sin^2\theta_2=F_2(x,\theta_2(x)) \qquad (8)$$

ومن الافتراضات لجميع $x\in[a,b]$ يكون

$$F_1(x,\theta(x))\le F_2(x,\theta(x))$$

ويكون لدينا من (7)، (8)

$$\begin{aligned}(\theta_2-\theta_1)'&=F_2(x,\theta_2(x))-F_1(x,\theta_1(x))\\ &\ge F_1(x,\theta_2(x))-F_1(x,\theta_1(x)) \qquad (9)\end{aligned}$$

وبالتالى

$$(\theta_1-\theta_2)' \le F_1(x,\theta_1(x))-F_1(x,\theta_2(x))$$

ليكن $\xi=\theta_1-\theta_2$ ونفترض أن $\theta_1(x)>\theta_2(x)$. إذا كان K هو ثابت لبشتز للدالة F_1 فإن

$$\xi'-K\xi\le 0$$

وهى متباينة من الرتبة الأولى. وبالتالى

$$\frac{d}{dx}\left(\xi e^{-Kx}\right)\le 0$$

وبالتكامل a إلى x نحصل على

$$\xi(x)e^{-Kx}\le\xi(a)e^{-Ka}$$

والتى تؤدى إلى

$$\xi(x)\le\xi(a)e^{K(x-a)} \qquad (10)$$

ولكن $\xi(a)=\theta_1(a)-\theta_2(a)\le 0$ من الأفتراض ولن $e^{K(x-a)}>0$ لجميع $x\in[a,b]$ ويلى من (10) إلى $\xi(x)\le 0$ والتى تتناقض مع افتراضنا أن $\xi(x)>0$ وبهذا يتم البرهان.

نتيجة (١): إذا كان $q_2(x)>q_1(x)$ على (a,b) فإن $\theta_2(x)>\theta_1(x)$ على $[a,b]$.

البرهان: نفترض أن لقيمة $c>a$، فيكون $\theta_2(x)=\theta_1(x)$ لجميع $x\in[a,c]$. ومن الواضح أنه (9) يمكن أن تتحقق للمتباينة $q_2>q_1$ فقط إذا كان $p_2(x)=p_1(x)$ على (a,c) وإذا كان $\theta_2=\theta_1=(\mathrm{mod}\,\pi)$. ونرى أن المعادلتين (7)، (8) لايمكن أن يتحققا. وهذا يتناقض من افتراضنا.

وبذلك نكون قد برهنا لا يمكن أن يوجد $c>a$ بحيث $\theta_2(x)\ge\theta_1(x)$ على $[a,b]$. وبالتالى يجب أن توجد متتابعة من النقاط $\{x_j\}$ مع نقطة نهاية a بحيث أن $\theta_2(x_j)>\theta_1(x_j)$. وعلى ذلك $\theta_2(x)>\theta_1(x)$ لقيم $x>x_j$ وبالتالى $\theta_2(x)>\theta_1(x)$ على $(a,b]$.

والأن يمكننا أن نمدد (extend) نظرية شترم الثانية للمقارنة.

نظرية (٣): ليكن φ_1، φ_2 أى حلين غير صفرين للمعادلتين

$$L_1[y]=\frac{d}{dx}(p_1y')+q_1y=0$$

$$L_2[y]=\frac{d}{dx}(p_2y')+q_2y=0$$

على الترتيب. ليكن $0\le p_2(x)\le p_1(x)$، $q_2(x)\ge q_1(x)$ لجميع $x\in[a,b]$.
فإن φ_2 لها صفرا بين أى صفرين متتالين للحل φ_1.

البرهان: ليكن للحل φ_1 صفرين $x=x_1$، $x=x_2$، $\varphi_1(x)>0$ فيكون

$$\theta_1(x_1)=K\pi \quad , \quad \theta_1(x_2)=(K+1)\pi \tag{11}$$

لعدد صحيح K. وحيث أن بتغيير θ_2 بمضافات π لا يغير φ_2. وسوف نفترض، بدون فقد للعموم، أن

$$\theta_2(x_1)-\theta_1(x_1)<\pi$$

وبالتالى

$$\theta_2(x_1)<(K+1)\pi$$

ولكن من نظرية (٢) يكون لدينا

$$\theta_2(x_2)>\theta_1(x_2)$$

ومن (11) نجد أن

$$\theta_2(x_2)>(K+1)\pi$$

وبالتالى فإن $\theta_2(x_2)$ يجب أن تأخذ القيمة $(K+1)\pi$ عند نقطة ما $x^*\in(x_1,x_2)$ وبالتالى $\varphi_2(x^*)=0$.

تمارين

١- اثبت أن بين كل صفرين متتاليين للحل $\sin x$ يوجد صفر واحد للحل $\sin x+\cos x$ (استخدم نظرية شتورم).

٢- إذا كان $u(x)$ هو حل $[p_1(x)y']'+q_2(x)y=0$ بحيث أن $u(x_0)=u(x_1)=0$، $u(x)>0$، $(x_0<x<x_1)$ اثبت أن $u'(x_0)>0$ وأن $u'(x_1)<0$.

٣- اثبت أنه بين كل صفرين متتالين للدالة $\sin x\ln x$ يوجد صفر للدالة $\cos x\ln x$.

٤- اثبت أنه إذا كان $q(x)\le 0$ على $[a,b]$، فإنه لايوجد حل غير صفرى للمعادلة $(py')'+qy=0$ له أكثر من صفر واحد على $[a,b]$.

٥- اثبت أن كل حل غير صفرى للمعادلة $y''+(\sinh x)y=0$ له على الاكثر صفر واحد فى $(-\infty,0)$ وعدد لانهائى الاصفار فى $(0,\infty)$.

٦- ليكن $q(x)>0$، q دالة متصلة على $(0,\infty)$. اثبت أن كل حل غير صفرى للمعادلة $y''+q(x)y=0$ له عدد لا نهائى ومن الاصفار على $(0,\infty)$

٧- اثبت أن كل حل غير صفرى للمعادلة $y''+e^x y=0$ له عدد لانهائى من الاصفار على $(0,\infty)$ بينما الحل غير الصفرى للمعادلة $y''-e^x y=0$ له على الاكثر صفر واحد على $(0,\infty)$.

٨- حول معادلة لاجير $xy''+(1-x)y'+ny=0$، n ثابت. إلى معادلة مترافقة ذاتياً وناقش السلوك التذبذبى لحلها على $(1,\infty)$.

٩- ليكن $q(x)\le 0$ على الفترة I. اثبت عدم وجود حل للمعادلة $\dfrac{d}{dx}\left(p\dfrac{dy}{dx}\right)+qy=0$ يتذبذب على I.

١٠- ليكن $q(x)$ قابله للاشتقاق باستمرار، $q(x)>0$، $q'(x)\ge 0$ على $[0,\infty)$. إذا كان x_1، x_2 صفرين متتاليين للدالة $\varphi'(x)$ حيث $\varphi(x)$ حلا للمعادلة $y''+q(x)y=0$ اثبت ان $|\varphi(x_2)|\le|\varphi(x_1)|$ (نظرية Osgood's).

١١- ليكن $p_1(x) \geq p_2(x) > 0$ ، $q_2(x) \geq q_1(x)$ ، $x \in [a,b]$ وليكن φ_j حل المعادلة

$$\frac{d}{dx}\left(p_j \frac{dy}{dx}\right) + q_j y = 0, \quad j = 1,2$$

ونفترض أن

$$\frac{p_2(a)\varphi_2'(a)}{\varphi_2(a)} \leq \frac{p_1(a)\varphi_1'(a)}{\varphi_1(a)}$$

واذا كان للحل φ_1 عدد n من الاصفار على $[a,b)$ فقط واثبت أن $\varphi_2(x)$ لها على الأقل n من الاصفار على نفس الفترة.

١٢- أوجد حل المعادلة $\theta' = h\cos^2\theta + K\sin^2\theta$ ، $h > 0, K > 0$.

١٣- أوجد الفترة الذى يكون فيها للحل غير الصفرى لمعادلة ليجندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

على الاكثر صفر واحد.

١٤- ناقش تذبذب حلول كل من

(i) $y'' + (1+\sin x)y = 0$

(ii) $y'' + (\cos 2x)y = 0$

١٥- حل المعادلة التفاضلية $(p(x)y')' = 0$ واثبت أنه لايوجد حل غير صفرى له لكثر من صفر واحد

١٦- ناقش تذبذب وعدم تذبذب حلول المعادلات

(i) $y'' + e^x y = 0 \qquad x \geq 0$

(ii) $y'' - e^x y = 0 \qquad x \geq 0$

١٧- استخدم نظرية شتورم للفصل لاثبات ان بين أى صفرين متتاليين للدالة $\sin 2x + \cos 2x$ يوجد صفر واحد للدالة $\sin 2x - \cos 2x$

١٨- اثبت أن كل حل للمعادلة $y''+[q(x)+K^2]y=0$ لها عدد لانهائى من الاصفار الموجبة، $q>0$ على $[1,\infty)$ حيث k ثابت

١٩- اعتبر المعادلة $y''+q(x)y=0$ حيث q دالة متصلة على $[a,b]$ بحيث أن $0<m<q(x)<M$. ليكن φ حل هذه المعادلة وله صفرين عند x_1، x_2 حيث $a<x_1<x_2<b$. اثبت أن

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}}<x_2-x_1<\frac{\pi}{\sqrt{m}}$$

٢٠- اثبت أن حلول المعادلة $y''+y=0$ تتذبذب أكثر من حلول المعادلة $x^2y''+xy'+y=0$ على الفترة $(1,\infty)$

الباب الثانى والعشرون

مسائل القيم الحدية

Boundary Value Problems

٢٢-١ مقدمة : نتعرض مسائل القيمة الحدية لايجاد حل مجهول والذى يحقق معادلة تفاضلية عادية وشرط حدى مناسب عند نقطتين أو اكثر، كذلك نتعرض لدراسة دالة جرين :

٢٢-٢ مسائل القيم الحدية :

يمكن كتابة مسألة القيمة الحدية ، عموما ، على الصورة

$$L(y)=f(x), \qquad a<x<b$$
$$U_i[y]=\alpha_i \qquad 1\le i\le n \tag{1}$$

حيث L مؤثر تفاضلى خطى من رتبة n ، $U_i's$ مؤثر حدى يعرف بالتالى

$$U_i[y]=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,y^{(j-1)}(a)+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\,y^{(j-1)}(b) \tag{2}$$

حيث a_{ij} ، b_{ij} ثوابت . وكثير من مسائل القيم الحدية المعقدة تقابل الباحثين ومعالجة نظام معادلات تفاضلية يكون لكثر صعوبة .

وتظهر كثير من مسائل القيم الحدية فى الفيزياء والتى تتكون من معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية على الصورة .

$$y''=f(x,y,y'), \qquad a<x<b$$

مع الشرطين الحدين

$$U_1[y]=a_1y(a)+a_2y'(a)=\alpha$$

$$U_2[y]=b_1y(b)+b_2y'(b)=\beta$$

حيث α ، β ، a ، b ثوابت . وهنا سوف ندرس مسألة قيمة حدية خطية تتكون من معادلة تفاضلية

$$L[y]=y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{3}$$

والشروط الابتدائية هى

$$U_1[y] = a_1 y(a) + a_2 y'(a) = \alpha$$
$$U_2[y] = b_1 y(b) + b_2 y'(b) = \beta \qquad (4)$$

حيث a_1 , a_2 وكذلك b_1 , b_2 لا يساويان الصفر معاً و α ، β ثابتان .

وعموماً مسألة القيمة الحدية قد لايكون لها حل ، وإذا كان لها حل قد يكون هذا الحل ليس وحيداً . وسوف نبين ذلك فى مثال بسيط .

مثال (١) : ليكن لدينا مسألة القيمة الحدية

$$y'' + y = 1 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

ويكون حلها باستخدام طريقة تغيير الثوابت على الصورة

$$\phi(x) = 1 - \cos x - \sin x$$

نلاحظ أن حل مسألة القيمة الحدية المتجانسة السابقة يكون حلا بديهياً . أى أن للمعادلة حلان . الآن نعتبر مسألة القيمة الحدية

$$y'' + y = 1 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y(\pi) = 0$$

ويكون حلها العام

$$\varphi = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 1$$

وبتطبيق الشروط الحدية ينتج أن

$$\varphi(0) = c_1 + 1 = 0 \quad , \quad \varphi(\pi) = -c_1 + 1 = 0$$

وهذا غير ممكن . وبالتالى لايكون لمسألة القيمة الحدية حل . ولكن إذا أخذنا مسألة القيمة الحدية المتجانسة المناظرة وهى

$$y'' + y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y(\pi) = 0$$

يكون لها حل عام وهو $\varphi(x) = c_2 \sin x$ ، حيث c_2 ثابت اختيارى

وهذا يقودنا إلى النظرية التالية

نظرية (١) : ليكن $p(x)$ ، $q(x)$ ، $f(x)$ دوال متصلة على $[a, b]$ فإما أن يكون لمسألة القيمة الحدية

$$L[y]=f \qquad (5)$$
$$U_1[y]=\alpha \quad , \quad U_2[y]=\beta$$

حل وحيد لأى ثابتين معطيين α ، β أو يكون لمسألة القيمة الحدية المتجانسة المناظرة

$$L[y]=0 \qquad (6)$$
$$U_1[y]=0 \quad , \quad U_2[y]=0$$

حل غير صفرى .

البرهان : ليكن $\varphi_1(x)$ ، $\varphi_2(x)$ حلين لمسائل القيمة الحدية

$$L[\varphi_1(x)]=0 \quad , \quad \varphi_1(a)=a_2 \quad , \quad \varphi_1'(a)=-a_1 \qquad (7)$$
$$L[\varphi_2(x)]=0 \quad , \quad \varphi_2(b)=b_2 \quad , \quad \varphi_2'(b)=-b_1$$

وليكن ψ حل مسألة القيمة الأبتدائية

$$L[\psi(x)]=f(x) \quad , \quad \psi(a)=\psi'(a)=0 \qquad (8)$$

وعلى ذلك يكو الحل العام هو

$$\varphi(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\psi(x)$$

وهو يحقق $L[y(x)]=f(x)$. ولكى تحقق $\varphi(x)$ الشروط الحدية فى (5) يجب أن يكون لدينا

$$U_1[\varphi](x)=c_2[a_1\varphi_2(a)+a_2\varphi_2'(a)]=\alpha$$

$$U_2[\varphi](x)=c_1[b_1\varphi_1(b)+b_2\varphi_1'(a)]+[b_1\psi'(b)+b_2\psi'(b)]=\beta$$

وإذا عوضنا عن a_1 ، a_2 ، b_1 ، b_2 من (7) نحصل على

$$U_1[\varphi]=c_2[-\varphi_1'(a)\varphi_2(a)-\varphi_1(a)\varphi_2'(a)]=\alpha$$

$$U_2[\varphi]=c_1[-\varphi_2'(b)\varphi_1(b)+\varphi_2(b)\varphi_1'(b)]+U_2[\psi]=\beta$$

إذا كانت φ_1 ، φ_2 مستقلتين خطياً فإن الرونسكى $W = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2 \neq 0$ لأى $x \in [a,b]$. وبالتالى لأى ثوابت معطاه α ، β ، c_1 ، c_2 تحدد بطريقة واحدة.

أما إذا كانت φ_1 ، φ_2 مرتبطتين خطياً فإن $K_1\varphi_1 + K_2\varphi_2 = 0$ لثابتين K_1 ، K_2 فإن $\varphi_1 = K\varphi_2$ وبالتالى

$$U_1[\varphi_1] = [-\varphi_1(a)\varphi_1'(a) + \varphi_1(a)\varphi_1'(a)] = 0$$

$$U_2[\varphi_2] = K[-\varphi_1(b)\varphi_1'(b) + \varphi_1(b)\varphi_1'(b)] = 0$$

أى $U_1[\varphi_1] = U_2[\varphi_2] = 0$. وحيث أن φ_1 ، φ_2 يحققان المعادلة التفاضلية المتجانسة وشروط القيمة الحدية المتجانسة فإنه يمكن أن يكون هناك حل واحد لمسألة القيم الحدية المتجانسة المناظرة (6) .

٣-٢٢ دوال جرين Green's Functions

سوف نقدم فى هذا البند دوال جرين . لنعتبر المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة

$$L[y] = -f(x) \qquad x \in [a,b] \qquad (1)$$

حيث $L = \frac{d}{dx}\left[p(x)\left(\frac{d}{dx}\right)\right] + q(x)$ مع الشروط الحدية المتجانسة

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \qquad (2)$$

$$b_1 y(b) + a_2 y'(b) = 0 \qquad (3)$$

حيث a_1 ، a_2 لايساويان الصفر معاً وكذلك b_1 ، b_2 لايساويان الصفر معاً . سنفترض أن f ، q دالتان متصلتان وأن p لها مشتقات متصلة ولا تتلاشى على $[a, b]$. والأن نبين كيف نشأت دالة جرين .

نعتبر حبل مرن مشدود أفقياً بقوة شد ثابتة T . وحيث أن الحبل ليس له مقاومة للانحناء فإن القوة الداخلية الوحيدة هى الشد T الذى يؤثر فى اتجاه المماس لمنحنى الانحناء (deflection) .

ليكن $y(x)$ الأزاحة الرأسية للحبل . ليكن $\rho(x)$ الحمل الموزع باستمرار لوحدة الطول . وبالتالى يكون الحمل $\rho(x)\Delta x$ محمول بالحبل فى الفترة $(x, x+\Delta x)$ يكون متزنا مع المركبة الرأسية للشد T . وإذا افترضنا أن الازاحة الرأسية تكون صغيرة مقارنة مع طول الحبل فيكون لدينا معادلة الأتزان لعنصر بين $x+\Delta x, x$

$$T[y'(x+\Delta x)-y'(x)]-\rho(x)\Delta x=0$$

أى

$$\frac{y'(x+\Delta x)-y'(x)}{\Delta x}=\frac{\rho(x)}{T}$$

وبأخذ النهاية عندما $\Delta x \to 0$ نحصل على

$$y''(x)=\rho(x)/T$$

والتى يمكن كتابتها على الصورة

$$L[y]=y''(x)=-g(x)$$

حيث $g(x)=-\rho(x)/T$

وإذا أفترضنا أن كل من طرفى الحبل متصلة بدعامة بحيث أن رد الفعل الرأسى يتناسب مع الازلحة ، تكون الشروط الحدية

$$Ty'(a)=-a_1 y(a) \quad , \quad Ty'(b)=-b_1 y(b)$$

والتى يمكن صياغتها بالصورة

$$a_1 y(a)+a_2 y'(a)=0 \quad , \quad b_1 y(b)+b_2 y'(b)=0$$

حيث $a_2=b_2=T$. يوجد أيضاً شروط حدية أخرى مثل أن أحد الطرفين مثبت. إذا كان مثبتا عند $x=a$ فإن $y(a)=0$.

والأن نعتبر مسألة القيم الحدية (١-٣) فإذا رمزنا بالرمز $G(x,\xi)$ لانحناء الحبل عند x الناتج عن وحدة القوة الموزعة بانتظام عند النقطة ξ ، فإن الانحناء عند x الناتج عن قوة موزعة بانتظام $f(\xi)$ بالنسبة لوحدة الطول على عنصر الفترة $(\xi, \xi+d\xi)$ يكون $f(\xi)G(x,\xi)d\xi$ ونظراً لأن المسألة خطية

يكون انحناء الحبل عند x الناتج عن القوة الموزعة $f(\xi)$ على الفترة $[a, b]$ معطى بالتكامل

$$y = \phi(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \qquad (4)$$

تسمى الدالة $G(x, \xi)$ بدالة التأثير (influence) أو بدالة جرين . ومن الواضح أنه يجب تعريف $G(x, \xi)$ بأن تكون متصلة على $[a, b]$ وتحقق الشروط الحدية المعطاة . ومن تعريف دالة جرين تكون $G(x, \xi)$ هى حل المعادلة

$$L[y] = -f_\varepsilon(x) \qquad (5)$$

حيث $f_\xi(x)$ هى الدالة التى تتلاشى خارج الفترة $|x - \xi| < \varepsilon$ وداخل الفترة $|x - \xi| < \varepsilon$ وتحقق العلاقة

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f_\xi(x) dx = 1 \qquad (6)$$

وبالتالى لجميع $x \neq \xi$ ، $G(x, \xi)$ تحقق المعادلة المتجانسة

$$L[y] = 0$$

عندما $x = \xi$ يكون لدينا من المعادلة (5) هذه العلاقة التالية بعد إجراء عملية التكامل

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \frac{d}{dx}[p(x) G'(x, \xi)] dx + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} q(x) G(x, \xi) dx = -\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f_\varepsilon(x) dx$$

أو

$$p(x) G'(x, \xi) \Big|_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} q(x) G(x, \xi) dx = -1$$

وسوف نفترض أن $G(x, \xi)$ قابلة للاشتقاق باستمرار ما عدا عند $x = \xi$ ، وبالتالى فإن النهاية عندما $\varepsilon \to 0$ نحصل على

$$\frac{dG(x,\xi)}{dx}\Bigg|_{x=\xi^-}^{x=\xi^+}=-\frac{1}{p(\xi)} \qquad (7)$$

والتى تنص على ان مشتقة $G(x,\xi)$ لها قفزة (Jump) عدم اتصال عند $x=\xi$. وبعد مناقشة هذا السرد عن دالة جرين نحتالج لتعريف دالة جرين .

تعريف (١) : تكون دالة جرين للتعبير التفاضلى $L[y]$ والشروط الحدية المتجانسة المعطاه هى الدالة $G(x,\xi)$ والتى تحقق الشروط التالية :

(i) $G(x,\xi)$ تكون دالة متصلة لجميع قيم x ومشتقتيها الأولى والثانية تكون متصلة لجميع $x\neq\xi$ فى $a\leq x,\xi\leq b$.

(ii) عند النقطة $x=\xi$ تكون المشتقة الأولى للدالة $G(x,\xi)$ لها قفزة عدم اتصال تعطى بالعلاقة

$$\frac{d}{dx}G(\xi,\xi)\Bigg|_{x=\xi^-}^{x=\xi^+}=-\frac{1}{p(\xi)}$$

(iii) لقيمة ξ الثابتة تحقق $G(x,\xi)$ الشروط الحدية ، وعلاوة على ذلك تكون $G(x,\xi)$ هى حلا للمعادلة التفاضلية المتجانسة والمناظرة $L[y]=0$ ماعدا عند النقطة $x=\xi$.

وبهذا التعريف سنسرد النظرية الأساسية لدالة جرين .

نظرية (٢) : إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$ فإن الدالة

$$\phi(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

تكون حلا لمسألة القيمة الحدية

$$L[y]=-f(x)$$

$$a_1y(a)+a_2y_1'(a)=0 \quad , \qquad b_1y(b)+b_2y'(b)=0$$

البرهان : نشتق $\phi(x)$ بالنسبة إلى x باستخدلم قاعدة ليبنز فنحصل على

$$\phi'(x)=\int_a^x G'(x,\xi)f(\xi)d\xi+G(x,x-)f(x)+\int_x^b G'(x,\xi)f(\xi)d\xi$$
$$-G(x,x+)f(x)$$

وحيث أن $G(x,\xi)$ متصلة فى ξ يكون لدينا

$$G(x,x-)=G(x,x+)$$

وبذلك $\phi'(x)$ تأخذ الصورة .

$$\phi'(x)=\int_a^b G'(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

وحيث أن G تحقق الشروط الحدية يكون لدينا

$$a_1\phi(a)+a_2\varphi'(a)=\int_a^b [a_1G(a,\xi)+a_2G'(a,\xi)]f(\xi)d\xi=0$$

وبالمثل

$$b_1\phi(b)+b_2\varphi'(b)=0$$

باشتقاق ϕ' مرة ثانية بالنسبة إلى x نحصل على

$$\phi''(x)=\int_a^x G''(x,\xi)f(\xi)d\xi+G'(x,x-)f(x)+\int_x^b G''(x,\xi)f(\xi)d\xi$$
$$-G'(x,x+)f(x)$$

$$=\int_a^b G''(x,\xi)f(\xi)d\xi+f(x)[G'(x,x-)-G'(x,x+)]$$

يمكن كتابة الشرط (7) فى صورة مكافئة

$$\frac{dG}{dx}(x,\xi)\Big|_{\xi=x^-}^{\xi=x^+}=\frac{1}{p(x)} \tag{8}$$

وبالتالى تؤول ϕ'' إلى

$$\phi''(x)=\int_a^b G''(x,\xi)f(\xi)d\xi-f(x)[G'(x+,x)-G'(x-,x)]$$

$$=\int_a^b G''(x,\xi)f(\xi)d\xi-\frac{f(x)}{p(x)}$$

وعلى ذلك يكون

$$L[\varphi]=p(x)\varphi''(x)+p'(x)\varphi'(x)+q(x)\varphi(x)$$

$$=-f(x)+\int_a^b [p(x)G''(x,\xi)+p'(x)G'(x,\xi)+q(x)G(x,\xi)]f(\xi)d\xi$$

$$=-f(x)+\int_a^b L[G]f(\xi)d\xi$$

ومن تعريف G ، $L(G)=0$ نحصل على

$$L(\varphi)=-f(x).$$

وبهذا ينتهى البرهان .

للتعبير عن دالة جرين فى فترتين مفصولين بالمتساوية $\xi = x$ ، ليكن

$$G(x,\xi)=\begin{cases}G_1(x,\xi) & , \quad \xi<x\le b\\ G_2(x,\xi) & , \quad a\le x<\xi\end{cases} \tag{9}$$

ومن شرط الاتصال يجب أن يكون لدينا

$$G_1(\xi,\xi)=G_2(\xi,\xi)$$

ومن الشرط (7) يكون لدينا

$$\frac{dG}{dx}(x,\xi)\Big|_{x=\xi^-}^{x=\xi^+}=\frac{dG_1}{dx}(x,\xi)\Big|_{x=\xi^+}-\frac{dG_2}{dx}(x,\xi)\Big|_{x=\xi^-}=\frac{-1}{p(\xi)} \tag{10}$$

وبالمثل إذا أخذنا ξ كمتغير فيمكننا أن نعرف

$$G(x,\xi)=\begin{cases} G_1(x,\xi) & , \quad a\le \xi < x \\ G_2(x,\xi) & , \quad x<\xi \le b \end{cases} \tag{11}$$

حيث G_1 ، G_2 دالتان متصلتان . وبالتالى

$$G_1(x,x)=G_2(x,x)$$

ويلى من الشرط (8) أن

$$\frac{dG}{dx}(x,\xi)\bigg|_{\xi=x^-}^{\xi=x^+}=\frac{dG_2}{dx}(x,\xi)\bigg|_{\xi=x}-\frac{dG_1}{dx}(x,\xi)\bigg|_{\xi=x}=\frac{1}{p(x)} \tag{12}$$

مثال (٢) : ليكن لدينا مسألة القيمة الحدية

$$y''=-x \quad , \quad y(0)=0 \quad , \quad y(1)=0 \tag{13}$$

لقيمة ξ الثابتة ، تتحقق دالة جرين $G(x,\xi)$ المعادلة المتجانسة المناظرة

$$G''=0$$

فى $\xi<x<1$, $0<x<\xi$ والشروط الحدية $G(1,\xi)=0$, $G(0,\xi)=0$

وعلاوة على ذلك فهى تحقق

$$\frac{dG}{dx}(x,\xi)\bigg|_{x=\xi^-}^{x=\xi^+}=\frac{-1}{p(\xi)}$$

والآن إذا إخترنا $G(x,\xi)$ بحيث أن

$$G(x,\xi)=\begin{cases} G_1(x,\xi)=(1-x)\xi & , \quad \xi\le x<1 \\ G_2(x,\xi)=x(1-\xi) & , \quad 0<x\le\xi \end{cases}$$

فإننا نرى أن $G''=0$ على الفترتين $\xi<x<1$, $0<x<\xi$

وأيضاً

$$G_1(1,\xi)=0 \quad , \quad G_2(0,\xi)=0$$

وعلاوة على ذلك

$$G_1'(x,\xi)-G_2'(x,\xi)=-\xi-(1-\xi)=-1$$

والتى هى قيمة القفزة $-1/p(\xi)$ لأن فى هذه الحالة $p = 1$ وبالتالى من النظرية (٢) فى هذه الباب ، أخذين فى الاعتبار أن ξ هى المتغير فى $G(x,\xi)$ ، فيكون حل المعادلة (13) هو

$$\phi(x)=\int_0^x G(x,\xi)f(\xi)d\xi+\int_x^1 G(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

$$=\int_0^x (1-x)\xi^2 d\xi+\int_x^1 x(1-\xi)\xi d\xi=\frac{5}{6}(1-x^2)$$

٢٢-٤ تكوين دالة جرين :

رأينا فى المثال السابق أننا أوجدنا الحل بسهولة إذا إخترنا دالة جرين المناسبة. وتكمن المشكلة ليس فى إيجاد الحل ولكن فى تحديد دالة جرين المناسبة للمسألة المعطاة .

سوف نبين الآن أنه يمكن تكوين دالة جرين التى تحقق الشروط المعطاه .

إذا أفترضنا أن المعادلة المتجانسة المناظرة تحقق الشرطين (2) ، (3) فى البند السابق لها حل بديهى فقط كما فى المثال (٢) .

نكون الحل $\phi_1(x)$ للمعادلة $L[y]=0$ محققا $a_1y(a)+a_2y'(a)=0$ فإننا نرى أن $c_1\phi_1(x)$ يكون أيضاً حلا عاما ، حيث c_1 ثابت إختيارى. وبطريقة مماثلة ليكن $c_2\phi_2$ ، c_2 ثابت اختيارى ، هو حلا عاما أيضاً أكبر عمومية للمعادلة $L[y]=0$ محققا $b_1y(b)+b_2y'(b)=0$ وبالتالى يوجد الحلان φ_1 ، φ_2 فى الفترة $[a, b]$ وهما مستقلان خطياً . أما إذا كان الحلان مرتبطين خطياً فإن $\varphi_1=c\varphi_2$ الذى يبين أن φ_1 تحقق معادلتى الشروط الحدية عند $x=a$ ، $x=b$. وهذا يتناقض مع إفتراضنا عن الحل البديهى . وبالتالى فإن دالة جرين تأخذ الصورة

$$G(x,\xi)=\begin{cases} c_1(\xi)\varphi_1(x) & , \quad x<\xi \\ c_2(\xi)\varphi_2(x) & , \quad x>\xi \end{cases} \qquad (1)$$

وحيث أن $G(x,\xi)$ متصلة عند $x=\xi$ يكون لدينا

$$c_2(\xi)\varphi_2(\xi)-c_1(\xi)\varphi_1(\xi)=0 \qquad (2)$$

عدم الاتصال فى مشتقة الدالة G عند هذه النقطة تتطلب

$$\frac{dG}{dx}(x,\xi)\Big|_{x=\xi^-}^{x=\xi^+}=c_2(\xi)\varphi_2'(\xi)-c_1(\xi)\varphi_1'(\xi)=\frac{-1}{p(\xi)} \qquad (3)$$

وبحل (2) ، (3) بالنسبة إلى c_1 ، c_2 نجد أن

$$\begin{aligned} c_1(\xi)&=-\varphi_2(\xi)/p(\xi)W(\varphi_1,\varphi_2,\xi)\\ c_2(\xi)&=-\varphi_1(\xi)/p(\xi)W(\varphi_1,\varphi_2,\xi)\end{aligned} \qquad (4)$$

حيث $W(\varphi_1,\varphi_2,\xi)$ هو الرونسكى الذى يساوى

$$W(\varphi_1,\varphi_2,\xi)=\varphi_1(\xi)\varphi_2'(\xi)-\varphi_2(\xi)\varphi_1'(\xi)$$

وحيث ان الحلين مستقلين خطياً فإن $W(\varphi_1,\varphi_2,\xi)\neq 0$.

سوف نثبت الآن أن $p(\xi)W(\varphi_1,\varphi_2,\xi)$ يختلف عن الصفر بثابت . وحيث $\varphi_1(x)$ ، $\varphi_2(x)$ حلين للمعادلة المتجانسة المناظرة يكون لدينا

$$\frac{d}{dx}(p\varphi_1')+q\varphi_1=0\,,\qquad \frac{d}{dx}(p\varphi_2')+q\varphi_2=0$$

بضرب الأولى فى φ_2 والثانية فى φ_1 والطرح نحصل على

$$\varphi_1\frac{d}{dx}(p\varphi_2')-\varphi_2\frac{d}{dx}(p\varphi_1')=0$$

ويمكن صياغة المعادلة هذه على الصورة

$$\frac{d}{dx}[p(\varphi_1\varphi_2'-\varphi_2\varphi_1')]=0$$

وبالتكامل نحصل على (متطابقة آبل)

$$p(\varphi_1\varphi_2'-\varphi_2\varphi_1') \;=\; \text{ثابت} \;=\; c\,, \qquad (5)$$

وبالتالى تعطى دالة جرين بالعلاقة

$$G(x,\xi)=\begin{cases}-\varphi_1(x)\varphi_2(\xi)/c & , \quad x<\xi \\ -\varphi_2(x)\varphi_1(\xi)/c & , \quad x>\xi\end{cases} \qquad (6)$$

حيث $pW(x)=c$.

وبذلك نكون قد برهنا النظرية التالية .

نظرية (١) : إذا كان لمسألة القيم الحدية المتجانسة المصاحبة (3-1) فى البند ٢٢-٣ حل بديهى فقط فإن دالة جرين تكون موجودة ووحيدة .

ملحوظة : اثبات أن دالة جرين وحيدة متروك للقارئ .

مثال (١) : ليكن

$$y''+y=-1 \quad , \quad y(0)=0 \quad , \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \qquad (7)$$

فإن حل المعادلة $L[y]=\frac{d}{dx}y'+y=0$ يحقق $y(0)=0$ هو

$$\varphi_1(x)=\sin x \quad , \quad 0\le x<\xi$$

وحل المعادلة $L[y]=0$ يحقق $y'=\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ هو

$$\varphi_2(x)=\cos x \quad , \quad \xi<x\le\frac{\pi}{2}$$

ويكون الرونسكى هو

$$W(\xi)=\varphi_1(\xi)\varphi_2'(\xi)-\varphi_2(\xi)\varphi_1'(\xi)=-1$$

وحيث أن $p=1$ فإن المعادلة (6) تأخذ الصورة

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\sin x\cos\xi & , \quad x\le\xi \\ \cos x\sin\xi & , \quad x\ge\xi\end{cases}$$

وبالتالى يكون حل المعادلة (7) هو

$$\phi(x)=\int_0^x G(x,\xi)f(\xi)d\xi+\int_x^{\pi/2} G(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

$$=\int_0^x \cos x\sin\xi d\xi+\int_x^{\pi/2} \sin x\cos\xi d\xi$$

$$=-1+\sin x+\cos x$$

بالرغم من أنه من (6) أن دالة جرين $G(x,\xi)$ تكون متماثلة بالنسبة إلى x ، ξ. فإننا سنعطى برهان مستقل عن تماثل دالة جرين .

نظرية (٢) : تكون دالة جرين لمسألة القيمة الحدية (3 – 1) بند ٢٢-٣ متماثلة أى $G(x,\xi)=G(\xi,x)$.

البرهان : نعتبر دالتا جرين

$$G=G(x,\xi)\ ,\ \ H=G(x,\eta)$$

حيث $a<\xi<\eta<b$. وحيث أن L مؤثر مترافق ذاتى فتكون متطابقة لاجرانج السابق دراستها

$$GL[H]-HL[G]=\frac{d}{dx}[p(H'G-HG')] \tag{8}$$

نلاحظ أن G ، H يحققان

$$L[G]=0\quad ,\quad L[H]=0$$

فيكون لدينا

$$\frac{d}{dx}[p(H'G-HG']=0$$

وبتكامل على الفترات $[a,\xi]$ ، $[\xi,\eta]$, $[\eta,b]$ فنجد أن

$$p(H'G-HG')|_a^{\xi}+p(H'G-HG')_{\xi}^{\eta}+p(H'G-HG')|_{\eta}^{b}=0$$

وبفك وترتيب الحدود

$$p(\xi)G(\xi,\xi)[H'(\xi^-,\eta)H'(\xi^+,n)]+p(\xi)H(\xi,n)[G'(\xi^+,\xi)-G'(\xi^-,\xi)]$$

$$+p(\eta)G(\eta,\xi)[H'(\eta^-,\eta)-H'(\eta^+,\eta)+$$

$$+p(\eta)H(\eta,\eta)[G'(\eta^+,\xi)-G'(\eta^-,\xi)]+[p(x)(H'G-HG')]_a^b=0 \quad (9)$$

وحيث إن G, H يحققان الشروط الحدية المتجانسة ، فإن الحد الأخير يتلاشى .
وحيث أن H', G' متصلتان ماعدا عند $x=\xi$, $x=\eta$ على الترتيب فيكون لدينا

$$G'(\eta^+,\xi)-G'(\eta^-,\xi)=0 \quad , \quad H'(\xi^-,\eta)-H'(\xi^+,\eta)=0$$

وكذلك

$$G'(\xi^+,\xi)-G'(\xi^-,\xi)=-1/p(\xi) \quad , \quad H'(\eta^+,\eta)-H'(\eta^-,\eta)=-1/p(\eta)$$

وبالتالى تؤول المعادلة (9) إلى

$$G(\eta,\xi)=H(\xi,\eta)$$

ومن تعريف H نجد أن

$$G(\eta,\xi)=G(\xi,\eta)$$

الرمز $G(n^+,\xi)$ أو $G(n^-,\xi)$ يعنى $G(n+,\xi)$ $G(n-,\xi)$ وبالمثل لباقى الحالات .

٢٢-٥ شروط حدية غير متجانسه :

يمكن الحصول على حل مسألة قيمة حدية (أكثر عمومية) على الصورة

$$L[y]=-f(x) \quad (1)$$

$$U_1[y]=a_1y(a)+a_2y'(a)=\alpha \quad (2)$$

$$U_2[y]=b_1y(b)+b_2y'(b)=\beta \quad (3)$$

بطريقة بسيطة .

ليكن $G_1(x)$ ، $G_2(x)$ هما حلين

$$L[G_1]=0, \quad U_1[G_1]=1, \quad U_2[G_1]=0 \quad (4)$$

$$L[G_2]=0,\quad U_1[G_2]=0,\quad U_2[G_2]=1 \tag{5}$$

ويمكن بسهولة التأكد من أن حل المسألة (3-1) يكون على الصورة

$$\phi(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi+\alpha G_1(x)+\beta G_2(x) \tag{6}$$

مثال (١) : حل المسألة

$$y''=-f(x),\quad y(0)=0,\quad y(1)+y'(1)=2 \tag{7}$$

الحل : حل المعادلة $y''=0$ الذى يحقق $y(0)=0$ فى الفترة $0\le x<\xi$ هو

$$\phi_1(x)=x$$

وحل المعادلة $y''=0$ الذى يحقق $y(1)+y'(1)=0$ فى الفترة $\xi<x\le 1$ هو

$$\phi_2(x)=2-x$$

ويكون الرونسكى للحلين ϕ_1 ، ϕ_2 هو

$$W(\varphi_1,\varphi_2)=\varphi_1(\xi)\varphi_2'(\xi)-\varphi_2(\xi)\varphi_1'(\xi)=-2$$

وحيث أن فى هذه الحالة $p=1$ فإن المعادلة (6) فى البند ٢٢-٤ تصبح

$$G(x,\xi)=\begin{cases}(2-\xi)x/2 & 0\le x\le\xi\\ \xi(2-x)/2 & \xi<x\le 1\end{cases}$$

وفى هذه الحالة نحتاج لتحديد $G_2(x)$ فقط حيث أن α فى المعادلة (6) تساوى الصفر والدالة $G_2(x)$ التى تحقق المسألة

$$y''=0,\quad y(0)=0,\quad y(1)+y'(1)=2$$

تكون $G_2(x)=\dfrac{x}{2}$ وبالتالى يكون حل المعادلة المعطاه (7) هو

$$\phi(x)=\frac{2-x}{2}\int_0^x \xi f(\xi)+\frac{x}{2}\int_x^1 (2-\xi)f(\xi)d\xi+x$$

٢٢-٦ حالة خاصة :

يمكن استخدام دالة جرين للحصول على الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$a_0 y''(x)+a_1 y'(x)+a_2 y(x)=f(x),\ \ a_0 \neq 0 \tag{1}$$

حيث الدوال a_0 ، a_1 ، a_2 ، $f(x)$ دوال متصلة على $[a,b]$. وتكون للمعادلة المتجانسة المناظرة هى

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0 \tag{2}$$

تعرف الدالة

$$G(x,t)=-\frac{1}{a_0(t)}\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}}=-\frac{1}{a_0(t)W(t)}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} \tag{3}$$

$$x_0 \leq t \leq x$$

حيث y_1 ، y_2 حلين مستقلين للمعادلة (2) ، W هو الرونسكى ويكون الحل الخاص للمعادلة (1) هو

$$\int_{x_0}^{x} G(x,t)f(t)dt$$

(انظر الملحوظة فى طريقة تعبير البارامترات) ويكون الحل العام للمعادلة (1) هو

$$y=c_1 y_1+c_2 y_2+\int_{x_0}^{x} G(x,t)f(t)dt \tag{4}$$

تعرف الدالة $G(x,t)$ بدالة جرين للمعادلة المتجانسة (2) . ومن الواضح أنه إذا علم حلين مستقلين للمعادلة المتجانسة (2) فإنه يمكن تكوين الدالة $G(x,t)$ من المعادلة (3) ومن ثم تعطى (4) الحل العام للمعادلة غير المتجانسة (1) لأى دالة $f(x)$ والمتصلة على $[a,b]$. نلاحظ أنه عندما $x=t$ فإن $G(t,t)=0$.

ولتوضيح الطريقة تعتبر المعادلة المتجانسة فى المثال التالى

مثال (١) : أوجد دالة جرين لحل المعادلة التفاضلية

$$y''-3y'+2y=0\ , \qquad -\infty<x<\infty$$

الحل : المعادلة المعطاة لها حلان مستقلان e^{x} ، e^{2x} وبالتالى

$$a_0=1, W(t)=\begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} \\ e^{x} & 2e^{2x} \end{vmatrix}=e^{3x}$$

وعلى ذلك

$$G(x,t)=-e^{-3t}\begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} \\ e^{t} & e^{2t} \end{vmatrix}=e^{2(x-t)}-e^{(x-t)} \qquad , \qquad x_0\le t\le x$$

إذا كان $f(x)$ دالة متصلة ، فيكون الحل الخاص للمعادلة

$$y''-3y'+2y=f(x)$$

يكون على الصورة

$$\int_0^x [e^{2(x-t)}-e^{(x-t)}]f(t)dt \qquad , \qquad x_0=0 \qquad (5)$$

ويكون الحل العام هو

$$y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+\int_0^x (e^{2(x-t)}-e^{(x-t)})f(t)dt \qquad (6)$$

وإذا أخذنا $f(x)=x$ فإن (5) تصبح

$$\int_0^x (e^{2(x-t)}-e^{(x-t)})tdt=-e^{x}+\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{x}{2}+\frac{3}{4}$$

ويكون الحل العام (6) على الصورة

$$y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}-e^{x}-\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=k_1e^{x}+k_2e^{2x}+\frac{x}{2}+\frac{3}{4}$$

حيث $k_1=c_1-1$ ، $k_2=c_2+\frac{1}{4}$

الحل الخاص y_p للمعادلة (1) الذى يعطى بالعلاقة

$$y_p = \int_{x_0}^{x} G(x,t) f(t)dt \qquad (7)$$

له الخاصية $y_p(x_0) = 0$ وبالتالى

$$\int_{x_0}^{x_0} G(x_0,t) f(t)dt = 0$$

وعلاوة على ذلك

$$y'_p(x) = G(x,x) f(x) + \int_{x_0}^{x} G_x(x,t) f(t)dt$$

وبالتالى

$$y'_p(x_0) = G(x_0,x_0) f(x_0) = 0$$

وعلى ذلك فإن (7) تعطينا الحل (الوحيد) الخاص $y_p(x)$ للمعادلة (1) الذى له الخاصية

$$y_p(x_0) = y'_p(x_0) = 0$$

٧-٢٢ أمثلة محلولة :

مثال (١) : لوجد دالة جرين لمسألة القيمة الحدية

$$y'' + y(x) = f(x) \qquad (1)$$

$$y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad (2)$$

الحل : تعرف أن حل المعادلة المتجانسة

$$y_H = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

وليكن الحل الخاص

$$y_p = v_1(x) \cos x + v_2(x) \sin x$$

حيث الدالتان v_1 ، v_2 يتم تعينيهما باستخدام طريقة تغير البارامترات فنحصل على

$$v_1(x) = -\int \frac{y_2(x) f(x)}{a_2(x)\, W(y_1, y_2)(x)} dx$$

$$v_2(x) = \int \frac{y_1(x) f(x)}{a_2(x)\, W(y_1, y_2)(x)} dx$$

حيث للرونسكى

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin \\ -\sin & \cos x \end{vmatrix} = 1, \quad a_0 = 1,\ a_2 = 1,\ a_1 = 0$$

باستخدام دالة جرين

$$G(x,s) = \begin{cases} G_1(x,s) \\ G_2(x,s) \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{y_1(s) y_2(x)}{w(y_1, y_2)(s) a_2(s)} & x \le s \\ \dfrac{y_2(s) y_1(x)}{w(y_1, y_2) a_2(s)} & x \ge s \end{cases}$$

حيث $a \le x \le s, s \le x \le b$

$$\begin{array}{ll} y_1(x) = \cos x \quad , & y_1(s) = \cos s \\ y_2(x) = \sin x \quad , & y_2(s) = \sin s \end{array} \qquad (3)$$

حيث

$$\begin{array}{lll} a_0(s) = 1 \quad , & W(s) = 1 \quad , & a_2 = 1 \\ a = 0 \quad , & b = \pi/2 & \end{array} \qquad (4)$$

بالتعويض من (4) فى (3) نحصل على دالة جرين

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\cos s \sin x}{1} & 0 \le x \le s \\ \dfrac{\sin s \cos x}{1} & s \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

مثال (٢) : اوجد دالة جرين $G(x,s)$ لمسألة القيمة الحدية

$$y'' + y'(x) = 0 \qquad (1)$$

$$y(0) = y'(\pi) = 0 \qquad (2)$$

الحل : نعلم أن حل المعادلة المتجانسة

$$y_H = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-x}$$

$$= c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad \Rightarrow \quad y_1(x) = 1 \ , \quad y_2(x) = e^{-x}$$

ويكون الرونسكى هو

$$W = \begin{vmatrix} 1 & e^{-x} \\ 0 & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-x}$$

وباستخدام تعريف دالة جرين

$$G(x,s) = \begin{cases} G_1(x,s) \\ G_2(x,s) \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{y_1(s)y_2(x)}{W\,a_0} & a \le x \le s, x \le s \le b \\ \dfrac{y_2(s)y_1(x)}{W\,a_0} & a \le s \le x, s \le x \le b \end{cases}$$

وحيث

$$y_1(x) = 1 \quad \to \quad y_1(s) = 1 \ , \quad y_2(x) = e^{-x} \quad \to \quad y_2(s) = e^{-s}$$

$$a_2(s) = 1 \ , \ w(s) = e^{-s} \ , \ a_0 = 1 \ , \ a_2 = 0 \ , \ a = 0 \ , \ b = \pi$$

بالمقارنة مع المعادلة (1)

وتكون دالة جرين هى

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{-e^{-s}} & 0 \le x \le s \\ \dfrac{e^{-s}}{-e^{-s}} & s \le x \le \pi \end{cases}$$

مثال (٣) : لوجد دالة جرين لمسألة القيمة الحدية

$$y''(x)=0 \qquad (1)$$

$$y(0)=y'(\ell)=0 \qquad (2)$$

الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$y_H=c_1x+c_2=c_1y_1+c_2y_2$$

حيث الرونسكى يعطى بالعلاقة

$$W=\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1 \quad , \quad a_0=1 \quad , \quad a_1=0 \quad , \quad a_2=0 \quad , \quad a=0 \quad , \quad b=\ell$$

وتكون دالة جرين

$$G(x,s)=\begin{cases} \dfrac{s.1}{-1} & 0\le x\le s \\ \dfrac{1.x}{-1} & s\le x\le \ell \end{cases}$$

تمارين

١- عين حل كل من مسائل القيم الحدية التالية

a) $y'' + y = 1 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 0$

b) $y'' + 4y = e^x \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(1) = 0$

c) $y'' = \sin x \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y(1) + 2y'(1) = 0$

d) $y'' = -f(x) \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(1) = 0$

e) $y'' = -f(x) \quad , \quad y(-1) = 0 \quad , \quad y(1) = 0$

f) $y'' - y = -f(x) \quad , \quad y(0) = y$

g) $y'' - y = -f(x) \quad , \quad y'(0) = y'(1) = 0$

٢- استخدام دالة جرين لايجاد الحل العام للمعادلات

(i) $y'' + y = f(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty$

(ii) $y'' + 4y' + 4y = f(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty$

(iii) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = f(x) \quad , \quad 1 \le x < \infty$

(iv) $4x^2 y'' + y = f(x) \quad , \quad 1 \le x < \infty$

٣- اثبت أن

$$G_x(t,t) = \frac{\partial}{\partial x} G(x,t) |^{x=t} = \frac{1}{a_0(t)}$$

٤- أثبت أن دالة جرين للمعادلة $y'' = 0$ حيث $y'(0) + y'(1) = 0$ ، $y(1) = 0$ تكون على الصورة

$$G(x,s) = \begin{cases} 1-s & x \le s \\ 1-x & x \ge s \end{cases}$$

ثم اوجد حل مسألة القيمة الحدية

$$y''=f(x) \quad , \quad y(0)+y(1)=0 \quad , \quad y'(0)+y'(1)=0$$

حيث

$$\text{(i) } f(x)=\sin x , \qquad \text{(ii) } f(x)=e^x ; 0<x<1, \qquad \text{(iii) } f(x)=x$$

٥- اوجد دالة جرين لمسائل القيمة الحدية التالية

a) $L[y]=y''=0 \quad , \quad y(0)=0 \quad , \quad y'(1)=0$

b) $L[y]=(1-x^2)y''-3xy'=0 \quad , \quad y(0)=0, y(1)=0$

c) $L[y]=y''+a^2y=0, \qquad y(0)=0 \quad , \quad y(1)=0 \quad ,$ ثابت a

٦- اوجد حل كل من مسائل القيمة الحدية

a) $y''+y=1 \quad , \quad y(0)=0 \quad , \quad y(1)=0$

b) $y''+4y=e^x \quad , \quad y(0)=0 \quad , \quad y'(1)=0$

٧- اوجد حل مسائل القيم الحدية التالية

a) $y''-y=-f(x) \quad , \quad y(0)=y(1)=0$

b) $y''-y=-f(x) \quad , \quad y'(0)=y'(1)=0$

٨- اوجد دالة جرين لمسائل القيم الحدية

$$L[y]=y=-f(x) \quad , \quad y(0)=y(1)=0 , \; y'(0)=y'(1)=0$$

٩- اوجد دالة جرين لمسألة القيمة الحدية

$$y''=-f(x) , \; y(-1)=y(1) , \; y'(-1)=y'(1)$$

١٠- اثبت أن

$$\frac{dG(x,\xi)}{dx} \Big|_{\xi=x^-}^{\xi=x^+} = \frac{-1}{p(x)}$$

يكون مكافئاً إلى

$$\frac{dG(x,\xi)}{dx} \Big|_{x\,\xi=\xi^-}^{x=\xi^+} = \frac{1}{p(\xi)}$$

١١- ليكن لدينا

$$L[y] = y'' + 3y' + 2y = -f(x)\ ,\quad 2y(0) - y(1) = 0\ ,\quad y'(1) = 2$$

بتكامل مباشر للدالة $GL[y]$ من 0 إلى 1 اثبت ان

$$\phi(x) = -2G(1,x) - \int_0^1 G(x,\xi) f(\xi) d\xi$$

تكون حلا لمسألة القيمة الحدية إذا كانت G وتحقق

$$G_{\xi\xi} - 3G_\xi + 2G = 0,\quad \xi \neq x,$$

$$G(0,x) = 0\ ,\ 6G(1,x) - 2G_\xi(1,x) + G_\xi(0,x) = 0$$

ثم أوجد G .

الباب الثالث والعشرون

مسائل شتورم وليوفيل

Sturm-Liouville System

٢٣-١ نظام شتورم وليوفيل: (Sturm-Liouville)

تنشأ مسائل القيم الذاتية مع المعادلات التفاضلية فى المسائل الفيزيائية مثل تعيين إزاحة إهتزاز خيط أو توزيع الحرارة على قضيب موصل للحرارة. تأخذ المعادلة الصورة

$$a_1(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_2(x)\frac{dy}{dx}+[a_3(x)+\lambda]y=0 \qquad (1)$$

وإذا استخدمنا التحويل

$$p(x)=\exp\left|\int^x \frac{a_2(t)}{a_1(t)}dt\right|, \quad q(x)=\frac{a_3(t)}{a_1(t)}p(x), \quad s(x)=\frac{p(x)}{a_1(x)} \qquad (2)$$

نحصل على

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+(q+\lambda s)y=0 \qquad (3)$$

والتى تعرف بمعادلة شتورم– ليوفيل. وبدلالة المؤثر المترافق ذاتياً

$$L=\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right)+q$$

فإن المعادلة (3) تأخذ الصورة

$$L[y]+\lambda s(x)y=0 \qquad (4)$$

حيث λ بارامتر لايعتمد على x أما p، q، s فهى دوال حقيقية فى x. وللتأكد من وجود حلول هذه المعادلة نفترض أن q، s دالتان متصلتان، p قابلة للاشتقاق باستمراره فى فترة مغلقة $[a, b]$.

تسمى معادلة شتورم–ليوفيل بأنها منتظمة (regular) فى الفترة $[a, b]$ إذا كانت الدالتان p، s موجبتان فى نفس الفترة. وبالتالى لأى λ معطاة يوجد حلان مستقلان خطيا لمسألة شتورم–ليوفيل المنتظمة فى الفترة $[a, b]$.

تعريف (١): تسمى معادلة شتورم– ليوفيل

$$L[y]+\lambda s(x)y=0, \qquad a\le x\le b$$

مع الشرطين الحدين

$$\begin{aligned} a_1 y(a)+a_2 y'(a)=0 \\ b_1 y(b)+b_2 y'(b)=0 \end{aligned} \qquad (5)$$

حيث a_1، a_2 لايساويان الصفر معا وكذلك b_1، b_2 لايساويان الصفر معا بنظام شتورم–ليوفيل النظامى (Regular Sturm Liouville).

تسمى قيم λ التى يكون لنظام شتورم ليوفيل حل غير صفرى (غير بديهى) بالقيم الذاتية وتسمى الحلول المناظر بالدوال الذاتية.

مثال (١): اعتبر نظام شتورم ليوفيل

$$y''+\lambda y=0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0, \quad 0\le x\le \pi$$

عندما $\lambda\le 0$ فإنه بسهولة يمكن إثبات λ ليست قيمة ذاتية وعندما $\lambda>0$ يكون حل معادلة شتورم لوفيل هو

$$\phi(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$$

وبتطبيق الشرط $y(0)=0$ ينتج أن $A=0$. وبتطبيق الشرط $y'(\pi)=0$ نحصل على

$$B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi=0$$

وحيث أن $\lambda\neq 0$، فإن $B=0$ تؤدى إلى الحل الصفرى ولذلك يجب أن يكون $\cos\sqrt{\lambda}\pi=0, \beta\neq 0$ وتتحقق المعادلة إذا كان

$$\sqrt{\lambda}=\frac{2n-1}{2}, \quad n=1,2,\dots$$

وبالتالى تكون القيم الذاتية $\lambda_n = \frac{(2n-1)^2}{4}$ وتكوزن الدوال الذاتية المناظرة هى

$$\sin = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^x , \qquad n=1,2,3,...$$

مثال (٢): اعتبر معادلة أويلر

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0, \qquad 1 \le x \le e$$

والشروط الحدية $y(1)=0 \ , \ y(e)=0$

الحل : باستخدام التحويل (2) فإن المعادلة تأخذ الصورة

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{1}{x}\lambda y = 0$$

ويكون حل معادلة أويلر هو

$$\phi(x) = c_1 e^{i\sqrt{\lambda}\ln x} + c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}\ln x} \quad \Leftarrow \quad \phi(x) = c_1 x^{i\sqrt{\lambda}} + c_2 x^{-i\sqrt{\lambda}}$$

نلاحظ أن

$$x^{ia} = e^{ia\ln x} = \cos(a\ell ny) + i\sin(a\ell ny),$$

ويصبح الحل ϕ هو

$$\phi(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}\ln x) + B\sin(\sqrt{\lambda}\ln x)$$

حيث A، B ثابتان منسوبان إلى c_1، c_2.

والشرط $y(1)=0$ يعطى $A=0$ والشرط $y(e)=0$ يعطى

$$\sin\sqrt{\lambda} = 0, \qquad B \ne 0$$

وبالتالى تكون القيم الذاتية

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \qquad n = 1,2,....$$

والدوال الذاتية هى

$$\sin(n\pi \ln x), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

ويوجد نوع آخر من المسائل يقابلنا فى المسائل الفيزيائية وهو نظام شتورم–ليوفيل الدورى (periodic).

تعريف (٢): تسمى معادلة شتورم–ليوفيل

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (q(x) + \lambda s(x)]y = 0, \qquad a \leq x \leq b$$

والذى فيه $p(a) = p(b)$ مع الشروط الدورية الحدية

$$y(a) = y(b), \qquad y'(a) = y'(b)$$

بمعادلة شتورم ليوفيل الدورية

مثال (٣): ليكن لدينا نظام شتورم–ليوفيل الدورى

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(-\pi) = y(\pi), \qquad y'(-\pi) = y'(\pi), \qquad -\pi \leq x \leq \pi$$

نلاحظ هنا أن $p(x) = 1$ وبالتالى $p(-\pi) = p(\pi)$. وعندما $\lambda > 0$ يكون حل المعادلة هو

$$\phi(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

وبتطبيق الشروط المعطاه نحصل على

$$(2\sin\sqrt{\lambda}\pi)B = 0, \qquad (2\sin\sqrt{\lambda}\pi)A = 0$$

وللحصول على الحل غير الصفرى (غير البديهى) يجب أن يكون لدينا

$$\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0, \quad A \neq 0, \quad B \neq 0$$

وبالتالى فإن

$$\lambda_n = n^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

وحيث أن $\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$ تتحقق لقيم A، B الاختيارية فإننا نحصل على دالتين مميزتين مستقلتين خطيا $\cos nx$ ، $\sin nx$ لنفس القيمة الذاتية n^2.

ويمكن بسهولة اثبات أنه إذا كان $\lambda < 0$، فإن حل نظام شتورم ليوفيل غير محقق للشروط الدورية المعطاه. وعندما $\lambda = 0$ تكون الدالة الذاتية هى الواحد. وعلى ذلك يكون القيم الذاتية لنظام شتورم ليوفيل الدورى هى $0, \{n^2\}$ ويكون الدوال الذاتية المناظرة هى $1, \{\cos nx\}, \{\sin nx\}$، حيث n عدد صحيح موجب

٢٣-٢ القيم الذاتية والدوال الذاتية

لاحظنا فى مثالى (1)، (2) وجود قيمة دالة واحدة مستقلة مناظرة لقيمة ذاتية واحدة. وتسمى الحالة هنا غير منحلة **non degenerate** ويقال ان القيمة الذاتية بأنها ذات تكرار K أو أن الحالة منحلة **degenerate** من درجة K إذا وجد K من المتجهات الذاتية المستقلة مناظرة لنفس القيمة الذاتية. أما فى مثال (3) كان المتجهان الذاتيان هما $\cos nx$ ، $\sin nx$ مناظرا لنفس القيمة الذاتية n^2 وفى هذه الحالة يقال أن القيمة الذاتية مكررة مرتين.

ويمكن بسهولة اثبات المتطابقات المثلثية:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 \qquad m \neq n$$

لجميع قيم m، n الصحيحة

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0, \qquad m \neq n$$

ونقول أن هذه الدوال متعامدة (orthogonal) مع بعضها البعض فى الفترة $[-\pi, \pi]$. وعلاقة التعامد تتحقق للقيم الذاتية لنظام شتورم ليوفيل.

تعريف (١): إذا كان كل من $\phi(x)$، $\psi(x)$ دالة حقيقية قابلة للتكامل على I فإنه يقال أن ϕ، ψ متعامدان على I بالنسبة إلى دالة الوزن (weight) $\rho(x) > 0$ إذا وإذا فقط كان

$$<\varphi, \psi> = \int_I \varphi(x)\psi(x)\rho(x)dx = 0 \qquad (1)$$

وقد تكون الفترة I مغلقة أو مفتوحة أو نصف مفتوحة أو مغلقة أو يمكن مدها إلى ∞.

عندما $\varphi = \psi$ فإن التعريف (1) يعطى معيار (norm) φ، أى

$$\|\phi\| = \left[\int_I \phi^2(x)\rho(x)dx\right]^{1/2} \geq 0 \tag{2}$$

نظرية (١): ليكن المعاملات p، q و s فى نظام شتورم–ليوفيل متصلة فى $[a, b]$. وليكن الدالتان الذاتيتان φ_j، φ_k المناظرتين للقيمتين الذاتيتين λ_j، λ_k قابلتان للاشتقاق فإن φ_j، φ_k يكونان متعامدين بالنسبة لدالة الوزن s فى $[a, b]$.

البرهان:

حيث أن φ_j مناظرة إلى λ_j تحقق معادلة شتروم ليوفيل

$$\frac{d}{dx}(p\varphi_j') + (q + \lambda_j s)\varphi_j = 0 \tag{3}$$

وكذلك لنفس السبب

$$\frac{d}{dx}(p\varphi_k') + (q + \lambda_k s)\varphi_k = 0 \tag{4}$$

بضرب (3) فى φ_k، (4) فى φ_j والطرح نحصل على

$$\begin{aligned}(\lambda_j - \lambda_k)s\varphi_j\varphi_k &= \varphi_k \frac{d}{dx}(p\varphi_j') - \varphi_j \frac{d}{dx}(p\varphi_k') \\ &= \frac{d}{dx}\{(p\varphi_j')\varphi_k - (p\varphi_k')\varphi_j\}\end{aligned}$$

وبالتكامل نجد أن

$$\begin{aligned}(\lambda_j - \lambda_k)\int_a^b s\varphi_j\varphi_k dx &= [p(\varphi_j'\varphi_k - \varphi_j\varphi_k')]_a^b \\ &= p(b)[\varphi_j'(b)\varphi_k(b) - \varphi_j(b)\varphi_k'(b)] \\ &\quad - p(a)[\varphi_j'(a)\varphi_k(a) - \varphi_j(a)\varphi_k'(a)]\end{aligned} \tag{5}$$

يسمى الطرف الأيمن حد الشرط لمسألة شتورم ليوفيل والشروط الحدية المعطاة على φ_j، φ_k هى

$$b_1\varphi_j(b)+b_2\varphi'_j(b)=0$$

$$b_1\varphi_k(b)+b_2\varphi'_k(b)=0$$

وإذا كان $b_2 \neq 0$ فأننا نضرب الشرط الأول فى $\varphi_k(b)$ والشرط الثانى فى $\varphi_j(b)$ والطرح نحصل على

$$[\varphi'_j(b)\varphi_k(b)-\varphi_j(b)\varphi'_k(b)]=0 \qquad (6)$$

وبنفس الطريقة إذا كان $a_2 \neq 0$ فإننا نحصل على

$$[\varphi'_j(a)\varphi_k(a)-\varphi_j(a)\varphi'_k(a)]=0 \qquad (7)$$

ومن (6)، (7) نجد أن

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_a^b s\varphi_j\varphi_k dx=0 \qquad (8)$$

وإذا كان $\lambda_j \neq \lambda_k$ فإن

$$\int_a^b s\varphi_j\varphi_k dx=0 \qquad (9)$$

وبهذا يثبت المطلوب.

نظرية (٢): تكون الدوال الذاتية لنظام شتورم ليوفيل الدورى فى $[a, b]$ متعامدة بالنسبة إلى دالة الوزن s فى $[a, b]$.

البرهان: الشروط الدورية للدوال الذاتية φ_k, φ_j هى

$$\varphi_j(a)=\varphi_j(b) \quad , \quad \varphi'_j(a)=\varphi'_j(b)$$

$$\varphi_k(a)=\varphi_k(b) \quad , \quad \varphi'_k(a)=\varphi'_k(b)$$

وبتعويض ذلك فى المعادلة (5) نحصل على

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_a^b s\varphi_j\varphi_k dx=[p(b)-p(a)][\varphi_j'(a)\varphi_k(a)-\varphi_j(a)\varphi_k'(a)]$$

وحيث أن $p(a)=p(b)$ فإن

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_a^b s\varphi_j\varphi_k dx=0 \qquad (10)$$

وإذا كان $\lambda_j \neq \lambda_k$ فإن

$$\int_a^b s\varphi_j\varphi_k dx=0 \qquad (11)$$

وبهذا يثبت المطلوب.

نظرية (٣): جميع القيم الذاتية لنظتم شتروم ليوفيل النظامى مع $s(x)>0$ تكون حقيقية.

البرهان: نفترض وجود قيمة ذاتية مركبة $\lambda_j=\alpha+i\beta$ ولها متجه ذاتى $\varphi_j=u+iv$. وحيث أن معاملات المعادلة جميعها حقيقية، فيكون المرافق المركب (complex conjugate) للقيمة الذاتية هو أيضاً قيمة ذاتية. يوجد دالة ذاتية $\varphi_k=u-iv$ مناظرة للقيمة الذاتية $\lambda_k=\alpha-i\beta$ وباستخدام العلاقة (8) نجد أن

$$2\beta\int_a^b s(u^2+v^2)dx=0$$

وهذا يؤدى إلى أنه يجب أن تتلاشى β لأن $s>0$ وبالتالى فإن جميع القيم الذاتية تكون حقيقية.

نظرية (٤): إذا كان $\varphi_1(x)$ ، $\varphi_2(x)$ أى حلين للمعادلة $L[y]+\lambda sy=0$ على $[a, b]$ فإن : $p(x)W(x;\varphi_1,\varphi_2)$ = ثابت

حيث W هو الرونسكى

البرهان: حيث أن φ_1 ، φ_2 حلين للمعادلة $L[y]+\lambda sy=0$ فإن

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi_1}{dx}\right)+(q+\lambda s)\varphi_1=0$$

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi_2}{dx}\right)+(q+\lambda s)\varphi_2=0$$

وبضرب الأولى φ_2 والثانية فى φ_1 والطرح نحصل على

$$\varphi_1\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi_2}{dx}\right)-\varphi_2\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi_1}{dx}\right)=0$$

وبالتكامل من a إلى b نحصل على

$$p(x)[\varphi_1(x)\varphi_2'(x)-\varphi_1'(x)\varphi_2(x)]=p(a)[\varphi_1(a)\varphi_2'(a)-\varphi_1'(a)\varphi_2(a)]$$

$$= \text{ثابت} \qquad (12)$$

والتى تعرف بصيغة آبل (Abel).

نظرية (٥): المتجه الذاتى لنظام شتروم ليوفيل النظامى يكون وحيداً ما عدا معامل ثابت

البرهان: ليكن φ_1، φ_2 دالتان ذاتيتان مناظرتان لقيمة λ. ومن صيغة آبل (12) يكون لدينا

$$p(x)W(x,\varphi_1,\varphi_2)= \text{ثابت} \quad ، \quad p(x)>0$$

وبالتالى إذا كان $W=0$ عند نقطة فى $[a, b]$ ، فإنه يجب أن يساوى الصفر عند كل $x\in[a,b]$. وحيث أن φ_1، φ_2 يحققان الشرط عن $x=a$ فنجد أن

$$a_1\varphi_1(a)+b_2\varphi_2(a)=0$$

$$b_1\varphi_2(a)+a_2\varphi_2'(a)=0$$

وحيث أن a_1، a_2 لايساويان الصفر معا، فيكون

$$\begin{vmatrix}\varphi_1(a) & \varphi_1'(a)\\ \varphi_2(a) & \varphi_2'(a)\end{vmatrix}=+W(a,\varphi_1,\varphi_2)=0$$

لجميع فيه $x \in [a,b]$. وبالتالى فإن $W = 0$ لجميع $x \in [a,b]$ وهو شرط كاف للارتباط الخطى للدالتين φ_1، φ_2. وعلى ذلك $\varphi_1(x)$ يختلف عن $\varphi_2(x)$ بعامل ثابت (أى ثابت $= \varphi_1 / \varphi_2$).

تنص النظرية (٣) أن جميع القيم الذاتية لنظام شتورم ليوفيل النظامى تكون حقيقية. ولكنها لاتضمن وجود أى قيمة ذاتية. ويمكن اثبات أن نظام شتورم– ليوفيل النظامى المترافق ذاتيا له عدد غير منتهى من القيم الذاتية. وقبل اثبات نعطى المثال التالى

مثال (١): اعتبر نظام شتورم – ليوفيل

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) + hy'(1) = 0, \quad b > 0, \quad 0 \le x \le 1$$

الحل: نجد هنا أن $p = 1$، $q = 0$، $s = 1$ ويكون حل هذه المعادلة هو

$$\varphi(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + \beta\sin\sqrt{\lambda}x$$

وحيث أن $y(0) = 0 \quad \Leftarrow \quad A = 0$ فيكون لدينا

$$\varphi(x) = \beta\sin\sqrt{\lambda}x$$

وبتطبيق الشرط الثانى نجد أن

$$\sin\sqrt{\lambda} + h\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0 \quad , \quad \beta \ne 0$$

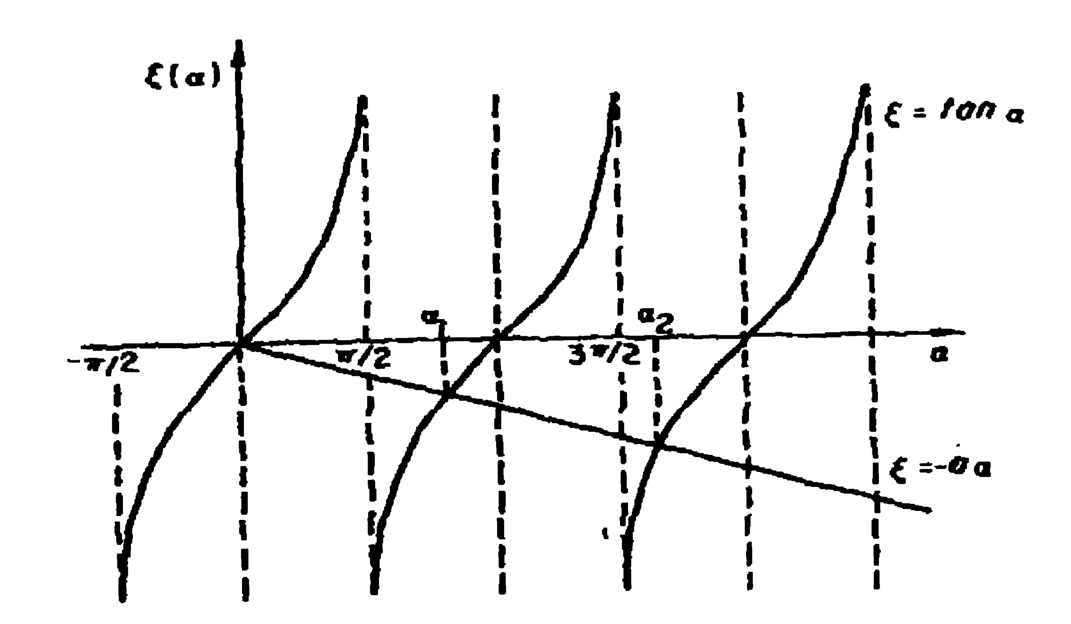
والذى يمكن كتابته على الصورة

$$\tan\sqrt{\lambda} = -h\sqrt{\lambda}$$

إذا أخذنا $\alpha = \sqrt{\lambda}$ فإن

$$\tan\alpha = -h\alpha$$

وهذه المعادلة ليس لها حل صريح. وبالتالى يمكن أن تحدد الشكل بيانيا برسم الدوال $\xi = \tan\alpha$، $\xi = -h\alpha$ مقابل α. كما فى الشكل. وتعطى الجذور بتقاطع المنحنيان وكما هو مبين بالشكل يوجد عدد غير منتهى من الجذور α_n $n = 1,2,3,...$. لكل جذر α_n يوجد قيمة ذاتية $\lambda_n = \alpha_n^2$. ويوجد متتابعة من القيمة الذاتية فى الرسم. ونقط تقاطع الدالتين تعطى القيم الذاتية $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < .....$



وتكون المتجهات الذاتية المناظرة هى $\sin\sqrt{\lambda}n$.

نظرية (٦): يكون لنظام شتورم – ليوفيل المترافق متتابعة غير منتهية من القيم الذاتية الحقيقية

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \ldots$$

مع

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

ولكل n تكون الدالة الذاتية $\varphi_n(x)$ محددة بطريقة واحدة ولها n من الجذور فى الفترة (a, b)

البرهان: بأخذ عددين حقيقين مناسبين α، β فى الفترة $[0,\pi)$ فيمكن أن نكتب (5) على الصورة

$$\cos\alpha\, y(a) - p(a)\sin\alpha\, y'(a) = 0 \qquad (13)$$

$$\cos\beta\, y(b) - p(b)\sin\beta\, y'(b) = 0 \qquad (14)$$

حيث α، β يمكن التعبير عنهما بدلالة a_1, a_2, b_1, b_2 ومن الواضح باستخدام تعويض بروفر (Prufer)

$$py' = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

فيكون الشرط (13) مكافئاً إلى

$$\theta(a) = \alpha \qquad (15)$$

ليكن $\phi(x,\lambda)$ حل معادلة شتورم–ليوفيل النظامى (4). فإن دالة بروفر الطورية (Prüfer plase function) للحل $\theta(x,\lambda)$ التى تحقق $\theta(a,\lambda)=\alpha$ يمكن تعيينها.

ومن نظرية (2) فإن $\theta(x,\lambda)$ تكون دالة مطردة التزايد فى λ لقيمة x الثابتة، ومن المعادلة

$$\theta'(x)=\frac{1}{p(x)}\cos^2\theta(x)+[q(x)+\lambda s(x)]\sin^2\theta(x)$$

نرى أن $\theta'(x)>0$ عندما $\theta=0(\mathrm{mod}\,\pi)$. وحيث $\theta(a)=\alpha>0$ فيجب أن يكون لدينا $\theta(x,\lambda)\geq 0$. وبالتالى إذا كان x_n ترمز إلى موقع الصفر النونى للحل $\varphi(x,\lambda)$ على (a, b) فإن $\theta(x_n,\lambda)=n\pi$، $n=0,1,2,...$. وحيث أن $\theta(a,\lambda)=\alpha<\pi$ فإن الصفر الأول للحل $\varphi(x,\lambda)$ فى (a,b) يحدث عند $\theta=\pi$ والصفر النونى عند $\theta=n\pi$. وحيث أن $\theta(x_n,\lambda)$ دالة متصلة فى $x_n(\lambda)$، λ فيكون لدينا

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{d\lambda}+\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}=0 \qquad (16)$$

وحيث أن $\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\geq 0$، $\frac{\partial\theta}{\partial x_n}>0$ عندما $\theta=0(\mathrm{mod}\,\pi)$. فنجد من (16) أن $x_n(\lambda)$ دالة متصلة مطردة التناقص فى λ.

ولاثبات أن $\lim_{\lambda\to\infty}\theta(x,\lambda)=\infty$، ليكن P، Q، S ثوابت بحيث $p(x)\leq P,\ q(x)\geq Q,\ s(x)\geq S>0$. فإن المعادلة

$$\frac{d}{dx}\left(P\frac{dy}{dx}\right)+(Q+\lambda S)y=0$$

مع $(Q+\lambda S)>0$ لها الحل

$$\bar{\phi}(x)=\sin Kx$$

حيث $K^2=(Q+\lambda S)/P$. والأصفار المتتالية موزعة فى مسافة بعدها $\pi[(Q+\lambda S)/P]^{-1/2}$ فيما بينهم. وبالتالى تؤول إلى الصفر عندما $\lambda\to\infty$. ومن

نظرية شتروم للمقارنة، فيكون للحل $\varphi(x)$ صفر بين أى صفرين متتاليين للحل $\bar{\phi}(x)$. ونعرف أن $\bar{\phi}$ لها n من الأصفار على (a, b) عندما تكون λ كبيرة بدرجة كافية. ومن ذلك يلى أن $\phi(x)$ يجب أن يكون لها n من الأصفار على (a, b). وعلى ذلك $\theta(x,\lambda)=n\pi$ لقيم λ الكبيرة. ومن الواضح أن $\theta(x,\lambda)$ تقترب من ∞ عندما $\lambda\to\infty$.

لاثبات أن $\lim_{\lambda\to-\infty}\theta(x,\lambda)=0$. نختار عددين ξ، δ بحيث أن $\alpha<\xi<\pi$، $0<\delta<\pi$. ويكون ميل القطعة المستقيمة فى المستوى $\theta-x$ الذى يصل (a,ξ)، (c,δ) حيث $c\in(a,b)$ هو $\frac{(\delta-\xi)}{(c-a)}$. نختار $\lambda<\Lambda$ لبعض Λ بحيث أن

$$\theta'=\frac{\cos^2\theta}{p(x)}+(q(x)+\lambda s(x)]\sin^2\theta<\frac{\delta-\varepsilon}{(c-a)}.$$

لجميع (x,θ) على هذه القطعة المستقيمة. ويمكن عمل ذلك باختيار λ سالبة بدرجة كبيرة جداً (sufficiently large negative). وبذلك ننتهى إلى أن $\theta(c,\lambda)<\delta$ لقيم $(-\lambda)$ الكبيرة جدا. وحيث أن $\theta(c,\lambda)>0$ فيجب أن يكون لدينا $|\theta(c,\lambda)|<\delta$. وحيث أن c، δ لختياريان فيلى ذلك أن

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\theta(x,\lambda)=0$$

ونرى مما ذكرنا سالفا أن $\theta(b,\lambda)\to 0$ عندما $\theta\to-\infty$. وحيث أن $\beta>0$، $\theta(b,\lambda)$ دالة تزادية فى λ وبالتالى يوجد λ_0 بحيث $\theta(b,\lambda_0)=\beta+n\pi$. وتعطى الدالة الذاتية المناظرة للقيمة الذاتية λ_n بالعلاقة

$$\phi_n(x)=r(x)\sin\theta(x,\lambda_n)$$

ومن نظرية الوحدوية أى حلين لمعادلة شتورم ليوفيل النظامى ويحققان نفس الشروط يكونا غير مستقلين خطيا. وبالتالى يتم تحديد الدالة الذاتية $\phi_n(x)$ بطريقة واحدة بفارق ثابت.

أما لنظام شتورم ليوفيل الدورى سوف نسرد النظرية التالية بدون برهان.

نظرية (٧): القيم الذاتية لنظام شتورم ليوفيل النظامى تكون متتابعة

$-\infty < \ldots < \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 < \lambda_3 \le \lambda_4 <$

فإنه يوجد دالة ذاتية وحيدة φ_0 للقيم الذاتية λ_0. وإذا كان $\lambda_{2j+1} < \lambda_{2j+2}, j \ge 0$ فإنه توجد دالتان ذاتيتان وحيدتان φ_{2j+1}، φ_{2j+2}. وإذا كان $\lambda_{2j+1} = \lambda_{2j+2}$ فإنه يوجد دالتان ذاتيتان مستقلان خطياً φ_{2j+1}، φ_{2j+2}.

٢٣-٣ مفكوك الدالة الذاتية Eigenfunction expansion

تعريف: يقال أن الدالة الحقيقية بأنها قابلة للتكامل تحت التربيع (square-integrable) بالنسبة إلى دالة الوزن $\rho(x) > 0$ إذا كان على I

$$\int_I \phi^2(x)\rho(x)dx < +\infty \qquad (1)$$

ونتيجة سريعة لهذا التعريف هو متباينة شفارتز (Schwarz)

$$\left|\int_I \phi(x)\psi(x)\rho(x)dx\right|^2 \le \int_I \phi^2(x)\rho(x)dx \int_I \psi^2(x)\rho(x)dx \qquad (2)$$

لتكن $\{\phi_n(x)\}$، لعدد صحيح n، فئة متعامدة من دوال قابلية التكامل تحت التربيع مع دالة الوزن الموجبة $\rho(x)$ على I. ليكن $f(x)$ دالة معطاة ويمكن تمثيلها بمتسلسلة تقاربية بانتظام على الصورة

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \qquad (3)$$

حيث c_n ثوابت. بضرب طرفى (3) فى $\varphi_n(x)\rho(x)$ والتكامل حدا بحد على I (شرط التقارب المنتظم للمتسلسلة يكون ضروريا هنا) فنحصل على

$$\int_I f(x)\varphi_n(x)\rho(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I c_n \varphi_n(x)\varphi_m(x)\rho(x)dx$$

وبالتالى

$$\int_I f(x)\varphi_n(x)\rho(x)dx = c_n \int_I \varphi_n^2(x)\rho(x)dx$$

وعلى ذلك

$$c_n = \int_I (f \varphi_n \rho dx) / (\int_I \varphi_n^2 \rho dx) \qquad (4)$$

وبالتالى تكون قد برهنا النظرية التالية.

نظرية (١): إذا مثلنا $f(x)$ بمتسلسلة متقاربة بانتظام على الصورة

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

على الفترة I، حيث φ_n فئة من الدوال المتعامدة قابلة للتكامل تحت التربيع بالنسبه لدالة الوزن الموجبة $\rho(x)$ فإن c_n تعطى بالعلاقة (4).

مثال (١): كثيرات حدود ليجندر $p_n(x)$ تكون متعامدة بالنسبة لدالة الوزن $\rho(x) = 1$ على $(1 ,1-)$. إذا افترضنا أن $f(x)$ يمكن تمثيلها بمتسلسلة فورير-ليجندر

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n p_n(x)$$

حيث c_n تعطى بالعلاقة

$$c_n = \int_{-1}^{1} f(x) p_n(x) dx \Big/ \int_{-1}^{1} p_n^2(x) dx$$
$$= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) p_n(x) dx$$

فى المناقشة السابقة افترضنا أن الدالة $f(x)$ يتم التعبير عنها بمتسلسلة تتقارب بانتظام.

مثال (٢): أوجد مفكوك الدالة $f(x) = \pi x - x^2$ على $0 \le x \le \pi$ فى صورة متسلسلة دوال $\{\varphi_n\}$ متعامدة وتتارب بانتظام لنظام شتورم -ليوفيل

$$y'' + \lambda y = 0 \ , \quad y(0) = 0 \ , \quad y(\pi) = 0$$

وناقش تقارب المفكوك.

الحل: ليكن لدينا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$، $n = 1, 2, \ldots$

وتعرف أن الدوال الذاتية المتعامدة للمسألة المعطاة هى

$$\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx, \qquad 0\le x\le \pi, \quad n=0,1,2,...$$

وتعرف أن

$$c_n=\int_0^\pi f(x)\varphi_n(x)\rho(x)dx \Big/ \int_0^\pi [\pi\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sin nx)]^2dx$$

$$=\int_0^\pi f(x)\varphi_n(x)\rho(x)dx, \rho=1$$

$$=\int_0^\pi (\pi x-x^2)(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x)(1)dx$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}[\pi\int_0^\pi x\sin nx-\int_0^\pi x^2\sin nx dx]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{\pi^2}{n}\cos nx\right)-\left(\frac{2}{n^3}\cos n\pi-\frac{\pi^2}{n}\cos n\pi-\frac{2}{n^3}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{n^3}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{4}{n^3}, & n \text{ فردى} \\ 0, & n \text{ زوجى}\end{cases}$$

وتكون المتسلسلة هى

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi n^3}\sin nx \quad \text{أو} \quad \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$$

ونكتب

$$\pi x-x^2=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}=\frac{8}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}+\frac{\sin 5x}{5^3}+...\right]. \quad (A)$$

نلاحظ أنه إذا كان $\varphi_1(0)=0 \Leftarrow f(0)=0$ وكذلك

$$f(\pi)=0 \quad \Leftarrow \quad \varphi_1(\pi)=0$$

حيث

$$\varphi_1(0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 0=0 \quad , \quad f(0)=0$$

$$\varphi_2(\pi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin \pi=0 \quad , \quad f(\pi)=\pi^2-\pi^2=0$$

وبذلك ترى أن جميع الشروط متحققة فنحصل على المفكوك (A).

تمارين

أ – اوجد القيم الذاتية والدوال الذاتية

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0, \quad y(0)=0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0, \quad y(0)=0, \quad y(\pi)=0$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0, \quad y(0)-y'(0)=0, \quad y(\pi)-y'(\pi)=0$

(4) $\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\frac{\lambda}{x}y=0, \quad y(1)=0, \quad y(e^{\pi})=0$

(5) $\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\frac{\lambda}{x}y=0, \quad y(1)=0, \quad y'(e^{\pi})=0$

(6) $\frac{d}{dx}\left((x^2+1)\frac{dy}{dx}\right)+\frac{\lambda}{x^2+1}x=0, \quad y(0)=y(1)=0$

(7) $\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{1}{3x^2+1}\right)\frac{dy}{dx}\right)+(3x^2+1)y=0, \quad y(0)=y(\pi)=0$

(تنويه استخدم $t=x^3+x$).

ب – اثبت أن الدوال الذاتية لمسائل شتورم–ليوفيل تكون متعامدة:

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0, \quad y(0)=0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0, \quad y(0)=0, \quad y(L)=0, \; L>0$

(3) $\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\frac{\lambda}{x}y=0, \quad y(1)=0, \quad y'(e^{2\pi})=0$

جـــ- اعتبر فئة الدوال $\{\phi_n\}$ حيث

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{x},\quad \varphi_{n+1}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx\,,\quad 0\le x\le\pi$$

اثبت أن $\{\phi_n\}$ متعامدة بالنسبة لدالة الوزن $\rho=1$ على $[0,\pi]$.

د – اوجد مفكوك الدالة f فى دوال ذاتية متعامدة $\{\phi_n\}$ له دالة الوزن $\rho=1$ ولنظام شتورم-ليوفيل المعطى بالتالى

$$(1)\ \frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0,\quad f=x\,,\quad y(0)=y(\pi)=0,\quad 0\le x\le\pi$$

$$(2)\ \frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\frac{\lambda}{x}y=0,\quad f=1\,,\quad y(1)=y(e^{\pi})=0,\quad 1\le x\le e^{\pi}$$

$$(3)\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\frac{\lambda}{x}y=0,\quad f=\ln x\,,\quad y(1)=0,\quad y/e^{2\pi}=0\,,\ 1\le x\le e^{2\pi}$$

هـــ- إذا كان φ_1 ، φ_2 حلين مستقلين خطيا لنظام شتورم ليوفيل

$$\frac{d}{dx}[p(x)y']+[q(x)+\lambda s(x)]y=0$$

$$a_1y(a)+a_2y(b)+a_3y'(a)+a_4y'(b)=0$$

$$b_1y(a)+b_2y(b)+b_3y'(a)+b_4y'(b)=0$$

اثبت أنهما متعامدان بالنسبة لدالة الوزن s على $[a,b]$.

و – اوجد القيمة الذاتية والدوال الذاتية لنظام شتورم-ليوفيل

$$(1)\ \ x^2y''+3xy'+\lambda y=0\,,\quad y(1)=y(e)=0\,,\quad 1\le x\le e$$

$$(2)\ \frac{d}{dx}[(2+x)^2y')+\lambda y=0\,,\quad y(-1)=y(1)=0\,,\quad -1\le x\le 1$$

(3)

$$(1+x^2)y''+2(1+x)y'+3\lambda y=0\,,\quad y(0)=0\,,\quad y(1)=0\,,\quad 0\le x\le 1$$

ز – أوجد مفكوك الدالة $f(x)=\sin x$ ، $0\le x\le\pi$ بدلالة الدوال الذاتية لنظام شتورم–ليوفيل

$$y''+\lambda y=0\ ,\quad y(0)=0\ ,\quad y(\pi)+y'(\pi)=0$$

ح– اوجد مفكوك $f(x)=x$ ، $0\le x\le\pi$ فى متسلسلة الدوال الذاتية لنظام شتورم–ليوفيل

$$y''+\lambda y=0\ ,\quad y'(0)=0\ ,\quad y'(\pi)=0$$

الباب الرابع والعشرون

كثيرات حدود ليجندر

Legendre Polynomials

٢٤-١ تعريف: تسمى المعادلة التفاضلية التى على الصورة

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \qquad (1)$$

بمعادلة ليجندر، حيث n عدد صحيح موجب.

٢٤-٢ حل معادلة ليجندر:

ويمكن إيجاد حل معادلة ليجندر فى متسلسلة قوى تنازلية فى قوى x. بإستخدام طريقة فروبنيوس فنحصل على الحلين

$$y=a\left\{x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}+\ldots\right\}, \qquad (2)$$

$$y=b\left\{x^{-n-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{2(2n+3)}x^{-n-2}+\frac{(n-1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4(2n+3)(2n+5)}x^{-n-5}+\ldots\right\} \qquad (3)$$

فإذا وضعنا $a=[1.3....(2n-1)]/n!$ فإننا نرمز للحل (2) بالرمز $P_n(x)$ ويسمى بدالة ليجندر من النوع الأول أو كثيرة حدود ليجندر من درجة n أما إذا وضعنا $b=n/1.3.5....(2n-1)$ فإن الحل (3) نرمز له بالرمز Q_n ويسمى دالة ليجندر من النوع الثانى وحيث أن n عدد صحيح موجب فإنها تكون متسلسلة غير منتهية وبالتالى $Q_n(x)$ ليست كثيرة حدود. وعلى ذلك يكون $P_n(x)$ و $Q_n(x)$ حلين مستقلين خطياً للمعادلة (1). وبالتالى يكون الحل العام للمعادلة (1) هو

$$y=AP_n(x)+BQ_n(x) \qquad (4)$$

حيث A، B ثابتان إختياريان.

ملحوظة: سنكتب P_n بدلا من $P_n(x)$، P_n' بدلا من $\frac{dP_n}{dx}$ إذا لم يجث التباس.

٢- صورة أخرى كثيرة الحدود $P_n(x)$

تعرف كثيرة حدود ليجندر من درجة n بالتالى

$$P_n(x)=\frac{1.3.5...(2n-1)}{n!}\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}+...\right] \quad (1)$$

والآن سنكتب (1) فى صورة مختصرة. الحد العام فى كثيرة الحدود (1) يعطى بالعلاقة

$$\frac{1.3.5...(2n-1)}{n!}(-1)^r\frac{n(n-1)...(n-2r+1)}{2.4...2r(2n-1)(2n-3)-(2n-2r+1)}x^{n-2r} \quad (2)$$

ولكن

$$1.3.5...(2n-1)=\frac{1.2.3.4.5...(2n-1)2n}{2.4.6...2n}=\frac{(2n)!}{(2.1)(2.2).....(2-n)}$$

$$=\frac{(2n)!}{2^n.1.2.3..n}=\frac{(2n)!}{2^n n!} \quad (3)$$

وأيضا

$$n(n-1)...(n-2r+1)=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-2r+1)(n-2r-1)...3.2.1}{(n-2r)(n-2r-1)...3.2.1}=\frac{n!}{(n-2r)!} \quad (4)$$

وكذلك

$$2.4.6...2r=(2.1)(2.2)(2.3)...(2.r)=2^r r! \quad (5)$$

وأخيرا

$$(2n-1)(2n-3)...(2n-r+1)=$$

$$=\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)...(2n-3)...(2n-2r+2)(2n-2r+1)}{(2n)(2n-2)(2n-4)...(2n-2r+2)}\cdot\frac{(2n-2r)!}{(2n-2r)!}$$

$$=\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)...(2n-2r+1)(2n-2r)(2n-2r+1)...3.2.1}{2n.2(n-1)2(n-2)...2(n-r+1)...(2n-2r)!}$$

$$=\frac{(2n)!}{2^n n(n-1)(n-2)...(n-r+1)(2n-2r)!}$$

$$=\frac{(2n)!}{2^n(2n-2r)!}\cdot\frac{(n-r)(n-r-1)...3.2.1}{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)(n-r)(n-r-1)3.2.1}$$

$$=\frac{(2n)!}{2^n(2n-2r)!}\cdot\frac{(n-r)!}{n!} \qquad (6)$$

وباستخدام (3)، (4)، (5)، (6) فإن الحد العام فى (2) يؤول إلى

$$=\frac{(2n)!}{2^n n!}(-1)^r\frac{n!}{(n-2r)!}\times\frac{1}{2^r r!}\times\frac{2^n(2n-2r)!n!}{(2n)!(n-r)!}x^{n-2r}$$

أى

$$=(-1)^r\frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!}x^{n-2r} \qquad (7)$$

وبالتالى فإن (1) كثيرة حدود من درجة n، r يجب اختيارها بحيث

$(n-2r\geq 0$ i.e $r\leq n/2$

إذا كانت n زوجية ، فإن r تتراوح من 0 إلى $\frac{n}{2}$ بينما

إذا كانت n فردية ، فإن r تتراوح من 0 إلى $\frac{1}{2}(n-1)$ وعلى

$$[\frac{1}{2}n]=\begin{cases} n/2, & \text{إذا كانت } n \text{ زوجيه} \\ (n-1)/2, & \text{إذا كانت } n \text{ فردية} \end{cases}$$

وبذلك تأخذ المعادلة (1) الصورة

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!} x^{n-2r} \qquad (8)$$

وهى كثيرة حدود ليجندر (أو دالة ليجندر) من درجة n من النوع الأول.
أما كثيرة حدود ليجندر من النوع الثانى هى

$$Q_n(x) = \frac{n!}{1.3...(2n+1)}\left[x^{-(n+1)} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}x^{-(n+3)}\right.$$

$$\left. + \frac{(n+1)(n+2)(m+3)(n+4)}{2.4(2n+3)(2n+5)}x^{-(n+5)} + ...\right] \qquad (9)$$

ولانتعرض لدراستها فى هذا الكتاب.

٢٤-٣ تعيين بعض كثيرات حدود ليجندر:

بوضع $n = 0, 1, 2, 3, 4, ...$ فى (8) نحصل على

$$P_0(x) = \frac{1}{0!}x^0 = 1, \qquad P_1(x) = \frac{1}{1!}x^1 = x$$

$$P_2(x) = \frac{1.3}{2!}\left[x^2 - \frac{2.1}{2.3}x^0\right] = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1.3.5}{3!}\left[x^3 - \frac{3.2}{2.5}x^1\right] = \frac{1}{2}(5x^2 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1.3.5.7}{4!}\left[x^4 - \frac{4.3}{2.7}x^2 + \frac{4.3.2.1}{2.4.7.5}x^0\right] = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

وهكذا.

مثال: عبر عن $2-3x+4x^2$ بدلالة كثيرة حدود ليجندر

الحل: نعرف أن

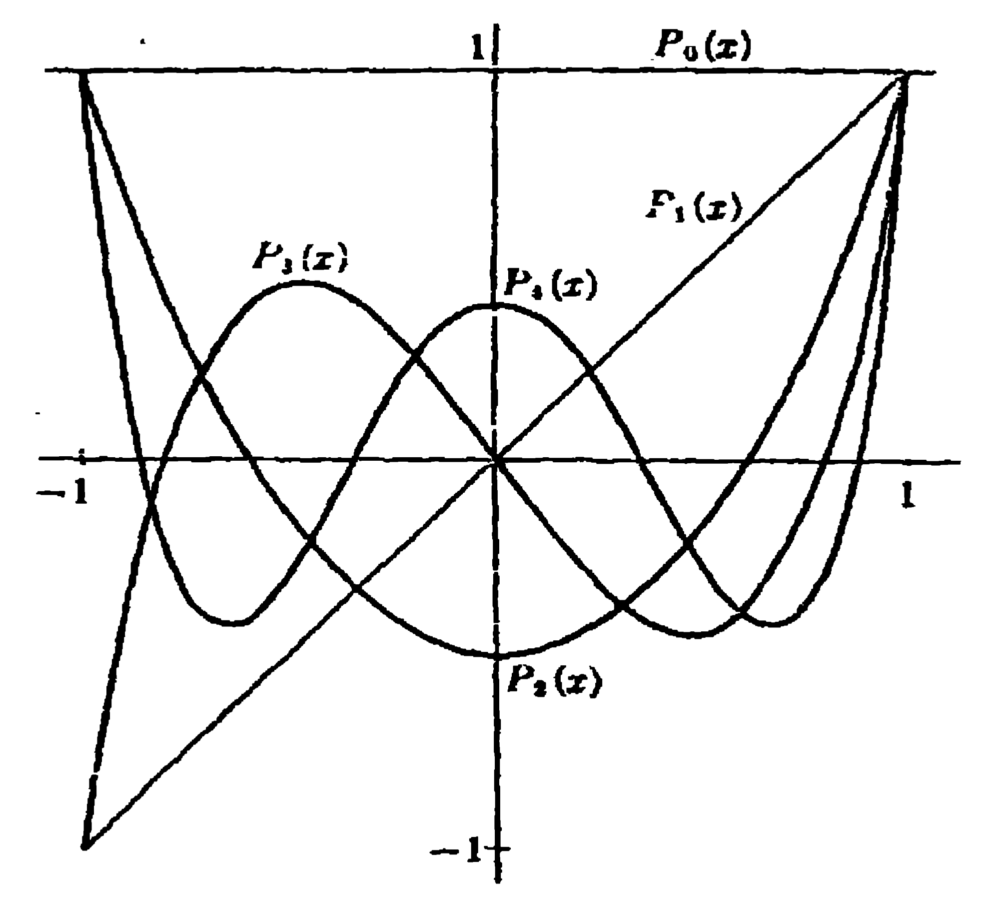
$$1 = P_0(x),\ x = P_1(x),\ \frac{3x^2 - 1}{2} = P_2(x) \Rightarrow x^2 = \frac{2P_2 + 1}{3}$$

وعلى ذلك يكون

$$2-3x+4x^2=2P_0-3P_1+\frac{4}{3}(2P_2+1)$$

$$=2P_0-3P_1+\frac{8}{3}P_2+\frac{4}{3}P_0$$

$$=\frac{10}{3}P_0-3P_1+\frac{8}{3}P_2$$



ملحوظة: أشكال P_n مبينة بالشكل

٢٤-٤ الدالة المولدة لكثيرة حدود ليجندر:

تعريف (١): تسمى الدالة $(1-2xz+z^2)^{-1/2}$ بالدالة المولدة (generating) لكثيرة حدود ليجندر

نظرية (١): تحقق الدالة المولدة العلاقة

$$(1-2xz+z^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(x),\ |x|<1,\ |z|<1$$

البرهان: حيث أن $|z|<1$، $|x|\leq 1$ فيكون لدينا

$$[1-2xz+z^2]^{-1/2}=[1-z(2x-z)]^{-1/2}$$

$$=1+\frac{1}{2}z(2x-z)+\frac{1}{2}.\frac{3}{4}z^2(2x-z)^2+...$$

$$+\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...(2n-2)}z^{n-1}(2x-z)^{n-1}+\frac{1.3...(2n-1)}{2.4...(2n)}z^n(2x-z)^n \qquad (1)$$

ويكون معامل z^n فى $\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...(2n-2)}z^n(2x-z)^n$ يساوى

$$=\frac{1.3...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}(2x)^n=\frac{1.3.5...(2n-1)2^n x^n}{(2.1)(2.2)(2.3)...(2.n)}$$

$$=\frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n n!}2^n x^n=\frac{1.3.5...(2n-1)}{n!}x^n \qquad (2)$$

وأيضاً معامل z^n فى $\frac{1.3...(2n-3)z^{n-1}}{2.4....(2n-2)}(2x-z)^{n-1}$ يساوى

$$=\frac{1.3...(2n-3)}{(2.1)(2.2)...2(n.1)}\left\{-(n-1)(2x)^{n-2}\right\}$$

$$=\frac{1.3...(2n-3)}{2^{n-1}.1.2.3...(n-1)}.\frac{(2n-1)}{n}.\frac{n}{2n-1}[(n-1).2^{n-2}x^{n-2}]$$

(وبالضرب والقسمة على $(2n-1)/n$)

$$=\frac{1.3...(2n-1)}{n!}.\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} \qquad (3)$$

وباستخدام (2) ، (3) نرى أن معامل z^n فى مفكوك $(1-2xz+z^2)^{-1/2}$ يعطى

$$\frac{1.3...(2n-1)}{n!}\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}+...\right]=P_n(x)$$

(من تعريف كثيرة حدود ليجندر)

نلاحظ أن $P_1, P_2, \ldots$ هى معاملات $z, z^2, \ldots$ فى مفكوك $(1-2xz+z^2)^{-1/2}$.
ويمكن أن نكتب

$$(1-2xz+z^2)^{-1/2} = 1 + zP_1 + z^2P_2 + \ldots z^nP_n(x) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^nP_n(x)$$

مثال (١): اثبت أن

$$1 + \frac{1}{2}P_1(\cos\theta) + \frac{1}{3}P_2(\cos\theta) + \ldots = \ln\left[\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right) / \sin\frac{\theta}{2}\right]$$

الحل: من الدالة المولدة، نجد أن

$$\sum z^nP_n(x) = (1-2xz+z^2)^{-1/2} \qquad (1)$$

وبتكامل (1) من 0 إلى 1 ، نجد أن

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 z^nP_n(x)dz = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \qquad (2)$$

باحلال $\cos\theta$ بدلا من x فى طرفى (2) نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\int_0^1 z^n dz = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-2z\cos\theta+z^2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left[\frac{z^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{[(z-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\cos\theta)}{n+1} = \left[\ln\{(z-\cos\theta)+\sqrt{[(z-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\}\right]_0^1$$

$$= \ln\{(1-\cos\theta)+\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\} - \ln(1-\cos\theta)$$

$$= \ln\{(1-\cos\theta)+\sqrt{2(1-\cos\theta)}\} - \ln(1-\cos\theta)$$

$$= \ln\frac{(1-\cos\theta)+\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}}{1-\cos\theta}$$

$$=\ln\frac{\sqrt{1-\cos\theta}.\sqrt{1-\cos\theta}+\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1-\cos\theta}\sqrt{1-\cos\theta}}$$

$$=\ln\frac{\sqrt{1-\cos\theta}+\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos\theta}}=\ln\left(\frac{\sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}+\sqrt{2}}{\sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}}\right)$$

$$=\ln\left(1+\sin\frac{\theta}{2}/\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

وعلى ذلك

$$P_0(\cos\theta)+\frac{1}{2}P_1(\cos\theta)+\frac{1}{3}P_2(\cos\theta)+\ldots=\ln\frac{1+\sin\theta/2}{\sin\theta/2}$$

أى

$$1+\frac{1}{2}P_1(\cos\theta)+\frac{1}{3}P_2(\cos\theta)+\ldots=\ln\frac{1+\sin\theta/2}{\sin\theta/2}$$

(حيث $P_0(\cos\theta)=1$)

مثال (٢): اثبت أن

(i) $P_n(1)=1$, (ii) $P_n(-1)=(-1)^n$

(iii) $P_n'(1)=\frac{1}{2}n(n+1)$, (iv) $P_n'(-1)=(-1)^{n-1}\frac{1}{2}n(n+1)$

(v) $P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$

ثم استنتج أن $P_n(-1)=(-1)^n$

الحل: لدينا الدالة المولدة

$$(1-2xz+z^2)^{-1/2}=\sum z^n P_n(x),\ |z|<1,\ |z|\le 1 \qquad (1)$$

(i) بوضع $x=1$ فى (1) يكون لدينا

$$(1-2z+z^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(1) \quad \Rightarrow \quad (1-z)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(1)$$

وحيث أن $|z|<1$ وباستخدام نظرية ذات الحدين نجد أن

$$1+z+z^2+...=\sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(1) \tag{2}$$

وبمساواة معامل z^n على الطرفين نجد أن

$$P_n(1)=1$$

(ii) بوضع $x=-1$ فى (1) نحصل على

$$(1+2z+z^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(-1) \quad \Rightarrow \quad (1+z)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(-1)$$

$$1-z+z^2-z^3+(-1)^n z^n+...=\sum z^n P_n(-1) \tag{3}$$

وبمساواة معامل z^n فى الطرفين نجد أن

$$P_n(-1)=(-1)^n$$

(iii) حيث أن $P_n(x)$ تحقق معادلة ليجندر فإن

$$(1-x^2)P_n''-2xP_n'+n(n+1)P_n=0 \tag{4}$$

بوضع $x=1$ فى (4) واستخدام $P_n(1)=1$ نحصل على

$$0-2P_n'(1)+n(n+1)=0 \Rightarrow P_n'=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(iv) بوضع $x=-1$ فى (4) نحصل على

$$0+2P_n'(-1)+n(n+1)(-1)^n \Rightarrow P_n'(-1)=-(-1)^n\frac{1}{2}n(n+1)$$

(وذلك باستخدام $P_n(-1)=(-1)^n$) أى

(حيث $(-(-1)^n = -(-1)^{n-1}(-1) = (-1)^{n-1}$, $P_n'(-1) = (-1)^{n-1}\frac{1}{2}n(n+1)$

(v) بوضع $-x$ بدلا من x فى (1) نحصل على

$$(1+2xz+z^2)^{-1/2} = \sum z^n P_n(x) \tag{5}$$

وكذلك وضع $-z$ بدلا من z فى (1) نحصل على

$$(1+2xz+z)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n P_n(x) \tag{6}$$

ومن (5)، (6) نجد أن

$$\sum z^n P_n(-x) = \sum (-1)^n z^n P_n(x) \tag{7}$$

وبمساواة معامل z^n فى الطرفين نجد أن

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \tag{8}$$

الاستنتاج: بوضع 1 بدلاً من x فى (8) ونلاحظ أن $P_n(1) = 1$ نحصل على

$$P_n(-1) = (-1)^n$$

ملحوظة: عندما تكون n فردية فإن $(-1)^n = -1$ وبالتالى تصبح (8) $P_n(-x) = -P_n(x)$ وبذلك تكون $P_n(x)$ دالة فردية فى x عندما تكون n فردية. وبالمثل $P_n(x)$ تكون دالة زوجية فى x عندما تكون n زوجية.

مثال (٣): اثبت أن

(i) $P_{2n+1}(0) = 0$, (ii) $P_{2m}(0) = (-1)^m \dfrac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$

(iii) $P_n(0) = 0$, أذا كانت n فرديه

(iv) $P_n(0) = \dfrac{(-1)^{n/2} n!}{2^n \{(n/2)!\}^2}$, إذا كان n زوجية

الحل: لدينا

$$\sum_{r=0}^{\infty} z^n P_n(x) = (1-2xz+z^2)^{-1/2}, \ |z|<1, \ |x|<1$$

(1)

بوضع $x=0$ فى (1) نجد أن

$$\sum_{r=0}^{\infty} z^n P_n(0) = (1+z^2)^{-1/2}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(z^2\right)^n$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5....(2n-1)}{2^n n!} z^{2n} \qquad (2)$$

(i) نلاحظ ان الطرف الأيمن فى (2) يتكون من أس زوجى للمتغير z.
بمساواة معاملات z^{2m-1} فى طرفى (2) نجد أن

$$P_{2m+1}(0) = 0 \qquad (3)$$

(ii) بمساواة معامل z^{2m} فى طرفى (2) نجد أن

$$P_{2m}(0) = (-1)^m \frac{1.3.3....(2m-1)}{2^m m!} = (-1)^m \frac{1.3.3.4....(2m-1)(2m)}{2^m m! 2.4.6...(2m)}$$

$$= (-1)^m \frac{(2m)!}{2^m m!(2.1)(2.2)...(2.m)} =$$

$$= (-1)^m \frac{(2m)!}{2^m m!} \cdot \frac{1}{2^m m!} = (-1)^m \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \qquad (4)$$

(iii) كما عملنا في الجزء (i) هنا $2m+1=n$ فردية. وبالتالى فإن من (3) يكون $P_n(0)=0$ حيث n فردية.

(iv) تجرى نفس الشيء كما فى (ii) حتى (4). هنا $2m=n$ زوجية وبالتالى $m=n/2$. بوضع $m=n/2$ فى (4) فيكون لدينا

$$P_n(0)=(-1)^{n/2}\frac{n!}{2^n\{(n/2)!\}^2}$$

مثال (٤): اثبت أن

$$P_n\left(-\frac{1}{2}\right)=P_0\left(-\frac{1}{2}\right)P_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)+P_1\left(-\frac{1}{2}\right)P_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)+P_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right)P_0\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (1)$$

الحل: بوضع $x=\frac{1}{2}$ ، $x=-\frac{1}{2}$ فى الدالة المولدة نجد أن

$$(1-z+z^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (2)$$

$$(1+z+z^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad (3)$$

بوضع z^2 بدلا من z فى (3) نحصل على

$$(1+z^2+z^4)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} P_n\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad (4)$$

ولكن

$$1+z^2+z^4=(1+z^2)^2-z^2=(1+z^2+z)(1+z^2-z)$$

$$(1+z^2+z^4)^{-1/2}=(1+z+z^2)^{-1/2}(1-z+z^2)^{-1/2}$$

أى

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} P_n\left(-\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n\left(\frac{1}{2}\right)$$

(باستخدام (2)، (3)، (4))

$$=\left[P_0\left(-\frac{1}{2}\right)+zP_n\left(-\frac{1}{2}\right)+\ldots z^{2n-1}P_{2n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)+z^{2n}P_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right)+\ldots\right]\times$$

$$\times\left[P_0\left(\frac{1}{2}\right)+zP_1\left(\frac{1}{2}\right)+\ldots z^{2n-1}P_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)+z^{2n}P_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

وبمساواة معامل z^{2n} فى الطرفين نحصل على المطلوب.

مثال (٥): اثبت أن

$$\frac{1+z}{z\sqrt{1-2xz+z^2}}-\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}(P_n+P_{n+1})z^n \qquad \text{(A)}$$

الحل: لدينا

$$(1-2xz+z^2)=\sum_{n=0}^{\infty}z^nP_n \qquad (1)$$

الطرف الأيسر (A) يساوى

$$=\frac{1}{z}(1-2xz+z^2)^{-1/2}+(1-2xz+z^2)^{-1/2}-\frac{1}{z}$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}z^nP_n+\sum_{n=0}^{\infty}z^nP_n-\frac{1}{z} \quad , \quad \text{(من (1))} \qquad (2)$$

ولكن

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^nP_n=P_0+zP_1+z^2P_2+\ldots z^nP_n+z^{n+1}P_{n+1}+\ldots$$

$$=1+z(P_1+zP_2+\ldots z^nP_{n+1}+\ldots) \quad , \quad (P_0=1)$$

$$=1+z\sum z^nP_{n+1} \qquad (3)$$

واستخدام (3) فى (2) فإن الطرف الأيسر فى (A) يساوى

$$\frac{1}{z}[1+z\sum z^nP_{n+1}]+\sum z^nP_n-\frac{1}{z}=\sum z^nP_{n+1}+\sum z^nP_n$$

$$= \sum z^{n}(P_n + P_{n-1}) = R.H.S$$

٥-٢٤ خاصية التعامد لكثيرات حدود ليجندر:

تعطى بالعلاقة

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & , \quad m = n \end{cases}$$

أو

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}, \ \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ 1 & , \quad m = n \end{cases}$$

البرهان:

(i) $m \neq n$ ، حيث أن P_m ، P_n نحقق كل منهما معادلة ليجندر يكون لدينا

$$(1-x^2)P_m'' - 2xP_m' + m(m+1)P_m = 0 \qquad (1)$$

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0 \qquad (2)$$

بضرب (1) فى P_n ، (2) فى P_m وبالطرح ينتج أن

$$(1-x^2)(P_nP_m'' - P_mP_n'') - 2x(P_nP_m' - P_n'P_m) + [m(m+1) - n(n+1)]P_mP_n = 0$$

أى

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}(P_nP_m' - P_n'P_m) - 2x(P_nP_m' - P_n'P_m) = (n^2 - m^2 + n - m)P_mP_n$$

أى

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)(P_nP_m' - P_n'P_m)\right\} = (n-m)(n+m+1)P_mP_n$$

وبالتكامل من 1 - إلى 1 نحصل على

$$(n-m)(n+m+1)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \left[(1-x^2)(P_nP_m' - P_n'P_m)\right]_{-1}^{1}$$

ينتج التالى

$$\int_{-1}^{1} P_mP_ndx = 0 \quad , \qquad m \neq n \tag{3}$$

(ii) $m = n$: لدينا

$$(1-2xz+z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^nP_n(x) \tag{4}$$

$$(1-2xz+z^2)^{-1/2} = \sum_{m=0}^{\infty} z^mP_m(x) \tag{5}$$

وبالتالى فإن

$$(1-2xz+z^2)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} P_m(x)P_n(x)z^{n+m}$$

وبتكامل الطرفين بالنسبة إلى x من 1- إلى 1 نحصل على

$$\int_{-1}^{1}(1-2xz+z^2)^{-1}dx = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx\right\}z^{m+n} \tag{6}$$

وباستخدام (3) فإن (6) تؤول إلى

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{-1}^{1}\{P_n(x)\}^2dx\right]z^{2n} = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+z^2-2xz} \quad , \qquad m = n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\ln(1+z^2-2xz)}{-2z}\right]_{-1}^{1} = \frac{-1}{2z}\left[\ln(1-z)^2 - \ln(1+z)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2z}[2\ln(1-z) - 2\ln(1+z)] = \frac{1}{z}[\ln(1+z) - \ln(1-z)]$$

$$= \frac{1}{z}\left[\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} ...\right) - \left(-z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} ...\right)\right]$$

$$=\frac{2}{z}\left(z\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}\dots\right)=\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{-1}^{1}\{P_n(x)\}^2\right]z^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}z^{2n} \tag{7}$$

وبمساواة معامل P_m من الطرفين نحصل على

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\,dx=2/(2n+1)$$

وهو المطلوب.

٢٤-٦- العلاقات التكرارية:

سوف نثبت العلاقات التكرارية التالية لدالة ليجندر

I- $nP_n=(2n-1)xP_{n-1}-(n-1)P_{n-2},\quad n\geq 2$

أو

$$(n+1)P_{n+1}=(2n+1)xP_n-nP_{n-1},\quad n\geq 1$$

أو

$$xP_n=\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}+\frac{n}{n+1}P_{n-1}$$

II- $nP_n=xP_n'-P_{n-1}'$

III- $(2n+1)P_n=P_{n+1}'-P_{n-1}'$

IV- $(n+1)P_n=P_{n+1}'-xP_n'$ أو $P_n'-xP_{n-1}'=nP_{n-1}$

V- $(1-x^2)P_n'=n(P_{n-1}-xP_n)$ أو $(x^2-1)P_n'=nxP_n-nP_{n-1}$

VI- $(1-x^2)P_n'=(n+1)(xP_n-P_{n+1})$

البرهان: (I) من الدالة المولدة لدينا

$$(1-2xz+z^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(x) \qquad (1)$$

باشتقاق طرفى (1) بالنسبة إلى z نحصل على

$$-\frac{1}{2}(1-2xz+z^2)^{-3/2}(-2x-2z)=\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1}P_n(x) \qquad (2)$$

بضرب طرفى (2) فى $(1-2xz+z^2)$ نحصل على

$$(x-z)(1-2xz+z^2)^{-1/2}=(1-2xz+z^2)\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1}P_n(x)$$

$$(x-z)\sum z^n P_n(x)=(1-2xz+z^2)\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1}P_n(x)$$

أى

$$x\sum z^n P_n-\sum z^{n+1}P_n=\sum nz^{n-1}P_n-2x\sum_0^{\infty} nz^n P_n+\sum_0^{\infty} nz^{n+1}P_n$$

بمساواة معاملات z^n فى الطرفين نحصل على

$$xP_n-P_{n-1}=(n+1)P_{n+1}-2xnP_n+(n-1)P_{n-1}$$

أى

$$(n+1)P_{n+1}=(2n+1)xP_n-nP_{n-1} \qquad (3)$$

بوضع $(n-1)$ بدلا من n فى (3) نحصل على

$$nP_n=(2n-1)xP_{n-1}-(n-1)P_{n-2} \qquad (4)$$

ويمكن إعادة ترتيب حدود (3) نحصل على

$$xP_n=\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}+\frac{n}{2n+1}P_{n-1} \qquad \text{I}$$

(II) لدينا

$$(1-2xz-z^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(x) \qquad (1)$$

بالاشتقاق بالنسبة إلى z نحصل على

$$-\frac{1}{2}(1-2xz-z^2)^{-3/2}(-2x+2z)=\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1}P_n$$

أى

$$(x-z)(1-2xz+z^2)^{-3/2}=\sum nz^{n-1}P_n \qquad (2)$$

باشتقاق (1) أيضاً بالنسبة إلى x نحصل على

$$z(1-2xz+z^2)^{-3/2}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n'$$

أى

$$z(x-z)(1-2xz+z^2)^{-3/2}=(x-z)\sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n'$$

$$z\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1}P_n=(x-z)\sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n'$$

أى

$$\sum_{n=0}^{\infty} nz^n P_n = x\sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n' - \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}P_n'$$

ومساواة معامل z^n فى الطرفين نحصل على

$$nP_n = xP_n' - P_{n-1}'.$$

(III) من العلاقة التكرارية (I) نحصل على

$$(2n+1)xP_n=(n+1)P_{n+1}+nP_{n-1}$$

الاشتقاق بالنسبة إلى x نحصل على

$$(2n+1)xP_n'+(2n+1)P_n=(n+1)P_{n+1}'+nP_{n-1}'$$

أى

$$(2n+1)(nP_n+P'_{n+1})+(2n+1)P_n=(n+1)P'_{n+1}-nP'_{n-1}$$

(من العلاقة التكرارية II)

أى

$$(2n+1)(n+1)P_n=(n+1)P'_{n+1}-(n+1)P'_{n-1}$$

$$(2n+1)P_n=P'_{n+1}-P'_{n-1} \qquad (1)$$

بوضع $(n-1)$ بدلا من n فى (1) نجد أن

$$(2n-1)P_{n-1}=P'_n-P'_{n-2}$$

(IV) من العلاقتين I، II نحصل على

$$nP_n=xP'_n-P'_{n-1} \qquad (1)$$

$$(2n+1)P_n=P'_{n+1}-P'_{n-1} \qquad (2)$$

بطرح (1) من (2) نحصل على المطلوب.

(V) من العلاقتين II، IV نحصل على

$$nP_n=xP'_n-P'_{n-1} \qquad (1)$$

$$(n+1)P_n=P'_{n+1}-xP'_{n-1} \qquad (2)$$

بوضع $(n-1)$ بدلا من n فى (2) نحصل على

$$nP_{n-1}=P'_n-xP'_{n-1} \qquad (3)$$

بضرب طرفى (1) فى x فنحصل على

$$xnP_n=x^2P'_n=bxP_n-nP_{n-1} \qquad (4)$$

بطرح (4) من (3) نحصل على

$$n(P_{n-1}-xP_n)=(1-x^2)P'_n \quad \Rightarrow \quad (x^2-1)P'_n=nxP_n-nP_{n-1}$$

VI من العلاقتين I، V يكون لدينا

$$(nx+1)xP_n = (n-1)P_{n+1} + nP_{n-1} \qquad (1)$$

$$(1-x^2)P_n' = n(P_{n-1} - xP_n) \qquad (2)$$

وباعادة كتابة (1) على الصورة

$$[(n+1)+n]xP_n = (n+1)P_{n+1} + nP_{n-1}$$

أى

$$(n+1)(xP_n - P_{n+1}) = n(P_{n-1} - xP_n) \qquad (3)$$

من (2)، (3) نحصل على

$$(1-x^2)P_n' = (n+1)(xP_n - P_{n+1})$$

مثال (١): اثبت أن

$$\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)dx = \frac{2n}{4n^2-1}$$

الحل: من العلاقة التكرارية (I) يكون لدينا

$$xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x)$$

بضرب طرفى (1) فى $P_{n-1}(x)$ والتكامل بالنسبة إلى x من 1 - إلى 1 نحصل على

$$\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)dx = \frac{n+1}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)dx +$$

$$+\frac{n}{2n+1}\int_{-1}^{1} [P_{n+1}(x)]^2dx \qquad (2)$$

ولكن

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & \quad m = n \end{cases} \qquad (3)$$

وباستخدام (3) فإن (2) تؤول إلى

$$\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)dx = 0 + \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{2}{2(n-1)+1}$$

$$= \frac{2n}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{2n}{4n^2-1}$$

مثال (٢): اثبت أن

$$\int_{-1}^{1} x^2 P_n^2 dx = \frac{1}{8(2n-1)} + \frac{3}{4(2n+1)} + \frac{1}{8(2n+3)}$$

الحل: من العلاقة التكرارية I يكون لدينا

$$(2n+1)xP_n = (n+1)P_{n+1} + nP_{n-1}$$

بتربيع الطرفين

$$(2n+1)^2 x^2 P_n^2 = (n+1)^2 P_{n+1}^2 + n^2 P_{n-1}^2 + 2n(n+1)P_{n+1}P_{n-1} \qquad (1)$$

وكذلك

$$\int_{-1}^{1} P_m P_n dx = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & \quad m = n \end{cases} \qquad (2)$$

بتكامل طرفى (1) بالنسبة إلى x من 1- إلى 1 واستخدام (2)

$$(2n+1)^2 \int_{-1}^{1} x^2 P_n^2 dx = (n+1)^2 \frac{2}{2(n+1)+1} + n^2 \frac{2}{2(n-1)+1} + 0$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 P_n^2(x) = \frac{2}{(2n+1)^2} \left[\frac{(n+1)^2}{2n+3} + \frac{n^2}{2n-1} \right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{8(2n-1)}+\frac{3}{4(2n+1)}+\frac{1}{8(2n+1)}$$

٧-٢٤ صيغة ردريج: Rodrigue's formula

له الصورة

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

البرهان: باستخدام تعريف كثيرة حدود ليجندر

$$P_n(x)=\sum_{n=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{(2n-2r)!x^{n-2r}}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!} \qquad (1)$$

ومن نظرية ذات الحدين، يكون لدينا

$$(x^2-1)^n=\sum_{r=0}^{n}{}^nC_r(x^2)^{n-r}(-1)^r=\sum_{r=0}^{n}{}^nC_r(-1)^r x^{2n-2r} \qquad (2)$$

ولكن

$$\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^2}(x^2-1)^n=\frac{1}{2^n n!}\sum_{r=0}^{n}{}^nC_r(-1)^r x^{2n-2r} \qquad (3)$$

كذلك

$$\frac{d^n}{dx^n}x^m=0, m<n \quad , \quad \frac{d^n}{dx^n}x^m=\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, m\geq n$$

$$\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2r}=0 \quad , \qquad 2n-2r<n \quad \Rightarrow \quad r>\frac{n}{2} \qquad (5)$$

وباستخدام (5) فى (3) فإنه يجب إحلال $\sum_{r=0}^{n}$ بالتالى $\sum_{r=0}^{n/2}$ إذا كانت n زوجية، أو إحلالها بالتالى $\sum_{r=0}^{(n-1)/2}$ إذا كانت n فردية ، أى أن احلال $\sum_{r=0}^{n}$ بالتالى $\sum_{r=0}^{[n/2]}$. وعلى ذلك (3) تؤول إلى

$$\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)=\frac{1}{2^n n!}\sum_{r=0}^{[n/2]} {}^nC_r(-1)^r\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2r}$$

$$=\frac{1}{2^n n!}\sum_{r=0}^{[n/2]} {}^nC_r(-1)^r\frac{(2n-2r)!}{(2n-2r-n)!}x^{2n-2r-n} \quad \text{((4) من)}$$

$$=\sum_{r=0}^{[n/2]}\frac{1}{2^n n!}.\frac{n(-1)^r}{r!(n-r)!}.\frac{(2n-2r)!}{(n-2r)}x^{n-2r}$$

$$=P_n(x) \quad \text{باستخدام } (1)$$

مثال (١): استخدم صيغة رودريج لايجاد قيم P_0 ،P_1 ،P_2 ،P_3

الحل: تكون صيغة رودريج هى

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \qquad (1)$$

بوضع $n=0$ فى (1) ينتج

$$P_0(x)=\frac{1}{2^0 0!}(x^2-1)^0=1$$

بوضع $n=1$ فى (1) ينتج أن

$$P_1(x)=\frac{1}{2.1!}\frac{d}{dx}(x^2-1)=\frac{1}{2}(2x)=x$$

بوضع $n=2$ فى (1) ينتج أن

$$P_2(x)=\frac{1}{2^2.2!}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2=\frac{1}{8}\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(x^2-1)^2\right)$$

$$=\frac{1}{8}\frac{d}{dx}(2(x^2-1).2x=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^3-x)=\frac{1}{3}(3x^2-1)$$

بوضع $n=3$ فى (1) نحصل على

$$P_3(x)=\frac{1}{2^3.3!}\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3$$

$$=\frac{1}{48}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d}{dx}(x^2-1)^3\right)=\frac{1}{48}\frac{d^2}{dx^2}(3(x^2-1)^2.2x)$$

$$=\frac{1}{8}\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(x^2-1)^2x\right)=\frac{1}{8}\frac{d}{dx}[(x^2-1)^2+x.2(x^2-1).2x]$$

$$=\frac{1}{8}\frac{d}{dx}\left(5x^4-6x^2+1\right)=\frac{1}{8}(20x^3-12x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

مثال (٢): اثبت أن

(i) $\int_{-1}^{1} P_n(x)dx=2, \qquad n=0$ إذا كانت

(ii) $\int_{-1}^{1} P_n(x)dx=2, \qquad n\geq 1$ إذا كانت

الحل: (i) عندما $n=0$ فإن $P_n(x)=P_0(x)=1$ وعلى ذلك

$$\int_{-1}^{1} P_0(x)dx=\int_{-1}^{1} dx=2$$

(ii) $\int_{-1}^{1} P_n(x)dx=\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} D^n(x^2-1)^n dx, \quad D^n=d^n/dx^n$

$$=\frac{1}{2^n n!}[D^{n-1}(x^2-1)^n]_{-1}^{1}=\frac{1}{2^n n!}[D^{n-1}\{(x-1)^n(x+1)^n\}]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{2^n n!}[D^{n-1}(x-1)^n(x+1)^n+\overset{n-1}{C_1}CD^{n-2}(x-1)^n D(x+1)^n+\dots$$

$$+\dots+(x-1)^n D^{n-1}(x+1)^n]_{-1}^{1}$$ (ذلك باستخدام نظرية ليبنز)

$$=\frac{1}{2^n n!}[n!(x-1)(x+1)^n+\dots+n!(x+1)(x-1)^n]_{-1}^{1}=0$$

حيث

$$D^n(ax+b)^m=a^n\frac{m!}{(m-n)!}(ax+b)^{m-n}]$$

مثال (٣): استنتج من صيغة رودريج

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n f^{(n)}(x)dx$$

الحل: باستخدام صيغة رودريج نجد أن

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f(x)D^n(x^2-1)^n,$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\left[\left\{f(x)D^{n-1}(x^2-1)^n\right\}_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f'(x)D^{n-1}(x^2-1)^n dx\right]$$

(تكامل بالتجزئ)

$$, = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f'(x)D^{n-1}(x^2-1)^n dx$$ (باستخدام نظرية ليبتز)

$$= \frac{(-1)}{2^n n!}\left[\left\{f'(x)D^{n-2}(x^2-1)^n\right\}_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f''(x)D^{n-2}(x^2-1)^n dx\right]$$

(بالتكامل بالتجزئ)

$$= \frac{(-1)^2}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f''(x)D^{n-2}(x^2-1)^n dx$$

بالتكامل مرة أخرى نحصل على

$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f''(x)D^{n-2}(x^2-1)^n dx$$

وبتكرار ذلك

$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n f^{(n)}(x)dx$$

٨-٢٤ مفكوك دالة فى كثيرة حدود ليجندر:

نظرية (١): (بدون برهان)

إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود من درجة n فإن

$$f(x)=\sum_{r=0}^{n} C_r p_r(x) \qquad \text{(i)}$$

حيث

$$C_r=\left(r+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(x)p_r(x)dx \qquad \text{(ii)}$$

مثال (١): فك $f(x)=x^2$ فى صورة $\sum C_r p_r(x)$ أو أوجد متسلسلة كثيرة حدود ليجندر للدالة x^2.

الحل: حيث أن x^2 من درجة 2 فإن

$$x^2=\sum_{r=0}^{2} C_r P_r(x)=C_0P_0+C_1P_1+C_2P_2$$

$$C_r=\left(r+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} x^2 P_r(x)dx$$

ولكن

$$P_0=1,\quad P_1=x,\quad P_2=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$C_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2dx=\frac{1}{3},\quad C_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^3dx=0$$

$$C_2=\frac{1}{2}.\frac{5}{2}\int_{-1}^{1} x^2(3x^2-1)dx=\frac{5}{4}\left[3.\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$$

وعلى ذلك

$$x^2=\frac{1}{3}P_0(x)+\frac{2}{3}P_2(x)$$

مثال (٢): فك الدالة $f(x)$ فى الصورة $\sum_{r=0}^{\infty} C_r P_r(x)$ حيث

$$f(x)=\begin{cases}0 & -1<x<0\\ 1 & 0\le x<1\end{cases} \qquad (1)$$

الحل: ليكن

$$f(x)=\sum_{r=0}^{\infty} C_r P(x)$$

حيث

$$C_r=\left(r+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(x)P_r(x)dx$$

$$=\frac{2r+1}{2}\left(\int_{-1}^{0} f(x)P_r(x)dx+\int_{-1}^{1} f(x)P_r(x)dx\right)$$

$$C_r=\left(\frac{2r+1}{2}\right)\int_{0}^{1} P_r(x)dx \qquad \text{(من (1))}$$

وعلى ذلك يكون لدينا

$$C_0=\frac{1}{2}\int_0^1 P_0dx=\frac{1}{2}\int_0^1 1dx=\frac{1}{2}$$

$$C_1=\frac{3}{2}\int_0^1 P_1dx=\frac{3}{2}\int_0^1 xdx=\frac{3}{4}$$

$$C_2=\frac{5}{2}\int_0^1 P_2(x)dx=\frac{5}{2}\int_0^1 \frac{3x^2-1}{2}dx=0$$

$$C_3=\frac{7}{2}\int_0^1 P_3(x)dx=\frac{7}{2}\int_0^1 \frac{5x^3-3x}{2}dx=\frac{7}{16}$$

وعلى ذلك

$$f(x)=\frac{1}{2}P_0(x)+\frac{3}{4}P_1(x)-\frac{7}{16}P_0(x)+....$$

نظرية (٢): إذا كان z حلا لمعادلة ليجندر التفاضلية

$$(1-x^2)y''-2xy'+(n)(n+1)y=0$$

فإن $(1-x^2)^{m/2}d^m z/dx^m$ تكون حلا للمعادلة التفاضلية

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}y=0 \qquad \text{(A)}$$

تسمى المعادلة (A) بمعادلة ليجندر المصاحبة (associated).

وبرهان النظرية مباشر.

تمارين

١- اثبت أن $x^2 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_2(x)$

٢- اثبت أن

(i) $P_{2m+1}(0) = 0$, (ii) $P_{2m}(0) = (-1)\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$

٣- اثبت أن $(1-2xz+z^2)^{-1/2}$ حلا المعادلة التفاضلية

$$z\frac{\partial^2(zv)}{\partial^2 z} + \frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{dv}{dx}\right) = 0$$

٤- اثبت أن

(i) $\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)dx = 2n/4n^2 - 1$ (ii) $\int_{-1}^{1} (P_n')^2 dx = n(n+1)$

٥- استخدم صيغة رودريج لاثبات أن $\int_{-1}^{1} x^4 P_6(x)dx = 0$

٦- اوجد مفكوك

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & 0 < x \le 1 \\ 0 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

فى متسلسلة على الصورة $\sum_{0}^{\infty} C_r P_r(x)$

٧- اثبت أن

(i) $\int_{-1}^{1} xP_n^2(x)dx = 0$, (ii) $\int_{-1}^{1} x^2 P_0(x)dx = 0$

(iii) $\int_{-1}^{1} x^n P_n(x)dx = \Gamma(1/2)\Gamma(n+1)/2^n\Gamma(n+3/2)$,

(iv) $\int_{-1}^{1} x^2 P_0(x) dx = 0$

٨- اثبت أن

(i) $\dfrac{1-z^2}{(1-2xz^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) z^n P_n$,

(ii) $\int_{0}^{\pi} P_n(\cos\theta)\cos n\theta d\theta = \dfrac{1.32.5....(2n-1)}{2.4.6....(2n)}\pi = B\left(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

٩- إذا كان $P_n(x)$ كثيرة حدود ليجندر من درجة n، α حيث $P_n(\alpha)=0$ اثبت أن اشارتى $P_{n-1}(\alpha)$، $P_{n+1}(\alpha)$ مختلفتين

١٠- اثبت أن

$$P'_{n+1} + P'_n = P_0 + 3P_1 + ... + (2n+1)P_n$$

١١- اثبت أن

(i) $(2n+1)(x^2-1)P'_n = n(n+1)(P_{n+1} - P_{n-1})$

(ii) $\int_{-1}^{1} (x^2-1)P_{n+1}P'_n dx = 2n(n+1)/(2n+1)(2n+3)$

(iii) $\int_{-1}^{1} x^2 P_{n+1}P_{n+1} dx = 2n(n+1)/(2n-1)(2n+1)(2n+3)$

(iv) $\int_{-1}^{1} x^2 P_{n+1}(x) P_{n+1}(x) dx = \dfrac{n(n+1)}{(4n^2-1)(2n-3)}$

إذا كان

$$xP'_n = np_n + (2n-3)p_{n-2} + (2n-7)p_{n-4} + ...$$

اثبت أن

a) $\int_{-1}^{1} xP_n P'_n dx = 2n/(2n+1)$

b) $\int_{-1}^{1} xP_n P_m' dx = 0$

١٢- إذا كان $m > n-1$ ، n عدد صحيح موجب اثبت ان

$$\int_{-1}^{1} x^n P_m(x) dx = \frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+2)}{(m+n+1)(m+n-1)...(m-n+3)}$$

١٣- اثبت أن :

(i) $P_n(0) = 0$ إذا كانت n فردية

(ii) $P_n(0) = \dfrac{(-1)^{n/2} n!}{2^n \{(n/2)!\}^2}$ إذا كانت n زوجية

١٤- اثبت أن

$$(2n+1)(x^2-1)P_n' = n(n+1)(P_{n+1} - P_{n-1})$$

الباب الخامس والعشرون

دوال بسل

Bessel Function

٢٥-١ مقدمة: تسمى المعادلة ا التى على الصورة

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)=0 \qquad (1)$$

أو

$$y''+\left(\frac{1}{x}\right)y'+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0$$

بمعادلة بسل التفاضلية من رتبة n. n ثابت غير سالب.

والآن نوجد حل هذه المعادلة بإستخدام طريقة فروبينوس. بافتراض أن حل المعادلة (1) على الصورة

$$y=\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{k+m}\ , \quad C_0\neq 0$$

وبالتعويض فى المعادلة (1) نحصل على حلين

$$y=ax^n\left\{1-\frac{x^2}{4(1+n)}+\frac{x^4}{4.8(1+n)(2+n)}-.....\right\} \qquad (2)$$

$$y=bx^{-n}\left\{1-\frac{x^2}{4(1-n)}+\frac{x^4}{4.8(1-n)(2-n)}-.....\right\} \qquad (3)$$

فإذا وضعنا فى الاعتبار $a=\dfrac{1}{2^n\Gamma(n+1)}$ فى (2) نحصل على الحل الأول ويسمى بدالة بسل من النوع الأول من رتبة n ويرمز له بالرمز $J_n(x)$ أى

$$J_n(x)=\frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left[1-\frac{x^2}{4(n+1)}+\frac{x^4}{4.8(n+1)(n+2)}-....\right] \qquad (4)$$

أو

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n}$$

وإذا وضعنا $b = \dfrac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$ فى (3) نحصل على الحل الثانى والذى يرمز له بالرمز $J_{-n}(x)$

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(-n+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n} \qquad (5)$$

ليكن n عدد كسرى فإننا نعرف أن $\Gamma(m)=\infty$ إذا كان $m=0$ أو عدد صحيح سالب وبالتالى فى غير ذلك فإن $\Gamma(m)$ تكون محدودة. وحيث أن n ليست عددا صحيحا، r دائما عدد صحيح فإن العامل $\Gamma(-n+r+1)$ فى (5) يكون دائما منتهياً (finite) وغير صفرى. إذا كان $2r<n$ ، فإن (5) تبين أن $J_{-n}(x)$ تحتوى قوى سالبة للمتغير x دائماً ومن الناحية الأخرى فإن (4) لاتحتوى قوى سالبة للمتغير x على الاطلاق. وبالتالى نجد عندما $x=0$ تكون $J_n(x)$ منتهية بينما $J_{-n}(x)$ غير منتهية (لانهائية) وبالتالى لايمكن إعتباره مضاعفاً للآخر. ومن هذا نرى أن $J_n(x)$ ، $J_{-n}(x)$ هما حلين مستقلين لمعادلة (1) عندما يكون n ليس عددا صحيحاً. وبالتالى يكون الحل العام لمعادلة بسل (1) عندما تكون n ليس عددا صحيحاً هو

$$y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)$$

حيث A، B ثابتان إختياريان.

٢-٢٥ دالة بسل من النوع الأول والرتبة n

تعريف: تعرف دالة بسل من النوع الأول والرتبة n على الصورة

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n} \qquad (1)$$

حيث n عدد غير صحيح وغير سالب.

ملحوظة (١): عندما يكون n عدداً صحيحاً فإن $\Gamma(n+r+1)=(n+r)!$
وبالتالى يمكن كتابة (1) على الصورة

$$J_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!(n+r)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n} \qquad (2)$$

بوضع 0، 1 بدلا من n فى (2) نحصل على دالتى بسل من الرتبة صفر، والأولى على الصورة

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2.4^2}-\frac{x^6}{2^2.4^2.6^2}+....$$

$$J_1(x)=\frac{x}{2}+\frac{x^3}{2^2.3}+\frac{x^5}{2^2.4^2.6}+....$$

ملحوظة (٢): يكون لدينا العلاقات التالية لدالتى جاما وبيتا

(i) $\Gamma(n)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{n-1}dx,\quad n>0$, (ii) $\Gamma(n)=2\int_0^{\infty}e^{-x^2}x^{2n-1}dx$, ,

(iii) $\Gamma(1)=1$, (iv) $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$,

(v) $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n),\quad n>0$

(vii) $\beta(m,n)=\beta(n,m)$, (viii) $\Gamma(n)\Gamma(1-n)=\pi/\sin n\pi$

(x) $\beta(m,n)=\infty$, إذا كانت $m=0$ أو عدد سالب

(xi) $\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx=\beta(n,m),\quad m>0,n>0$

(xii) $\beta(m,n)=\dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$, (xiii) $\Gamma(2n)=\dfrac{2^{2n-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$

(xiv) $\beta(m,n)=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2m-1}\theta\sin^{2n-1}\theta d\theta$

٢٥-٣ العلاقة بين $J_n(x), J_{-n}(x)$ ، n عدد صحيح موجب:

نظرية (١): إذا كان n عددا صحيحا فإن

$$\text{(i)} \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

سواء كان n موجبا أو سالبا

البرهان: سنثبت النظرية فى حالتين

(i) n عدد صحيح موجب: ليكن

$$J_{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(-n+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n} \qquad (1)$$

حيث n عدد صحيح موجيب فيكون $\Gamma(-n+r+1)$ لانهائية (أى $\frac{1}{\Gamma(-n+r-1)}$ تكون صفرا) عندما $r = 0,1,2,\dots,(n-1)$. وبأخذ ذلك فى الاعتبار فإننا أن الجمع على r فى (1) يجب أن يؤخذ من n إلى ∞. فيكون لدينا

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=n}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(-n+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n} \qquad (2)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{1}{(m+n)!\Gamma(m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(m+n)-n}$$

(أى تغيير الجمع إلى $m = r-n$ وبالتالى $r = m+n$ أى عندما $r = n$ فإن $m = 0$ ، عندما $r = \infty$ فإن $m = \infty$)

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (-1)^n \frac{1}{\Gamma(m+n+1)m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$$

$$= (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{\Gamma(r+n+1)r!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n}$$

(بتغير متغير الجمع من m إلى r)

(من تعريف J_n). $=(-1)^n J_n(x)$

وبالتالى عندما $n>0$ يكون

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x) \qquad (3)$$

(ii) **عندما** $n<0$: ليكن p عدد صحيح موجب بحيث $n=-p$ وحيث أن $p>0$، ومن الحالة الأولى يكون لدينا

$$J_{-p}(x)=(-1)^p J_p(x) \quad \Rightarrow \quad J_p(x)=(-1)^{-p} J_{-p}(x)$$

ولكن $p=-n$ وبالتالى تؤول النتيجة السابقة إلى

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x) \qquad (4)$$

وهى تماما مثل (3). وبالتالى تتحقق النتيجة لأى عدد صحيح n.

ملحوظة: عندما تكون n عدداً صحيحاً فإن $J_{-n}(x)$ تكون غير مستقلة عن $J_n(x)$ لأن $J_{-n}(x)$ تكون مضاعفاً للدالة $J_n(x)$ كما بينا أعلاه. وبالتالى $y=AJ_n(x)+BJ_{-n}(x)$ ليس حلا عاما لمعادلة بسل عندما يكون n عدداً صحيحاً.

نظرية (٢): يكون حلا معادلة بسل المستقلين هما $J_n(x)$

$$Y_n(x)=\frac{\cos n\pi\, J_n(x)-J_{-n}(x)}{\sin n\pi} \qquad (5)$$

لجميع قيم n.

البرهان:

(i) n **ليست عدداً صحيحاً:** عندما تكون n ليست عدداً صحيحا فإن $\sin \pi x \neq 0$ وبالتالى (5) تبين أن Y_n هى تركيب خطى بين J_n و J_{-n}. ولكن نعرف أن J_n و J_{-n} يكون حلين مستقلين عندما تكون n ليست عدداً صحيحاً. وبالتالى فإن J_n مع التركيب الخطى لكل من J_n و J_{-n} يكونا حلين مستقلين. وبالتالى نجد أن J_n و Y_n حلين مستقلين لمعادلة بسل.

(ii) n عدد صحيح : يكون لدينا

$$\cos n\pi = (-1)^n, \quad \sin n\pi = 0, \quad J_{-n} = (-1)^n J_n$$

وباستخدام هذه القيم فى (5) نجد أن Y_n لها الصورة $\frac{0}{0}$ وبالتالى تكون $Y_n(x)$ غير معينة. ولكى تكون للدالة Y_n معنى، فإننا نعرفها كالتالى

$$Y_n(x) = \lim_{\nu\to n} Y_n(x) = \lim_{\nu\to n} \frac{\cos \nu\pi J_n - J_{-\nu}}{\sin \nu\pi} \tag{6}$$

$$= \frac{(\partial/\partial \nu)\{\cos \nu\pi J_n(x) - J_{-\nu}(x)\}_{\nu=n}}{\frac{\partial}{\partial \nu}(\cos \nu\pi)_{\nu=n}}$$

$$= \frac{-\pi \sin \nu\pi J_\nu(x) + \cos \nu\pi \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x)]_{\nu=n}}{[\pi \cos \nu\pi]_{\nu=n}}$$

$$= \frac{\cos n\pi \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x)\right]_{\nu=n} - \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x)\right]_{\nu=n}}{\pi \cos n\pi}$$

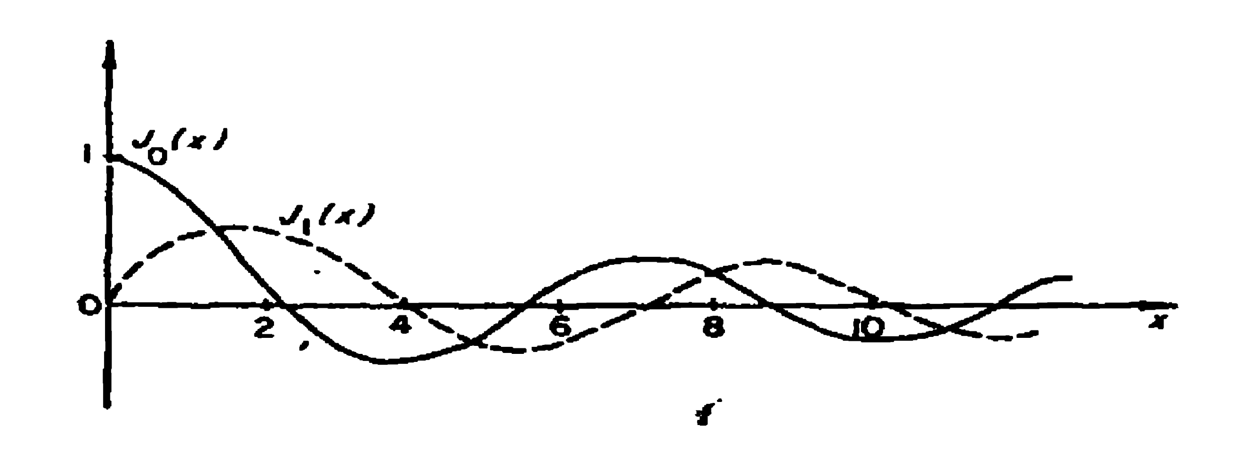
$$= \frac{(-1)^n \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x)\right]_{\nu=n} - (-1)^{2b} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x)\right]_{\nu=n}}{\pi(-1)^n}$$

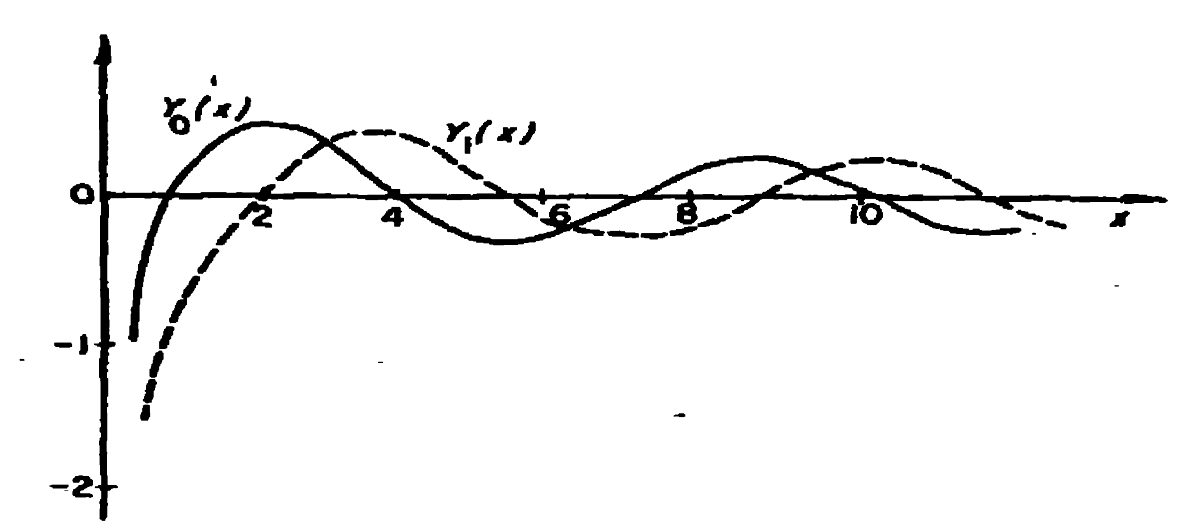
$$= \frac{1}{\pi}\left[J_\nu(x) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x)\right]_{\nu=n} . \tag{7}$$

ومن السهولة اثبات ما يلى حول $Y_n(x)$ المعطاه فى (6)

(i) Y_n حل لمعادلة بسل (ii) Y_n حل مستقل عن $J_n(x)$.

ملحوظة: اشكال دوال بسل كما هى مبينة بالشكل





مثال (١): اثبت أن

$$\text{(i)}\quad J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \quad , \quad \text{(ii)}\quad J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

$$\text{(iii)}\quad [J_{1/2}(x)]^2+[J_{-1/2}(x)]^2=\frac{2}{\pi x}$$

الحل: من تعريف J_n يكون لدينا

$$\text{(i)}\quad J_{-1/2}=\frac{x^{-1/2}}{2^{-1/2}\Gamma(1/2)}\left[1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\dots\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\ ,\quad \Gamma(1/2)\sqrt{\pi}$$

$$\text{(ii)}\quad J_{1/2}=\frac{x^{1/2}}{2^{1/2}\Gamma(1/2)}\left[1-\frac{x^2}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4.5}\dots\right]$$

$$=\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{1}{(1/2)\Gamma(1/2)}\cdot\frac{1}{x}\left[x\cdot\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\dots\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[x-\frac{x^3}{31}+\frac{x^5}{5!}+\dots\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

(iii) بتربيع (i)، (ii) والجمع نحصل على

$$J_{1/2}^2 + J_{-1/2}^2 = \frac{2}{\pi x}(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2/\pi x$$

مثال (٢): اثبت أن

$$\lim_{z\to 0} = \frac{J_n(z)}{z^n} = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)^n} \ , \quad n > -1$$

الحل: من تعريف $J_n(x)$ يكون لدينا

$$\lim_{z\to 0} = \frac{J_n(z)}{z^n} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)} \left[1 - \frac{z^2}{4(n+1)} + \frac{z^4}{4.8.(n+1)(n+2)} - \ldots\right]$$

$$= 1/2^n \Gamma(n+1)$$

مثال (٣): اثبت أنه إذا كان $n > m - 1$ فإن

$$J_n(x) = \frac{2(x/2)^{n-m}}{\Gamma(n-m)} \int_0^1 (1-t^2)^{n-m-1} t^{m+1} J_m(xt)\,dt \ .$$

الحل: ليكن

$$I = \int_0^1 (1-t^2)^{n-m-1} t^{m+1} J_m(xt)\,dt$$

باستخدام تعريف $J_m(xt)$ يكون لدينا

$$I = \int_0^1 (1-t^2)^{n-m-1} t^{m+1} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(m+r+1)} \left(\frac{xt}{2}\right)^{2r+m} dt$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+m}}{r!\Gamma(m+r+1)} \int_0^1 (1-t^2)^{n-m-1} t^{2m+2r+1}\,dt$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+m}}{r!\Gamma(m+r+1)} \int_0^1 (1-t^2)^{n-m-1} (t^2)^{m+r}\,dt$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+m}}{r!\Gamma(m+r+1)} \cdot \frac{1}{2}\int_0^1 (1-z)^{n-m-1} z^{(m+r+1)-1} dz$$

(بوضع $t^2 = z$ أى $ztdt = dz$)

$$=\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+m}}{r!\Gamma(m+r+1)} \cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n-m)\Gamma(m+r+1)}{\Gamma(n+r+1)}$$

بشرط $n-m>0$ ، $m+r+1>-1$ أى $n>m>-1$

$$\left[\because \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1} z^{\beta-1} dz = \beta(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \alpha>0, \beta>0\right]$$

$$=\frac{\Gamma(n-m)}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{m-n} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

$$.=\frac{\Gamma(n-m)}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{m-n} J_n(x)$$ (من تعريف $J_n(x)$)

وعلى ذلك يكون

$$J_n(x) = 2\frac{(x/2)^{m-n}}{\Gamma(n-m)} I$$

٢٥-٤ الصيغ التكرارية لدالة بسل:

i) $\frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x)$

ii) $\frac{d}{dx}(x^{-n} J_n(x)) = -x^{-n} J_{n+1}(x)$

iii) $J_n'(x) = J_{n-1} - \frac{n}{x} J_n$, أو $xJ_n' = -nJ_n + xJ_{n-1}$

iv) $J_n'(x) = \frac{n}{x} J_n - J_{n+1}$, أو $xJ_n' = nJ_n - xJ_{n+1}$

v) $J_n'(x)=\frac{1}{2}\{J_{n-1}-J_{n+1}\}$ أو $J_{n-1}-J_{n+1}=2J_n'$

vi) $J_{n-1}+J_{n+1}=\frac{2n}{x}J_n$ أو $2J_n=\frac{x}{n}(J_{n-1}+J_{n+1})$

والآن نثبت هذه العلاقات

(i) $$\frac{d}{dx}\{x^nJ_n(x)\}=\frac{d}{dx}\left\{x^n\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n}\right\}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\Gamma(n+r+1)}\cdot\frac{1}{2^{2r+n}}\cdot\frac{d}{dx}(x^{2r+2n})$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(2r+2n)x^{2r+2n-1}}{r!\Gamma(n+r+1)2^{2r+n}}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r2(r+n)x^n}{r!(n+r)\Gamma(n+r)}\cdot\frac{x^{2r+n-1}}{2^{2r+n}}$$

$$=x^n\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\Gamma(n-1+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n-1}=x^nJ_{n-1}$$

(ii) $$\frac{d}{dx}\{x^{-n}J_n(x)\}=\frac{d}{dx}\left\{x^{-n}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n}\right\}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\Gamma(n+r+1)}\cdot\frac{1}{2^{2r+n}}\cdot\frac{d}{dx}(x^{2r})$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r2rx^{2r-1}}{r(r-1)!\Gamma(n+r+1)2^{2r+n}}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r2x^{2r-1}}{(r-1)!\Gamma(n+r+1)}\cdot\frac{1}{2^{2r+n-1}}$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^rx^{2r-1}}{(r-1)!\Gamma(n+r+1)}\cdot\frac{1}{2^{2r+n-1}}$$

[حيث $(r-1)!=\infty$ عندما $r=0$ وذلك لتلاشى الحد المناظر $r=0$]

$$=\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}x^{2m+2-1}}{m!\Gamma(n+m+2)}\cdot\frac{x^n x^{-n}}{2^{2m+2+n-1}}$$

[وذلك بتغير متغير التجميع إلى $m=r-1$ وبالتالى $r=m+1$. فإن $m=0$ عندما $r=1$، $m=\infty$ عندما $r=\infty$]

$$=-x^{-n}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(n+m+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1+2m} = -x^{-n}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(n+1+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1+2r}$$

$$=-x^{-n}J_{n+1}(x).$$

(iii) من العلاقة التكرارية (i)

$$nx^{n-1}J_n+x^nJ_n'=x^nJ_{n-1}$$

بالقسمة على x^{n-1} نحصل على

$$nJ_n+xJ_n'=xJ_{n-1} \quad\Rightarrow\quad \frac{n}{x}J_n+J_n'=J_{n-1}$$

(iv) نحصل عليها من العلاقة التكرارية (ii) بنفس الطريقة

(v) من العلاقتين (iii) ، (iv) يكون لدينا

$$J_n'=J_{n-1}-\frac{n}{x}J_n \qquad (1)$$

$$J_n'=\frac{n}{x}J_n-J_{n+1} \qquad (2)$$

بالجمع نحصل على

$$J_n'=\frac{1}{2}\{J_{n-1}-J_{n+1}\}$$

(vi) من العلاقتين (iii)، (iv) كما فى (v) وبطرح (2) من (1) نحصل على

$$J_{n-1}+J_{n+1}=\frac{2n}{x}J_n$$

مثال (١): اثبت أن

$$\int_0^x t\{J_n^2(t)dt\}=\frac{1}{2}x^2\{J_n^2(x)-J_{n-1}(x)J_{n+1}(x)\}$$

الحل:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{t^2}{2}\{J_n^2(t)-J_{n-1}(t)J_{n+1}(t)\right]$$

$$=t\{J_n^2-J_{n-1}+J_{n+1}\}+\frac{1}{2}t^2\{2J_nJ_n'-J_{n-1}'J_{n+1}-J_{n-1}J_{n+1}'\}$$

$$=t\{J_n^2(t)-J_{n-1}(t)J_{n+1}(t)\}+\frac{1}{2}t^2\{2J_n.\frac{1}{2}\{J_{n-1}-J_{n+1}\}-$$

$$-J_{n+1}(t)\left\{\frac{n-1}{t}J_{n-1}-J_n\right\}-J_{n-1}\left\{J_n-\frac{n+1}{t}J_{n+1}\right\}$$

[وذلك باستخدام العلاقات التكرارية (iii)، (ii)، (v)] وبعد التبسيط نحصل على

$$=tJ_n^2(t)$$

وبتكامل هذه المعادلة بالنسبة إلى x من 0 إلى x نحصل على

$$\int_0^x tJ_n^2(t)dt=\left[\frac{t^2}{2}\{J_n^2(t)-J_{n-1}(t)J_{n+1}\right]$$

$$=\frac{x^2}{2}\{J_n^2(x)-J_{n-1}(x)J_{n+1}(x)\}$$

[حيث $J_n(0)=J_{n+1}(0)=J_{n-1}(0)=0$]

مثال (٢): اثبت أن

$$\text{(i)}\quad J_{3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right)$$

$$\text{(ii)}\quad J_{-3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{-\cos x}{x}-\sin x\right)$$

الحل: نعرف أن

$$J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,,\quad J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

من العلاقة التكرارية (iv) لدينا

$$J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x) \tag{1}$$

بوضع $n=-1/2$ نحصل على

$$J_{-3/2}(x)+J_{1/2}(x)=-\left(\frac{2}{2x}\right)J_{-1/2}(x)$$

$$J_{-3/2}(x)=-J_{1/2}(x)+\frac{1}{x}J_{-1/2}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{-\frac{\cos x}{x}-\sin x\right\}$$

بوضع $n=1/2$ فى (1) نحصل على

$$J_{-1/2}(x)+J_{3/2}(x)=\frac{2}{2x}J_{1/2}(x)$$

$$J_{3/2}(x)=-J_{-1/2}(x)+\frac{1}{x}J_{1/2}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\frac{\sin x}{x}-\cos x\right\}$$

مثال (٣): اثبت أن

$$\frac{d}{dx}(J_n^2+J_{n+1}^2)=2\left(\frac{n}{x}J_n^2-\frac{n+1}{x}J_{n+1}^2\right)$$

الحل: من العلاقتين التكراريتين (iii) ، (iv) يكون لدينا

$$J_n' = -\frac{n}{x}J_n + J_{n-1} \qquad (1)$$

$$J_n' = \frac{n}{x}J_n - J_{n+1} \qquad (2)$$

بوضع $n+1$ بدلا من n في (1) يكون لدينا

$$J_{n+1}' = -\frac{n+1}{x}J_{n+1} + J_n \qquad (3)$$

والآن

$$\frac{d}{dx}(J_n^2+J_{n+1}^2)=2J_nJ_n'+2J_{n+1}J_{n+1}'$$

$$=2J_n\left(\frac{n}{x}J_n-J_{n+1}\right)+2J_{n+1}\left(-\frac{n+1}{x}J_{n+1}+J_n\right)$$

$$=2\left(\frac{n}{x}J_n^2-\frac{n+1}{x}J_{n+1}^2\right)$$

مثال (٤): اثبت أن

(i) $J_0^2+2(J_1^2+J_2^2+J_3^2+\ldots)=1$

(ii) $|J_0(x)|\le 1$, (iii) $|J_0(x)|\le 2^{-1/2}, n\ge 1$

الحل: من المثال السابق

$$\frac{d}{dx}\left(J_n^2+J_{n+1}^2\right)=2\left(\frac{n}{x}J_n^2-\frac{n+1}{x}J_{n+1}^2\right) \qquad (1)$$

بوضع $n=0,1,2,3,\ldots$ في (1) نحصل على

$$\frac{d}{dx}\left(J_0^2+J_1^2\right)=2\left(0-\frac{1}{x}J_1^2\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(J_1^2+J_2^2\right)=2\left(\frac{1}{x}J_1^2-\frac{2}{x}J_2^2\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(J_2^2+J_3^2\right)=2\left(\frac{2}{x}J_n^2-\frac{3}{n}J_3^2\right)$$

بجمع هذه العلاقات مع ملاحظة أن $J_n \to 0$ عندما $n \to \infty$ فنحصل على

$$\frac{d}{dx}\left[J_0^2+2\left(J_1^2+J_2^2+...\right)\right]=0$$

وبتكامل (2) نحصل على

$$J_0^2(x)+2\left[J_1^2(x)+J_2^2(x)+...\right]=C \qquad (2)$$

بوضع 0 بدلا من x فى (2) مع ملاحظة أن $J_0(0)=1$، $J_n(0)=0$، $n\geq 1$ فنحصل على

$$1+2(0+0...0)=C \quad \Rightarrow \quad C=1$$

فإن (2) تؤول إلى

$$J_0^2+2(J_1^2+J_2^2+...)=1 \qquad (3)$$

(ii) من (3) نحصل على

$$J_0^2=1-2(J_1^2+J_2^2+...+J_n^2+...) \qquad (4)$$

وحيث أن كل من $J_1^2,J_2^2,J_n^2,...$ كلها موجبة أو صفرا فإننا من (4) نحصل

$$J_0^2\leq 1 \quad \Rightarrow \quad \left|J_0(x)\right|\leq 1$$

(iii) بحل (4) بالنسبة إلى J_2^2 نحصل على

$$J_n^2=\frac{1}{2}[(1-J_0^2)-(J_1^2+J_2^2+...+J_{n-1}^2+J_{n+1}^2+...) \qquad (5)$$

وحيث أن $J_0^2, J_1^2, J_2^2, ...$ كل منها موجبة أو صفرا وعلى ذلك

$$J_n^2 \le 1/2 \quad \text{أو} \quad |J_n(x)| \le 2^{-1/2}, n \ge 1$$

مثال (٥): اثبت أن

$$\text{(i)} \quad \frac{d}{dx}(xJ_nJ_{n+1}) = x(J_n^2 - J_{n+1}^2)$$

$$\text{(ii)} \quad x = 2J_0J_1 + 6J_1J_2 + ... + 2(2n+1)J_nJ_{n+1} + ...$$

الحل:

$$\text{(i)} \quad \frac{d}{dx}(xJ_nJ_{n+1}) = J_nJ_{n+1} + x(J_n'J_{n+1} + J_nJ_{n+1}')$$

$$= J_nJ_{n+1} + J_{n+1}(xJ_n') + J_nxJ_{n+1}' \qquad (1)$$

من العلاقتين التكراريتين (iii)، (iv) يكون لدينا

$$xJ_n' = nJ_n - xJ_{n+1} \qquad (2)$$

$$xJ_n' = -nJ_n + xJ_{n-1} \qquad (3)$$

بوضع $(n+1)$ بدلا من n فى (3) نحصل على

$$xJ_{n+1}' = -(n+1)J_{n+1} + xJ_n \qquad (4)$$

بوضع قيم xJ_n' ، xJ_{n+1}' من (2)، (4) فى (1) نحصل على

$$\frac{d}{dx}(x_nJ_nJ_{n+1}) = J_nJ_{n+1} + J_{n+1}(nJ_n - xJ_{n+1}) + J_n[-(n+1)J_{n+1} + xJ_n]$$

$$= x(J_n^2 - J_{n+1}^2) \qquad \text{(تتلاشى الحدود الأخرى)}$$

(ii) (من الجزء (i)) يكون لدينا

$$\frac{d}{dx}(x\ J_nJ_{n+1}) = x(J_n^2 - J_{n+1}^2)$$

بوضع $0, 1, 2, ...$ بدلا من n نحصل على

$$\frac{d}{dx}(xJ_0J_1) = x(J_0^2 - J_1^2) \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dx}(xJ_1J_2) = x(J_1^2 - J_2^2) \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dx}(xJ_2J_3) = x(J_2^2 - J_3^2) \qquad (3)$$

بضرب (1)، (2)، (3) فى 1، 3، 5 على الترتيب والجمع نحصل على

$$\frac{d}{dx}[x(J_0J_1 + 3J_1J_2 + 5J_2J_3 + ...)]$$

$$= x[(J_0^2 - J_1^2) + 3(J_1^2 - J_2^2) + 5(J_2^2 - J_3^2) + ...$$

$$= x[J_0^2 + 2[J_1^2 + J_2^2 + ...] = x.1 = x$$

(من المثال السابق). وبالتكامل

$$x(J_0J_1 + 3J_1J_2 + 5J_2J_3 + ...] = \int xdx = \frac{1}{2}x^2 + c \qquad (4)$$

بوضع $x = 0$ فى (4) نجد أن $c = 0$ أى أن

$$2J_0J_1 + 6J_1J_2 + 10J_2J_3 + ... = x$$

مثال (٦): أثبت أن

(i) $J_0' = -J_1$, (ii) $J_2 - J_0 = 2J_0''$

(iii) $J_2 = J_0'' - \frac{1}{x}J_0'$, (iv) $J_2 + 3J_0' + 4J_0''' = 0$

الحل: (i) من العلاقة التكرارية (iv)

$$xJ_n' = nJ_n - xJ_{n+1} \qquad (1)$$

بوضع 0 بدلا من n فى (1) نجد أن

$$xJ_0' = -xJ_1 \qquad \rightarrow \qquad J_0' = -J_1$$

(ii) من العلاقة التكرارية (v) وهى

$$2J_0' = J_{n-1} - J_{n+1} \qquad (2)$$

باشتقاق (2) نحصل على

$$2J_n'' = J_{n-1}' - J_{n+1}' \qquad (3)$$

بوضع $n-1$ ، $n+1$ بدلا من n على الترتيب فى (2) نحصل على

$$2J_{n-1}' = J_{n-2} - J_n \qquad (4)$$

$$2J_{n+1}' = J_n - J_{n+2} \qquad (5)$$

بوضع قيم J_{n-1}' ، J_{n+1}' من (4) ، (5) فى (3) يكون لدينا

$$2J_n'' = \frac{1}{2}(J_{n-2} - J_n) - \frac{1}{2}(J_n - J_{n+2}) \quad ,$$

$$4J_n'' = J_{n-2} - 2J_n + J_{n+2} \qquad (6)$$

بوضع 0 بدلا من n فى (6) نحصل على

$$4J_0'' = J_{-2} - 2J_0 + J_2 = (-1)^2 J_n - 2J_0 + J_2 \,, \qquad (J_{-n} = (-)^n J_n)$$

$$4J_0'' = 2(J_2 - J_0) \quad \Rightarrow \quad 2J_0'' = J_2 - J_0$$

(iii) بوضع 1 بدلا من n فى (1) نحصل على

$$xJ_1' = J_1 - xJ_2 \qquad \text{أى} \qquad J_2 = x^{-1}J_1 - J_1' \qquad (7)$$

من الجزء (i) $\quad J_1' = -J_0'' \quad \Leftarrow \quad J_1 = -J_0'$

ومن (7) ينتج أن $\quad J_2 = x^{-1}(-J_0') + J_0'' = J_0'' - x^{-1}J_0'$

(iv) باشتقاق (6)

$$4J_n''' = J_{n-2}' - 2J_n' + J_{n+2}' \qquad (8)$$

بوضع $(n-2)$ ، $(n+2)$ بدلا من n فى (2) نحصل على

$$2J'_{n-2}=J_{n-3}-J_{n-1} \qquad (9)$$

$$2J'_{n+2}=J_{n+1}-J_{n+3} \qquad (10)$$

بوضع قيم J'_{n-2} ، J'_{n+2} ، J'_n فى (8) نحصل على

$$4J'''_n=\frac{1}{2}(J_{n-3}-J_{n-1})-(J_{n-1}-J_{n+1})+\frac{1}{2}(J_{n+1}-J_{n+3})$$

$$8J'''_n=J_{n-3}-3J_{n-1}+3J_{n+1}-J_{n+3} \qquad (11)$$

بوضع 0 بدلا من n فى (11) نحصل على

$$8J'''_0=J_{-3}-3J_{-1}+3J_1-J_3$$

$$=-2J_3+6J_1 \qquad , \qquad (\because J_{-n}=(-1)^n J_n$$

$$=-2J_3-6J'_0 \qquad , \qquad (\because J_1=J'_0)$$

أى أن

$$8J'''_0+2J_3+6J'_0=0 \qquad \Rightarrow \qquad J_3+3J'_0+4J'''_0=0$$

٢٥-٥ أمثلة تحتوى تكامل العلاقات التكرارية

مثال (١): اثبت أن

$$\int_0^x x^{n+1}J_n(x)dx=x^{n+1}J_{n+1}(x), \quad n>-1$$

الحل: من العلاقة التكرارية (i) نجد أن

$$\frac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\}=x^n J_{n-1}(x) \qquad (1)$$

بوضع $n+1$ بدلا من n نحصل على

$$\frac{d}{dx}\{x^{n+1}J_{n+1}(x)\}=x^{n+1}J_n(x) \qquad (2)$$

بتكامل (2) من 0 إلى x نحصل على

$$x^{n+1}J_{n+1}(x)]_0^x = \int_0^x x^{n+1}J_n(x)dx$$

أو

$$\int_0^x x^{n+1}J_n(x)dx = x^{n+1}J_{n+1}(x)$$

مثال (٢): اثبت أن

$$J_{n+1}(x) = x\int_0^1 J_n(xy)y^{n+1}dy$$

الحل: بوضع $t = xy \Leftarrow xdy = dt$ وعلى ذلك

$$R.H.S = x\int_0^x J_n(t),\left(\frac{t}{x}\right)^{n+1}\frac{dt}{x} = x^{-n-1}\int_0^x t^{n+1}J_n(t)dt$$

$$= x^{-n-1}\int_0^x x^{n+1}J_n x dx$$

$$= x^{-n-1}x^{n+1}J_{n+1}(x) \qquad \text{(من المثال السابق)}$$

$$= J_{n+1}(x) = L.H.S.$$

مثال (٣): اثبت أن

$$\text{(i)}\ \frac{d}{dx}\{xJ_1(x)\} = xJ_0(x)\quad , \quad \text{(ii)}\ \int_0^b xJ_0(ax)dx = \frac{b}{a}J_1(ab)$$

الحل: (i) من العلاقة التكرارية (i) يكون لدينا

$$\frac{d}{dx}\{x^nJ_n(x)\} = x^nJ_{n-1}(x) \qquad (1)$$

بوضع 1 بدلا من n نحصل على

$$\frac{d}{dx}\{xJ_1(x)\} = xJ_0(x)$$

(ii) بوضع $ax = t$ أى $adx = dt$ وعلى ذلك

$$\int_0^b xJ_0(ax)dx = \frac{1}{a^2}\int_0^{ab} tJ_0(t)dt$$

(من الجزء (i))
$$= \frac{1}{a^2}\int_0^{ab} \frac{d}{dt}(tJ_1(t))dt$$

حيث $J_1(0) = 0$
$$= \frac{1}{a^2}[tJ_1(t)]_0^{ab} = \frac{1}{a^2}[abJ_1(ab) - 0]$$

أى أن
$$= \frac{b}{a}J_1(ab)$$

مثال (٤): اثبت أن

$$\text{(i)} \quad \frac{d}{dx}J_0(x) = -J_1(x) \quad , \qquad \text{(ii)} \int_a^b J_0(x)J_1(x)dx = \frac{1}{2}[J_0^2(a) - J_0^2(b)]$$

الحل: (i) من العلاقة التكرارية (ii) يكون لدينا

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}J_n(x) = -x^n J_{n+1}(x) \qquad (1)$$

بوضع $n = 0$ فى (1) نجد أن

$$\frac{d}{dx}J_0(x) = -J_1(x) \qquad (2)$$

(ii) باستخدام (2) نجد أن

$$\int_a^b J_0(x)J_1(x)dx = -\int_a^b J_0(x)J_0'(x)dx = \left[\frac{J_0^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2}[J_0^2(a) - J_0^2(b)]$$

مثال (٥): اوجد $\int J_3(x)dx$ بدلالة J_1، J_0

الحل: من العلاقة التكرارية (ii)

$$x^{-n}J_{n+1} = \frac{d}{dx}\{x^{-n}J_n(x)\}$$

وبالتكامل

$$\int x^{-n}J_{n+1}dx=-x^{-n}J_n \qquad (1)$$

والآن

$$\int J_x(x)dx=\int x^2(x^{-2}J_3(x))dx=x^2(-x^{-2}J_2)-\int 2x(-x^{-2}J_2)dx$$

(بالتكامل التجزئ واستخدام (1) عندما $n=2$)

$$=-J_2+2(x^{-1}J_2)dx$$

$$=-J_2+2(-x^{-1}J_1)+c$$

$$\int J_3(x)dx=-J_2-2x^{-1}J_1+c \qquad (2)$$

ومن العلاقة التكرارية (vi)

$$\frac{2n}{x}J_n=J_{n-1}+J_{n+1} \qquad (3)$$

بوضع $n=1$ فى (3) فإن

$$J_2=2J_1/x-J_0 \qquad (4)$$

من (2)، (4) نجد أن

$$\int J_3dx=-\left(\frac{2J_1}{x}-J_0\right)-2x^{-1}J_2+c$$

$$=J_0-\frac{4J_1}{x}+c$$

مثال (٦): أوجد قيمة $\int x^3J_3(x)dx$

الحل: حيث أن

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}J_n)=-x^nJ_{n+1} \quad \Rightarrow \quad \int x^{-n}J_{n+1}dx=-x^{-n}J_n \qquad (1)$$

والآن

$$\int x^{-3}J_3(x)dx = \int x^5(x^{-2}J_3)dx$$

$$= x^5(-x^{-2}J_2) - \int 5x^4(-x^2J_2)dx$$

(بالتكامل التجزئ واستخدام (1) عندما $n=2$)

$$= -x^{-3}J_2 + 5\int x^2J_2dx$$

$$= -x^3J_2 + 5\int x^3x^{-1}J_2dx$$

$$= -x^3J_2 + 5\left[x^3(-x^{-1}J_1) - \int 3x^2(-x^{-1}J_1)dx\right]$$

(بالتكامل التجزئ واستخدام (1) عندما $n=1$)

$$= -x^3J_2 - 5x^2J_1 + 15\int xJ_1dx$$

$$= -x^3J_2 - 5x^2J_1 + 15\int x(-J_0')dx \ , \quad \because \ J_1 = -J_0'$$

$$= -x^3J_2 - 5x^2J_1 - 15\left[xJ_0 - \int 1J_0dx\right]$$

$$= -x^3J_2 - 5x^2J_1 - 15xJ_0 + 15x\int J_0dx.$$

مثال (٧): اثبت أن

$$\int x^{-1}J_4(x)dx = -x^{-1}J_3 - 2x^{-2}J_2 + c$$

الحل: بتكامل العلاقة التكرارية (2) نحصل على

$$\int x^{-n}J_{n+1}dx = -x^{-n}J_n \qquad (1)$$

فإن

$$\int x^{-1}J_4dx = \int x^2[x^{-3}J_4dx] = x^2[-x^3J_3] - \int 2x[-x^{-3}J_3]dx$$

وبالتكامل بالتجزئ، وباستخدام (1) مع $n=3$) نحصل على

$$= -x^{-1}J_3 + 2\int x^{-2}J_3dx = -x^{-1}J_3 + 2(-x^{-2}J_2) + c$$

(باستخدام (1) مع $n=3$)

$$= -x^{-1}J_3 - 2x^{-2}J_2 + c .$$

٦-٢٥ دالة بسل المولدة:

تسمى الدالة $e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}$ بالدالة المولدة لدالة بسل.

نظرية: اثبت أنه عندما يكون n عدد صحيح موجب، فإن J_n هى معامل z^n فى مفكوك

$$\exp\left\{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)\right\}$$

البرهان: لدينا

$$\exp\left\{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)\right\} = e^{\frac{xz}{2}}e^{-\frac{x}{2z}}$$

$$= \left[1+\left(\frac{x}{2}\right)z+\left(\frac{x}{2}\right)^2\frac{z^2}{2!}+\ldots\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{z^n}{n!}+\ldots\right].$$
$$.\left[1-\left(\frac{x}{2}\right)z^{-1}+\left(\frac{x}{2}\right)\frac{z^{-2}}{2!}+\ldots\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\frac{(-1)^n z^{-n}}{n!}+\ldots\right] \qquad (1)$$

ويكون معامل z^n فى (1) ناتج من ضرب معاملات z^n ، z^{n+1} ، z^{n+2} فى القوس الأول مع معامل z^0 ، z^{-1} ، z^{-2} ... فى القوس الثانى على الترتيب

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{n!}-\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}\frac{1}{(n+1)!}+\left(\frac{x}{2}\right)^{n+4}\frac{1}{(n+2)!2!}\ldots.$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!(n+r)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!(n+r+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} = J_n(x)$$

وأيضا معامل z^n ينتج من ضرب معامل z^{-n-1} ، z^{-n} ، ... ، z^{-n-2} من القوس الثانى مع معاملات z^0, z^1, z^2. فى القوس الأول على الترتيب نحصل على

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{(-1)^n}{n!}+\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}\frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2+....$$

$$=(-1)^n\left[\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{n!}-\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}\frac{1}{(n+1)!}+\left(\frac{x}{2}\right)^{n+4}\frac{1}{(n+2)!2!}+....\right]$$

كما سبق $=(-1)^n J_n(x)$

وعلى ذلك يكون معامل z^{-n} هو $(-1)^n J_n(x)$ أى

(معامل z^{-n}) مضروبا. $J_n(x)=(-1)^n x$

ولخيراً فى حاصل الضرب (1) ، نحصل على معامل z^0 بضرب معاملات $z^0,z^1,z^2,...$ فى القوس الأول فى معاملات $z^0,z^{-1},z^{-2},...$ فى القوس الثانى أى أن

$$=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2!}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^6\left(\frac{1}{3!}\right)^2=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2.4^2}....=J_0(x)$$

ونلاحظ أن معاملات $z^0,(z-z^{-1}),(z^2+z^{-2}),...(z^n+(-1)^n z^{-n})$ هى $J_0,J_1,J_2,....,J_n$ على الترتيب وعلى ذلك فمن (1) نجد أن

$$\exp\{\frac{x}{2}(z-1/z)=J_0+(z-z^{-1})J_1+(z^2+z^{-2})J_2+...$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n J_n(x)\,,\qquad (J_{-n}=(-1)J_n$$ (حيث

مثال (١): اثبت أن

(i) $\cos(x\sin\varphi)=J_0+2\cos 2\varphi.\,J_2+2\cos 4\varphi.\,J_4+...$

(ii) $\sin x\,(x\sin\varphi)=2\sin\varphi.\,J_1+2\sin 3\varphi.\,J_3+...$

(iii) $\cos(x\cos\varphi)=J_0-2\cos 2\varphi.\,J_2+2\cos 4\varphi.\,J_4+...$

(iv) $\sin(x\cos\varphi)=2\cos 2\varphi J_1-2\cos 3\varphi.\,J_3+2\cos 5\varphi.\,J_5+...$

(v) $\cos x = J_0 - 2J_4 + 2J_4 = J_0 + 2\sum (-1)^n J_{2n}$

(vi) $\sin x = 2J_1 - 2J_3 + 2J_5 + ... = 2\sum (-1)^n J_{2n+1}(x)$

الحل: لدينا

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = J_0 + (z - z^{-1})J_1 + (z^2 + z^{-2})J_2 + ... \quad (1)$$

بوضع $z = e^{i\varphi}$ والتالى $z^n = e^{in\varphi}$ ، $z^{-n} = e^{i-n\varphi}$ فإنه من (1) نجد أن

$$e^{\frac{x}{2}}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = J_0 + (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})J_1 + (e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi})J_2 + ... \quad (2)$$

وحيث أن

$$\cos n\varphi = (e^{in\varphi} + e^{-in\varphi})/2, \ \sin n\varphi = (e^{in\varphi} - e^{-in\varphi})/2$$

فإنه من (2) نحصل على

$$\cos(x \sin\varphi) + i \sin(x \sin\varphi) = J_0 + 2\cos 2\varphi - J_2 + ...) +$$

$$+2i (\sin\varphi J_1 + \sin\varphi)J_3 \quad (3)$$

(i) بمساواة الأجزاء الحقيقية فى (3) نحصل على

$$\cos(x \sin\varphi) = J_0 + 2\cos 2\varphi J_2 + 2\cos 4\varphi J_0 + ... \quad (4)$$

(ii) بمساواة الأجزاء التخيليه فى (3) نحصل على

$$\sin(x \sin\varphi) = 2\sin\varphi J_1 + 2\sin 3\varphi J_3 + ... \quad (5)$$

(iii) بوضع $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ بدلا من φ فى (4) والتبسيط نحصل على

$$\cos(x \cos\varphi) = J_0 - 2\cos 2\varphi J_2 + ... \quad (6)$$

(iv) بوضع $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ بدلا من φ فى (5) والتبسيط نحصل على

$$\sin(x \cos\varphi) = 2\cos\varphi J_1 - 2\cos 2\varphi J_3 + ... \quad (7)$$

(v)، (vi) بوضع صفر بدلا من φ فى (6)، (7) نحصل على

$$\cos x = J_0 - 2J_1 + 2J_4 + ... = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x)$$

$$\sin x = 2J_1 - 2J_3 + 2J_5 ... = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(x)$$

مثال (٢): اثبت أن

(i) $x \sin x = 2(2^2 J_2 - 4^2 J_4 + 6^2 J_6 - ...)$

(ii) $x \cos x = 2(1^2 J_1 - 3^2 J_3 + 5^2 J_5 - ...)$

الحل: من المعادلة السابقه

$$\cos(x \sin\varphi) = J_0 + 2J_2 \cos 2\varphi + 2J_4 \cos 4\varphi + ... \qquad (1)$$

بالاشتقاق بالنسبة إلى φ نجد أن

$$-\sin(x \sin\varphi).x \cos\varphi = 0 - 2.2J_2 \sin 2\varphi - 2.4J_4 \sin 4\varphi + ... \qquad (2)$$

باشتقاق (2) مرة أخرى بالنسبة إلى φ نجد أن

$$-\cos(x \sin\varphi)(x \cos\varphi)^2 + \sin(x \sin\varphi).(x \sin\varphi)$$

$$= -2.2^2 J_2 \cos 2\varphi - 2.4^2 J_4 \cos 4\varphi - 2.6^2 J_6 \cos 6\varphi.... \qquad (3)$$

بوضع $\pi/2$ بدلا من φ فى (3) نحصل على

$$x \sin x = 2(2^2 J_2 - 4^2 J_4 + 6^2 J_6 - ....$$

(ii) نبدأ من

$$\sin(x \sin\varphi) = 2J_1 \sin\varphi + 2J_3 \sin 3\varphi + ...$$

باشتقاق مرتين بالنسبة إلى φ مرتين كما فى (1) ونضع $\pi/2$ بدلا من φ فنحصل على النتيجة المطلوبة.

مثال (٣): استخدم الدالة المولدة لاثبات أن

$$J_n(x+y)=\sum_{n-\infty}^{\infty} J_1(x)J_{n-r}(y)$$

الحل: نعرف أن

$$\exp\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\left(z-\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x+y)z^n \qquad (1)$$

وبالتالى فإن $J_n(x+y)$ هى معامل z^n فى مفكوك الطرف الأيمن فى (1) وعلى ذلك يكون الطرف الأيسر فى (1) يساوى

$$\exp\left(\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)\right).\exp\left(\frac{1}{2}y\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)=\sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(x)z^r.\sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(y)z^s \quad (2)$$

لقيمة r الثابتة، نحصل على z^n بأخذ $r+s=n$ اى $s=n-r$. وبالتالى بجعل r ثابتة فيكون معامل z^n فى (1) هو $J_r(x)J_{n-r}(y)$. وبالتالى معامل z^n الكلى نحصل عليه بتجميع الحدود من $r=-\infty$ إلى $r=\infty$ ويعطى $\sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(x)J_{n-r}(y)$ وبذلك نحصل على النتيجة المطلوبة.

ملحوظة: يمكن استخدام دالة بسل المولدة لاثبات العلاقات التكرارية.

٢٥-٧ خاصية التعامد لدوال بسل:

إذا كان λ_i، λ_j هما جذرى المعادلة $J_n(\lambda a)=0$ فإن

$$\int_0^a xJ_n(\lambda_i x)J_n(\lambda_j x)dx=\begin{cases}0 & i\neq j\\ \frac{a^2}{2}J_{n+1}^2(\lambda_i a), & i=j\end{cases}$$

أو

$$=\frac{a^2}{2}J_{n+1}^2(\lambda_i a)\delta_{ij}$$

٨-٢٥ فك الدالة $f(x)$ بدلالة متسلسلة بسل (مفكوك فوريير وبسل)

نظرية (١): إذا كانت $f(x)$ معرف على المنطقة $0 \le x \le a$ ولها مفكوك

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\lambda_i x) \qquad (1)$$

حيث λ_i هى جذور المعادلة

$$J_n(\lambda_i a)=0 \qquad (2)$$

فإن

$$c_i=\frac{2\int_0^{\infty} x f(x) J_n(\lambda_i x)dx}{a^2 J_{n+1}^2(\lambda_i a)} \qquad (3)$$

البرهان: بضرب طرفى (1) فى $x_n J_n(\lambda_j x)$ فنحصل على

$$x f(x) J_n(\lambda_j x)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\lambda_i x) J_n(\lambda_i x) \qquad (4)$$

بتكامل طرفى (4) بالنسبة إلى x من 0 إلى a فنجد أن

$$\int_0^a x f(x) J_n(\lambda_j x)dx=\sum_{i=1}^{\infty} c_i \int_0^a x J_n(\lambda_i x) J_n(\lambda_i x)dx \qquad (5)$$

ومن خاصية التعامد لدالة بسل، فنحصل على

$$\int_0^a x J_n(\lambda_i x) J_n(\lambda_j x)dx=\begin{cases} 0 & i \ne j \\ \dfrac{a^2}{2} J_{n+1}^2(\lambda_i a), & i=j \end{cases} \qquad (6)$$

وباستخدام (6) فإن (5) تؤول إلى

$$\int_0^a x f(x) J_n(\lambda_j x)dx=c_j \frac{a^2}{2} J_{n+1}^2(\lambda_j a) \qquad (7)$$

بوضع i بدلا من j فى (7) فنحصل على

$$c_1 \frac{a^2}{2} J_{n+1}^2(\lambda_i a) = \int_0^a xf(x) J_n(\lambda_i x) dx$$

$$c_i = \frac{2\int_0^{\infty} xf(x) J_n(\lambda_i x) dx}{a^2 J_{n+1}^2(\lambda_i a)} \qquad (8)$$

مثال (١): فك الدالة $f(x)=1$، $0 \le x \le a$ فى متسلسلة على الصورة $\sum_{i=1}^{\infty} c_i J_0(\lambda_i x)$ حيث λ_i هى جذور $J_0(\lambda a)=0$.

الحل: لدينا

$$f(x) = 1 = \sum_{i=1}^{\infty} c_1 J_0(\lambda_i x) \qquad (1)$$

حيث

$$J_0(\lambda_i a) = 0 \qquad (2)$$

ولدينا أيضاً عندما $n=0$

$$c_i = \frac{2\int_0^{\infty} xf(x) J_0(\lambda_i x) dx}{a^2 J_1^2(\lambda_i a)} = \frac{2\int_0^{\infty} xJ_0(\lambda_i x)}{a^2 J_1^2(\lambda_i a)}, \ f(x)=1 \qquad (3)$$

بوضع $\lambda_i x = t$ فإن $dx = dt/\lambda_i$. فإن

$$\int_0^a xJ_0(\lambda_i x) dx = \frac{1}{\lambda_1^2} \int_0^{a\lambda_i} tJ_0(t) dt$$

$$= \frac{1}{\lambda_i^2} \int_0^{a\lambda_i} \frac{d}{dt}\{tJ_1(t)\} dt$$

[لأن $\frac{d}{dx}[x^n J_n(x) = x^n J_{n-1}(x), \frac{d}{dx}[xJ_1 dx = xJ_n(x)$] وعلى ذلك يكون

$$\frac{1}{\lambda_i^2}[tJ_1(t)]^{a\lambda_i}=\frac{1}{\lambda_i^2}[a\lambda_i J_1(a\lambda_i)-0] \quad , \quad J_1(0)=0$$

$$\int_0^a xJ_0(\lambda_i x)dx=\frac{a}{\lambda_i}J_1(a\lambda_i) \qquad (4)$$

باستخدام (3)، (4) نحصل على

$$c_1=\frac{2(a/\lambda_i)J_1(a\lambda_i)}{a^2J_1^2(\lambda_i a)}=\frac{2}{a^2\lambda_i J_1(a\lambda_i)} \qquad (5)$$

وتؤول (1) باستخدام (5) إلى

$$1=\frac{2}{a}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_i x)}{\lambda_i J_0(\lambda_i a)}$$

مثال (٢): فك الدالة $f(x)=x$ على الصورة $\sum_{i=1}^{\infty} c_r J_1(\lambda_r x)$

$0\le x\le 1$ ، λ_i هى جذور $J_1(\lambda)=0$

الحل: لدينا

$$f(x)=x=\sum_{r=1}^{\infty} c_r J_1(\lambda_r x) \qquad (1)$$

$$J_1(\lambda_r)=0 \qquad (2)$$

لدينا

$$c_r=\frac{2\int_0^1 x^2J_1(\lambda_r x)dx}{J_2^2(\lambda_r)} \qquad (3)$$

بوضع $\lambda_i x=t$ فإن $dx=dt/\lambda_r$ وعلى ذلك

$$\int_0^a x^2J_1(\lambda_r x)dx=\frac{1}{\lambda_r^3}\int_0^{\lambda_r} t^2J_1(t)dt$$

$$= \frac{1}{\lambda_r^3} \int_0^{\lambda_r} \frac{d}{dt}(t^2 J_2(t))dt$$

[حيث $\frac{d}{dt}(x^2 J_2(x)) = x^2 J_1(x)$]

$$= \frac{1}{\lambda_r^3} \int_0^{\lambda_r} \frac{d}{dt}(t^2 J_2(t))dt$$

$$= \frac{1}{\lambda_r^3}[t^2 J_2(t)]_0^{\lambda_r} = \frac{1}{\lambda_r^3}[\lambda^2 J_2(\lambda_r) - 0]$$

[حيث $J_2(0) = 0$]

وعلى ذلك

$$\int_0^1 x^2 J_1(\lambda_r x)dx = \frac{1}{\lambda_r} J_2(\lambda_r) \qquad (4)$$

وباستخدام (4) فإن (3) تؤول إلى

$$c_r = 2/\lambda_r J_2(\lambda_r) \qquad (5)$$

وباستخدام (5) فإن (4) تؤول إلى

$$x = 2\sum_{r=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_r x)}{\lambda_r J_2(\lambda_r)} \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

تمارين

(١) اثبت أن

(i) $\int_0^{2\pi} \sqrt{\pi x}\, J_{1/2}(x)dx = 1$ (ii) $J_{n+3} + J_{n+5} = \frac{2}{x}(n+4)J_{n+4}$

(iii) $4J_n'' = J_{n-2} - 2J_n + J_{n+2}$

(iv) $\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m (x^n J_n) = x^{n-m} J_{n-m}\, m > 0, m < n$

(v) $\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m (x^{-n} J_n) = (-1)^m x^{-n-m} J_{n+m}$

(vi) $x^{-n} J_n = (-1)^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n J_0,$ (vii) $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$

(٢) اوجد a، b حيث

$$\frac{d}{dx}(J_n(x)) = aJ_{n-1} + bJ_{n+1}$$

(٣) اثبت أن

i) $J_{5/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[\frac{3-x^2}{x^2}\sin x - \frac{3}{x}\cos x\right]$

ii) $J_{-5/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[\frac{3-x^2}{x^2}\cos x + \frac{3}{x}\sin x\right]$

iii) $x^2 J_n'' + J_n' = \frac{n^2}{x} J_n - xJ_n$ (iv) $\int J_{n+1}(x)dx = \int J_{n-1}dx - 2J_n$

v) $\int_0^x x^2 J_0(x) J_1(x) dx = \frac{1}{2} x^2 J_1^2$

vi) $\int x^{-2} J_1(x) dx = -\frac{1}{3} x^{-1} J_2 - \frac{1}{3} J_1 + \frac{1}{2}\int J_0 dx$

vii) $\int J_0 \sin x dx = xJ_0 \sin x - xJ_1 \cos x + c$

viii) $J_0 = \frac{2}{x}\int_0^1 \frac{\cos xt dt}{1-t^2}$ (ix) $\int_0^{\pi/2} J_1(x\cos\theta)d\theta = \frac{1-\cos x}{x}$

(٤) استخدم الدالة المولدة لاثبات أن

$J_n = [J_{n-1} + J_{n+1}]/2,$ عدد صحيح n

(٥) فك الدالة x^2 على الصورة $\sum_{r=1}^{\infty} c_r J_0(\lambda_r x)$ ، $0 \le x \le a$

λ_r هى حدين المعادلة $J_0(\lambda a) = 0$

(٦) إذا كان λ_i هى الجذور الموجبة $J_0(\lambda) = 0$ اثبت أن

$$\frac{1-x^2}{8} = \sum_{i=1}^{0} J_0(\lambda_i x)/\lambda_i^2 J_1(\lambda_i) \ , \quad -1 < x < 1$$

(٧) إذا كان λ_i هى الجذور الموجبة $J_0(\lambda) = 0$ اثبت أن

$$x^3 = 2\sum_{i=1}^{0} \frac{J_1(\lambda_i x)}{\lambda_i J_2(\lambda_i)} \qquad -1 < x < 1$$

(٨) اثبت أن

(i) $J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi$,

حيث n عدد صحيح موجيب

(ii) $J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin n\varphi)d\varphi,$

حيث n أى عدد صحيح

(iii) $J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\varphi)d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\cos\varphi)d\varphi$

(iv) $\int_0^{x} x^2 J_0(x) J_1(x) dx = \frac{1}{2}x^2 J_1^2(x)$,

الباب السادس والعشرون

كثيرات حدود هيرمت

Hermite Polynomials

٢٦-١ مقدمة: تكون معادلة هيرمت التفاضلية على الصورة

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \qquad (1)$$

حيث n ثابت . ويمكن إيجاد حلها بطريقة فروبنيوس على صورة متسلسلة قوى على الصورة

$$H_n(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{n!}{r!(n-2r)!}(2x)^{n-2r}$$

حيث $[n/2]$ سبق تعريفها

٢٦-٢ الدالة المولدة لكثيرات حدود هيرمت

نظرية (١):

$$e^{2tx-t^2} = \sum \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

البرهان: نعرف أن

$$e^{2tx-t^2} = e^{2tx} e^{-t^2} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2tx)^s}{s!} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^r}{r!}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(2x)^s}{s!r!} t^{s+2r} \qquad (1)$$

ليكن $s + 2r = n$ وبالتالى $s = n - 2r$. فلقيمة r الثابتة ، يكون معامل t^n هو

$$(-1)^r \frac{(2x)^{n-2r}}{r!(n-2r)!} \qquad (2)$$

حيث

$$s \geq 0 \Rightarrow n-2r \geq 0 \Rightarrow n \geq 2r \Rightarrow r \leq n < n/2$$

والتى تعطى جميع قيم r حيث تكون (2) هى معامل t^n . إذا كانت n زوجية فإن $r < n/2$ الذى تبين أن r تتغير من 0 إلى $n/2$ أما إذا كانت n فردية فإن $r \leq n/2$ الذى يبين أن r تتغير من 0 إلى $(n-1)/2$. كما نلاحظ أن r عدد صحيح . وعلى ذلك فإن r تتغير من 0 إلى $[n/2]$ حيث:

$$[n/2] = \begin{cases} n/2 \,, & n \text{ زوجيه} \\ \dfrac{n-1}{2} \,, & n \text{ فرديه} \end{cases}$$

ويكون معامل t^n الكلى فى التعبير e^{2tx-t^2} يعطى بالعلاقة

$$\sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{1}{r!(n-2r)!}(2x)^{n-2r}$$

أى

$$\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{n!}{r!(n-2r)!}(2x)^{n-2r} = \frac{1}{n!}H_n(x)$$

وأيضاً يكون معامل t^n فى $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}H_n(x)$ هو $\frac{1}{n!}H_n(x)$ وبهذا يثبت المطلوب .

٣-٢٦ تعبير مناظر لكثيرات حدود هيرمت (صيغة رودريج)

نظرية (١): العلاقة التالية صحيحة :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

البرهان: بإستخدام الدالة المولدة فيكون لدينا

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = e^{2tx - t^2} \qquad (1)$$

بفك الدالة التى على الطرف الأيمن باستخدام نظرية تيلور فإننا من (1) نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{2tx - t^2} \right]_{t=0} \frac{t^n}{n!} \qquad (2)$$

وبمساواة معامل t^n فى الطرفين وحزف $n!$ من الطرفين نجد أن

$$H_n(x) = \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{2tx - t^2} \right]_{t=0} = \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{x^2 - (x-t)^2} \right]_{t=0}$$

$$= e^{x^2} \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2} \right] = e^{x^2} \left[(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-(x-t)^2} \right]_{t=0}$$

$$\left\{ \text{حيث} \quad \frac{\partial^n}{\partial t^n} f(x-t) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x-t) \right\}$$

$$= e^{x^2} \left[(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right] = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

نظرية (٢): العلاقة التالية صحيحة

$$H_n(x) = 2^n \left\{ \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{d^2}{dx^2} \right) \right\} x^n$$

البرهان: نعرف أن

$$\exp\left(-\frac{1}{4} \frac{d^2}{dx^2} \right) e^{2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{4} \frac{d^2}{dx^2} \right)^n e^{2tx},$$

$$= \sum \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \right)^{2n} e^{2tx} \qquad \left(\text{حيث} \quad e^x = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{2^{2n}}\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}e^{2tx}$$

$$=\sum \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{2^{2n}}(2t)^{2n}e^{2tx}$$

$$=e^{2tx}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}=e^{2tx}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!}t^{2n}$$

$$=e^{2tx}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!}=e^{2tx}e^{-t^2} \tag{1}$$

وباستخدام الدالة المولدة، يكون لدينا

$$e^{2tx}e^{-t^2}=e^{2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} \tag{2}$$

وأيضاً

$$e^{2tx}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2tx)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}t^n \tag{3}$$

باستخدام (2)، (3) فإن (1) تؤول إلى

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}\right).\frac{2^n x^n}{n!}t^n=\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} \tag{4}$$

وبمساواة معامل t^n على الطرفين فى (4) ، يكون لدينا

$$\exp\left(-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}\right).\frac{2^n x^n}{n!}=\frac{H_n(x)}{n!} \quad \Rightarrow \quad \frac{2^n}{n!}\left\{\exp\left(-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}\right)\right\}x^n=\frac{H_n(x)}{n!}$$

اى

$$H_n(x)=2^n\left\{\exp\left(-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}\right)\right\}x^n \ .$$

٤-٢٦ كثيرات حدود هيرمت لبعض قيم n الخاصة:

من التعريف

$$H_n(x)=\sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{n!}{r!(n-2r)!}(2x)^{n-2r} \qquad (1)$$

بوضع $n=0,1,2,3,...$ فى (1) نحصل على

$$H_0(x)=\sum_{r=0}^{0} (-1)^r \frac{0!}{r!(1-2r)!}(2x)^{-2r}=(-1)^0\frac{1}{0!0!}(2x)^0=1$$

$$H_1(x)=\sum_{r=0}^{0} (-1)^r \frac{1!}{r!(1-2r)!}(2x)^{1-2r}=(-1)^0\frac{1}{0!0!}(2x)^1=2x$$

$$H_2(x)=\sum_{r=0}^{1} (-1)^r \frac{2!}{r!(2-2r)!}(2x)^{2-2r}$$

$$=(-1)^0\frac{2!}{0!2!}(2x)^2+(-1)^0\frac{2!}{0!2!}.(2x)^0=4x^2-2$$

$$H_3(x)=\sum_{r=0}^{1} (-1)^r \frac{3!}{r!(3-2r)!}(2x)^{3-2r}$$

$$=(-1)^0\frac{3!}{0!3!}(2x)^3+(-1)^1\frac{3!}{1!1!}(2x)^1=8x^3-12x$$

$$H_4(x)=\sum_{r=0}^{2} (-1)^r \frac{4!}{r!(4-2r)!}(2x)^{4-2r}$$

$$=(-1)^0\frac{4!}{0!4!}(2x)^4+(-1)^1\frac{4!}{1!2!}(2x)^2+(-1)^2\frac{4!}{0!2!}(2x)^0$$
$$=16x^4-48x^2+12,$$

نظرية (١): تعطى قيم $H_{2n}(0)$ ، $H_{2n+1}(0)$ بالعلاقتين

$$H_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}\ ,\ \ H_{2n+1}(0)=0$$

البرهان: بإستخدام الدالة المولدة يكون لدينا

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(0)}{n!} = t^n = e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(0)}{n!} t^n = \sum \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} \tag{1}$$

وبمساواة معاملات t^{2n} فى الطرفين

$$\frac{H_{2n}(0)}{(2n)!} = \frac{(-1)^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$$

وحيث أن الطرف الأيمن من (1) لايحتوى على قيم قوى فردية للمتغير t وبمساواة معامل t^{2n+1} فى طرفى (1) نجد أن

$$\frac{H_{2n+1}(0)}{(2n+1)!} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{2n+1}(0) = 0$$

٢٦-٥ خاصية التعامد لكثيرات حدود هيرمت: تعطى بالعلاقة

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi}\, \delta_{mn}$$

٢٦- ٦ العلاقات التكرارية

نظرية (٥): يكون لكثيرات حدود هيرمت العلاقات التكرارية (الرجعية- التتابعية) التالية:

(i) $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x), \; n \geq 1, \; H_0'(0) = 0$

(ii) $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \; n \geq 1, \; H_1(x) = 2xH_0(x)$

(iii) $H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$

(iv) $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$

البرهان: لدينا من التعريف

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}=e^{2tx-t^2} \qquad (1)$$

باشتقاق (1) بالنسبة إلى x نجد أن

$$\sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x).\frac{t^n}{n!}=2te^{2tx-t^2}=2t\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

وبالتالى

$$\sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x)\frac{t^n}{n!}=2\sum_{n=0}^{\infty} H_n\frac{t^{n+1}}{n!} \qquad (2)$$

بمساواة معاملات t^n فى الطرفين عندما $n=0$ نجد أن

$$H'_n(x)=0$$

وكذلك بمساواة معاملات t^n فى الطرفين عندما $n\geq 1$ فإنه من (2) نجد أن

$$\frac{H'_n(x)}{n!}=\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} \quad \Rightarrow \quad H'_n(x)=2nH_{n-1}(x)$$

(ii) باشتقاق طرفى (1) بالنسبة إلى t نحصل على

$$(2x-2t)e^{2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^{n-1}}{n!}H_n(x)$$

$$(2x-2t)\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}=\frac{0t^{0-1}}{0!}H_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!}H_n(x)$$

أى

$$2x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!}-2\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n-1)!}H_n(x) \qquad (4)$$

بمساواة معاملات t^n فى الطرفين عندما $n=0$ فى (4) نحصل على

$$2xH_0 = H_1(x)$$

وكذلك بمساواة معامل t^n فى الطرفين عندما $n \geq 1$ فى (4) نحصل على

$$2x\frac{H_n(x)}{n!} - 2\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = \frac{H_{n+1}(x)}{n!} \qquad (5)$$

بضرب طرفى (5) فى $n!$ مع ملاحظة $n! = n(n-1)!$ نحصل على

$$2xH_n(x) - 2nH_{n-1} = H_{n+1}$$

(iii) من العلاقتين التكراريين (1)، (2) يكون لدينا

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \qquad (1)$$

$$H_{n+1} = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \qquad (2)$$

بجمع (1) ، (2) نحصل على

$$H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$$

(iv) حيث $H_n(x)$ هى حل المعادلة التفاضلية

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

وعلى ذلك فهى تحقق المعادلة

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$$

مثال (١): اثبت أن

$$\frac{d^m}{dx^m}(H_n(x)) = \frac{2^m n!}{(n-m)!}H_{n-m}(x), \quad m < n$$

الحل: نعرف أن

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{t^n}{n!} = e^{2tx - t^2} \qquad (1)$$

باشتقاق (1) m من المرات بالنسبة إلى x نحصل على

$$\sum \frac{t^n}{n!}\frac{d^m}{dx^m}\{H_n(x)\} = \frac{d^m}{dx^m}e^{2tx-t^2} = (2t)^m e^{2tx-t^2} = 2^m t^m \sum H_n(x).\frac{t^n}{n!}$$

وعلى ذلك

$$\sum \frac{t^n}{n!}\frac{d^m}{dx^m}\{H_n(x)\} = 2^m \sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{t^{n+m}}{n!} \qquad (2)$$

وبمساواة معاملات t^n في طرفي (2) مع ملاحظة $m < n$ نجد أن

$$\frac{1}{n!}\frac{d^m}{dx^m}\{H_n(x)\} = 2^m \frac{H_{n-m}}{(n-m)!} \Rightarrow \frac{d^m}{dx^m}\{H_n(x)\} = \frac{2^m n!}{(n-m)!}H_{n-m}(x)$$

مثال (٢): اثبت أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}[H_n(x)]^2 = (\sqrt{\pi})2^n n!\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

الحل: من العلاقات التكرارية

$$H_{n-1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \Rightarrow xH_n(x) = nH_{n-1}(x) + \frac{1}{2}H_{n-1}(x)$$

$$(1)$$

وبضرب المعادلة الثانية في x نحصل على

$$x^2H_n(x) = nxH_{n-1}(x) + \frac{1}{2}xH_{n-1}(x) \qquad (2)$$

بوضع $n-1$ ، $n+1$ بدلا من n في المعادلة الثانية في (1) نحصل على

$$xH_{n-1}(x) = (n-1)H_{n-2}(x) + \frac{1}{2}xH_n(x) \qquad (3)$$

$$xH_{n+1}(x) = (n+1)H_n(x) + \frac{1}{2}xH_{n+2}(x) \qquad (4)$$

باستخدام (3)، (4) فإن (2) تؤول إلى

$$x^2H_n(x)=n[(n+1)H_{n-1}+\frac{1}{2}H_n]+\frac{1}{2}[(n+1)H_n+\frac{1}{2}H_{n+2}]$$

أو

$$x^2H_n=n(n-1)H_{n-2}+\frac{1}{4}H_{n+2}+(n+\frac{1}{2})H_n \qquad (5)$$

بضرب طرفى (5) فى $e^{-x^2}H_n(x)$ ثم التكامل بالنسبة إلى x من $-\infty$ إلى ∞ فنحصل على

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}[H_n(x)]^2dx=n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_{n-2}(x)dx$$

$$+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_{n+2}(x)dx+(n+\frac{1}{2})\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[H_n(x)]^2dx$$

$$=0+0+(n+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}2^n n!$$

[حيث $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n H_n dx=\sqrt{\pi}2^n n!\delta_{nm}$ من شرط التعامد]

مثال (٢): إذا كان $\psi_n=e^{-x^2/2}H_n(x)$ ، H_n هى كثيرات حدود هيرمت من الدرجة n اثبت أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x)\psi_n(x)dx=2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{n,m}$$

الحل: لدينا

$$\psi_n=e^{-x^2/2}H_n(x) \qquad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x)\psi_n(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}H_m e^{-x^2/2}H_n dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}H_m H_n dx=2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{nm}$$

تمارين

١- اوجد قيمة $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx$

٢- عبر عن $H_n(x)=x^4+2x^3+2x^20x-3$ بدلالة كثيرات حدود هيرمت

٣- اثبت أن $p_n(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}n!}\int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{-t^2}H_n(xt)dt$

٤- إذا كانت $\psi_n=e^{-x^2/2}H_n(x)$ اثبت أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x)\psi_n'(x)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\pm 1\\ 2^{2n-1}n!\sqrt{\pi} & m=n-1\\ -2^2(n+1)!\sqrt{\pi} & m=n\end{cases}$$

٥- استخدم صيغة رودريج لكثيرات حدود هيرمت والتكامل بالتجزئ لاثبات أن

$$\psi=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx=2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{mn}$$

(حيث صيغة رودريج $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$)

٦- اثبت أن

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{H_k(x)H_k(y)}{2^k k!}=\frac{H_{n+1}(y)H_n(x)-H_{n+1}(x)H_n(y)}{2^{n+1}n!(y-x)}$$

٧- اثبت أن

$$H_5(x)=32x^5-160x^3+120x$$

٨- اثبت أن

$$\text{(i)}\ \int_{-\infty}^{\infty}[H_n(x)]^2e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}2^n n$$

$$\text{(ii)}\ H_n(x)=2^{n+1}e^{x^2}\int_{x}^{\infty}e^{-t^2}t^{n+1}P_n\left(\frac{x}{t}\right)dt$$

الباب السابع والعشرون

كثيرات حدود لاجير

Laguerre Polynomials

٢٧-١ مقدمة: تسمى المعادلة التفاضلية التي على الصورة

$$xy''+(1-x)y'+ny=0$$

بمعادلة لاجير. ويمكن إيجاد حلها باستخدام طريقة فروبنيوس على الصورة

$$L_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{n!}{(n-r)!(r!)^2}x^r$$

وهى كثيرة حدود من رتبة n.

وتوجد صورة أخرى لكثيرات حدود لاجير من رتبة n وهى

$$L_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(n!)^2x^r}{(n-r)!(r!)^2}$$

٢٧-٢ الدالة المولدة لكثيرات حدود لاجير

نظرية (١): تكون الدالة المولدة على الصورة

$$\exp\{-xt/(1-t)\}/(1-t)=\sum_{r=0}^{\infty}L_n(x)t^n$$

البرهان: لاثبات المطلوب يجب علينا اثبات أن معامل t^n فى مفكوك الطرف الأيسر (فى قوى تنازلية للمتغير t) يكون $L_n(x)$.

$$\frac{\exp[-xt/(1-t)]}{1-t}=\frac{1}{1-t}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{-xt}{1-t}\right)^r\frac{1}{r!}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}x^rt^r(1-t)^{-(r+1)}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}x^rt^r\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(r+s)!}{r!s!}$$ (من نظرية ذات الحدين)

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^r\frac{(r+s)!}{(r!)^2 s!}x^r t^{r+s}$$

لتكن r ثابتة. فإن معامل t^n يمكن الحصول عليه بوضع $r+s=n$ أى $s=n-r$. ولقيمة r المختارة فإن معامل t^n يكون

$$(-1)^r\frac{n!}{(r!)^2(n-r)!}x^r$$

ولكن $r\ge 0\Rightarrow n-r\ge 0\Rightarrow r\le n$ والتى تعطى قيم r المسموح بها لايجاد معامل t^n. ويكون معامل t^n الكلى معطى بالعلاقة

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n!}{(r!)^2(n-r)!}x^r=L_n(x)$$ (من التعريف)

تعريف أخر لكثيرة حدود لاجير معطى بالنظرية التالية

نظرية (٢):

$$L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

البرهان: باستخدام نظرية ليبنتز (Leibnitz)

$$D^n(uv)=\frac{d^n}{dx^n}(uv)=D^n u v+{}^nC_1 D^{n-1}u.Dv+\dots+{}^nC_r D^{n-r}uD^r v+uD^n v$$

i.e. $$D^n(uv)=\sum_{r=0}^{n}{}^nC_r D^{n-r}uD^r v$$

وعلى ذلك

$$\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})=\frac{e^x}{n!}\sum_{r=0}^{\infty}{}^nC_r D^{n-r}x^n D^r e^{-x}$$

$$=\frac{e^x}{n!}\sum_{r=0}^{\infty}{}^nC_r\frac{n!}{\{n-(n-r)\}!}x^{n-(n-r)}.(-1)^r e^{-x}$$

[$D^n x^m = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$ حيث]

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^x}{n!} \frac{n!}{r!(n-r)!} \frac{n!}{r!} x^r (-1)^r e^{-x} = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r n!}{(r!)^2 (n-r)!} x^r = L_n(x)$$

٢٧-٣ بعض صور كثيرات حدود لاجير:

نعرف أن

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \qquad (1)$$

بوضع $n = 0,1,2,....$ فى (1)

$$L_0(x) = \frac{e^x}{0!}(x^0 e^{-x}) = 1 \ ,$$

$$L_1(x) = \frac{e^x}{1!} \frac{d}{dx}(xe^{-x}) = e^x(e^{-x} - xe^{-x}) = 1 - x$$

$$L_2(x) = \frac{e^x}{2!} \frac{d^2}{dx^2}(x^2 e^{-x}) = \frac{e^x}{2!} \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(x^2 e^{-x})\right) = \frac{e^x}{2!} \frac{d}{dx}(2xe^{-x} - x^2 e^{-x})$$

$$= \frac{e^x}{2!}[2xe^{-x} + 2x(-e^{-x})] - \{2xe^{-x} + x^2(-e^{-x})\} = \frac{1}{2!}\{2 - 4x + x^2\}.$$

٢٧-٤ خاصية التعامد (Orthogonality)

نظرية (١):

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ 1 & , \quad m = n \end{cases}$$

البرهان: باستخدام الدالة المولدة

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n = \frac{\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)}{1-t}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} L_m(x) s^m = \frac{\exp\left(-\frac{xs}{1-s}\right)}{1-s}$$

بالضرب نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} L_n(x)L_m(x)t^n s^m = e^{-x\left[\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}\right]}\cdot\frac{1}{(1-t)(1-s)} \qquad (1)$$

بضرب طرفى (1) فى e^{-x} وتكامل الطرفين بالنسبة إلى x من 0 إلى ∞ نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\int_0^{\infty} e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx\right]t^n s^m$$

$$=\frac{1}{(1-t)(1-s)}\int_0^{\infty} e^{-x\left[1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}\right]}dx$$

$$=\frac{1}{(1-t)(1-s)}\left[\frac{e^{-x\left[1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}\right]}}{-\left[1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}\right]}\right]_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{(1-t)(1-s)}\cdot\frac{1}{1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}}=\frac{1}{(1-t)(1-s)+t(1-s)+s(1-t)}$$

$$=\frac{1}{1-st}=(1-st)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} s^n t^n \qquad \text{(من نظرية ذات الحدين)}$$

وعلى ذلك

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\int_0^{\infty} e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx\right]t^n s^n=\sum_{n=0}^{\infty} s^n t^n \qquad (2)$$

نلاحظ قوى t ، s تكون دائما متساوية فى كل حد على الطرف الأيمن فى (2). عندما $n \neq m$ تساوى معامل $t^n s^m$ على طرفى (2) نحصل على

$$\int_0^{\infty} e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx=0\ ,\qquad m\neq n \qquad (3)$$

وأخيراً مساواة معاملات $t^n s^m$ على طرفى (2) نحصل على

$$\int_0^\infty e^{-x}\{L_n(x)\}^2 dx = 1 \qquad (4)$$

باستخدام (2)، (3)، (4) نحصل على

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ 1 & , \quad m = n \end{cases}$$

نظرية (٢): إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود من درجة m فإنه يمكن فك $f(x)$ على الصورة

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} C_r L_n(x)$$

حيث

$$C_r = \int_0^\infty e^{-x} L_r(x) f(x) dx$$

٢٧-٥ العلاقات التكرارية لكثيرات حدود لاجير:

نظرية (١): العلاقات التالية صحيحة

I. $(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_m(x) - nL_{n-1}(x)$

II. $xL_n'(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}$

III. $L_n'(x) = -\sum_{r=0}^{n-1} L_r(x)$

البرهان: نعرف أن

$$\sum_{r=0}^{\infty} L_n(x) t^n = \frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{1-t} \qquad (1)$$

باشتقاق طرفى (1) بالنسبة إلى t نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) n t^{n-1} = \frac{1}{(1-t^2)} \exp\left\{-\frac{xt}{1-t}\right\} - \frac{1}{1-t}.\exp\left\{-\frac{xt}{1-t}\right\}.\frac{x}{(1-t)^2}$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{1}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n - \frac{x}{(1-t)^2}\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n$$

من (1). بضرب الطرفين فى $(1-t)^2$ فنحصل على

$$(1-2t+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) n t^{n-1} = (1-t)\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n - x\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n$$

أى

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} nL_n(x) t^n + \sum_{n=0}^{\infty} nL_n(x) t^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^{n+1} - x\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n \qquad (2)$$

بمساواة معاملات t^n فى الطرفين فى (2) نحصل على

$$(n+1)L_{n+1}(x) - 2nL_n(x) + (n-1)L_{n-1}(x) = L_n(x) - L_{n-1}(x) - xL_n(x)$$

$$\Rightarrow \quad (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x) \qquad (3)$$

(II) باشتقاق طرفى (1) بالنسبة إلى x نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x) t^n = \frac{1}{1-t}\exp\left\{-\frac{xt}{1-t}\right\}.\left\{\frac{-t}{1-t}\right\}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x) t^n = \frac{-1}{1-t} - \sum L_n(t) t^n \qquad \text{((من (١)}$$

$$(1-t)\sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x) t^n = -t\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x) t^{n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^{n+1} \qquad (4)$$

بمساواة معلومات t^n فى طرفى (4) نحصل على

$$L'_n(x) - L'_{n-1}(x) = -L_{n-1}(x) \tag{5}$$

لدينا العلاقة التكرارية (1)

$$(n+1)L_{n+1} = (2n+1-x)L_n - nL_{n-1} \tag{6}$$

باشتقاق (6) بالنسبة إلى x نحصل على

$$(n+1)L'_{n+1} = (2n+1-x)L'_n(x) - L_n - nL'_{n-1} \tag{7}$$

ومن (5) نحصل على

$$L'_{n-1} = L'_n + L_{n-1} \tag{8}$$

وبوضع $(n+1)$ بدلا من n فى (5) نحصل على

$$L'_{n+1} - L'_n = -L_n \quad \Rightarrow \quad \therefore\ L'_{n+1} = L'_n - L_n \tag{9}$$

وبوضع قيم L'_{n-1} ، L'_{n+1} فى (7) نحصل على

$$(n+1)\{L'_n - L_n\} = (2n+1-x)L'_n - L_n - n[L'_n + L_{n-1}]$$

أى

$$xL'_n = nL_n - nL_{n-1}$$

وبالمثل يمكن اثبات العلاقة (III)

مثال (١): اثبت أن $L_n(0) = 1$

الحل: حيث أن

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n(x) = \frac{1}{1-t} e^{-tx/(1-t)}$$

وبوضع $x = 0$ فإن

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n(0) = \frac{1}{1-t} = (1-t)^{-1} = \sum_{n=0}^{1} t^n$$

وهى متطابقة وبمساواة معامل t^n فى الطرفين نجد أن $L_n(0) = 1$

مثال (٢): أثبت أن

$$\text{(i)}\ \ L_n'(0) = -n \quad , \qquad \text{(ii)}\ \ L_n''(0) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

الحل: حيث أن L_n حل لمعادلة لاجير التفاضلية

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \tag{1}$$

فإن

$$xL_n'' + (1-x)L_n' + nL_n = 0 \tag{2}$$

بوضع $x = 0$ واستخدم $L_n(0) = 1$ فإن من (2) نحصل على

$$0 + (1-0)L_n'(0) + n.1 = 0 \ \Rightarrow\ L_n'(0) = -n$$

(ii) حيث أن الدالة المولدة

$$\frac{1}{1-t}\exp(-xt/(1-t)) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n(x) \tag{3}$$

باشتقاق (3) مرتين بالنسبة إلى x فنجد أن

$$\frac{\exp(-xt/(1-t))}{(1-t)}\left(-\frac{t}{1-t}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} L_n''(x)t^n \tag{4}$$

بوضع $x = 0$ فإنه من (4) نجد أن

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n''(0)t^n = t^2(1-t)^{-3} \tag{5}$$

بمساواة معاملات t^n فى طرفى (5) نحصل على

معامل t^n فى مفكوك $t^2(1-t)^{-3}$ هو $L_n''(0)$

معامل t^{n-2} فى مفكوك $(1-t)^{-3}$ هو

$$= \frac{(-3)(-3-1)...(-3-n-(n+2)+1)}{(n-2)!}(-1)^{n-2}$$

$$= \frac{(-3)(-4)...(-n)}{(n-2)!}(-1)^{n-2} = \frac{3.4.5..n}{(n-2)!}(-1)^{n-2}(-1)^{n-2}$$

$$= \frac{1.2.3..n}{1.2(n-2)!} = \frac{n!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \therefore L_n''(0) = \frac{n(n-1)}{2}$$

مثال (٣): اوجد قيم

$$\text{(i)} \int_0^\infty e^{-x} L_3(x) L_5(x) dx \quad , \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty e^{-x} [L_4(x)]^2 dx$$

الحل: من خاصية تعامد $L_n(x)$ يكون لدينا

$$\text{(i)} \int_0^\infty e^{-x} L_3(x) L_5(x) dx = 0$$

$$\text{(ii)} \int_0^\infty e^{-x} [L_4(x)]^2 dx = 1$$

مثال (٤): بأخذ $\left(-\frac{-tx}{1-t}\right)$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L_n(x) = \frac{1}{1-t} \exp$ اثبت

$$L_n'(x) = n[L_{n-1}'(x) - L_{n-1}(x)]$$

الحل: حيث

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L_n(x) = \frac{1}{1-t} \exp(-tx/(1-t)) \qquad (1)$$

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى x نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L_n'(x) = \frac{1}{1-t} \mathrm{e}^{-tx/(1-t)} \left(-\frac{t}{1-t}\right)$$

أى

$$\sum \frac{t^n}{n!} L_n'(x) = -\frac{1}{1-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L_n(x)$$

اى

$$(1-t)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L_n'(x) = -t\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L_n(x)$$

أى

$$\sum \frac{t^n}{n!} L_n'(x) = \sum \frac{t^{n+1}}{n!} L_n'(x) - \sum \frac{t^{n+1}}{n!} L_n(x) \qquad (2)$$

بمساواة معامل t^n فى طرفى (2) نجد أن

$$\frac{1}{n!} L_n'(x) = \frac{1}{(n-1)!} L_{n-1}'(x) - \frac{1}{(n-1)!} L_{n-1}(x)$$

وبالتالى

$$L_n'(x) = n[L_{n-1}'(x) - L_{n-1}(x)].$$

تمارين

١- عبر عن $10-23x+10x^2-x^3$ بدلالة كثيرات حدود لاجير

٢- اثبت أن

$$L_n(2x)=n!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^m 2^{n-m}}{m!(n-m)!}L_{n-m}(x)$$

٣- أثبت أن

$$\int_x^{\infty} e^{-y}L_n(y)dy=e^{-x}[L_n(x)-L_{n-1}(x)]$$

٤- اثبت أن

$$\int_0^{\infty} e^{-st}L_n(y)dt=\frac{1}{s}\left(1-\frac{1}{s}\right)^n$$

٥- اثبت أن

$$xL_n''(x)+(1-x)L_n'(x)+L_n(x)=0$$

٦- اثبت أن $xL_n'(x)=nL_n(x)-n^2L_{n-1}(x)$

٧- اثبت أن

$$\int_0^{x} e^{-y}x^kL_n(x)dx=\begin{cases}0 & k<n\\ (-t)^n n!\,, & k=n\end{cases}$$

٨- إذا كانت كثيرة حدود لاجير $L_q(x)$ معرفة كالتالى

$$e^{-xs/1-s}=\sum_{q=0}^{0}\frac{L_q(x)}{q!}s^q \qquad s<1$$

أثبت أن

(i) $L_q'=qL_{q-1}'-qL_{q-1}$

(ii) $L_{q+1}=(2q+1-x)L_q-q^2L_{q-1}$

الباب الثامن والعشرون

الدالة فوق الهندسية

Hypergeometric function

٢٨-١ مقدمة: ليكن n عدد صحيح موجب فإن الرمز

$$(\alpha)_n = x(\alpha+1)...(\alpha+n-1) \qquad (1)$$

$$(\alpha_0) = 1 \qquad (2)$$

وعلى ذلك

1- $(\alpha_n) = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n-1)$

$$= \frac{1.2.3......(\alpha-1)(\alpha)(\alpha+1)....(\alpha+n-1)}{1.2.3.....(\alpha-1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \qquad (3)$$

2- $(\alpha)_{n+1} = \alpha(\alpha+1).......(\alpha+(n+1)-1)$

$$= \alpha[(\alpha+1)(\alpha+2).......(\alpha+1+n-1)]$$

$$= \alpha(\alpha+1)_n \qquad (4)$$

3- $(\alpha+n)(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)(\alpha+n)$

$$= \alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)(\alpha+n+1-1) = (\alpha)_{n+1} \qquad (5)$$

٢٨-٢ تعريفات:

أ - تعريف: الدالة فوق الهندسية العامة

وهى الدالة التى يرمز لها

$${}_mF_n(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,...,\beta_n) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_r...(\alpha_m)_r}{(\beta_1)_r(\beta_2)_r...(\beta_n)_r}\frac{x^r}{r!} \qquad (1)$$

والتى يرمز لها ايضاً

$${}_mF_n\begin{bmatrix}\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m : & \\ & x \\ \beta_1,\ \beta_2,\ldots,\beta_n : & \end{bmatrix} \qquad (2)$$

سوف نعتبر حالتين خاصتين من (1) فى هذا الباب والذى سنسردها فى البندين التاليين

على الترتيب $m=2, n=1$ ، $m=n=1$

ب- تعريف (١): الدالة فوق الهندسية المدمجة (كيومر)

Confluent hypergeometric function or (Kummer function)

يرمز للدالة فوق الهندسية المدمجة

$M(\alpha;\beta;x)$ أو $F(\alpha;\beta;x)$ أو ${}_2F_1(\alpha;\beta;x)$

وتعرف كالاتى

$$F(\alpha;\beta,x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r}{(\beta)_r}\frac{x^r}{r!} \qquad (1)$$

وفى بعض الأحيان نستخدم التعريف على الصورة

$$F(\alpha;\beta;x)=1+\frac{\alpha}{1\beta}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2\beta(\beta+1)}x^2 \qquad (2)$$

جـ- تعريف (٢): الدالة فوق الهندسية

وفى بعض الأحيان يكون لدينا التعريف

$${}_2F_1(\alpha_1,\alpha_2;\gamma;x) \text{ أو } F(\alpha,\beta;\gamma;x)=\sum\frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{(\gamma)_r}\frac{x^r}{r!} \qquad (1)$$

أى أن الطرف الأيمن له الصورة

$$=1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)(\beta)(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots. \qquad (2)$$

وإذا كانت $\beta = 1$ ، $\beta = \gamma$ فإن المتسلسلة (2) تأخذ الصورة

$$= 1 + x + x^2 + \ldots$$

وهى متسلسلة هندسية. وحيث أن (2) تختزل إلى المتسلسلة الهندسية كحالة خاصة فإن (2) تسمى بالمتسلسله فوق الهندسية.

ملحوظة (١): وفى بعض الأحيان تستخدم التعريف

$$F(\alpha,\beta;\gamma;x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!} + \ldots \tag{3}$$

ملحوظة (٢): الدالة فوق الهندسية $F(a,b;c;x)$ يمكن كتابتها على الصور التالية

$$F(a,b;c;x) = (1-x)^{c-a-b} F(c-a,c-b;c;x) \tag{4}$$

$$= (1-x)^{-a} F(a,c-b;c;\frac{x}{x-1}) \tag{5}$$

$$= (1-x)^{-b} F(b,c-a;c;\frac{x}{x-1}) \tag{6}$$

د – معادلة جاوس فوق الهندسية

Gauss's hypergeometric function

يكون لها الصورة

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$$

هـ – خاصية التماثل للدالة فوق الهندسية (Symmetric property)

لا تتأثر الدالة فوق الهندسية إذا بدلنا α، β مع ثبات γ أى أن

$$F(\alpha,\beta;\gamma;x) = F(\beta,\alpha;\gamma;x)$$

البرهان: من التعريف

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{(\gamma)_r}\frac{x^r}{r!} \qquad (1)$$

فإن

$$F(\beta,\gamma,x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\beta)_r(\alpha)_r}{(\gamma)_r}\frac{x^r}{r!} \qquad (2)$$

٢٨-٣ بعض النظريات

نظرية (١): (اشتقاق الدوال فوق الهندسية) تحقق الدالة فوق الهندسية الخاصية:

$$\frac{d}{dx}F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1;x)$$

ومنها نستنتج أن :

$$\text{(I)}\quad \frac{d}{dx}F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}F(\alpha+n,\beta+n,\gamma+n;x)$$

$$\text{(II)}\quad \left[\frac{d^n}{dx^n}F(\alpha,\beta,\gamma,x)\right]_{x=0}=\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}$$

البرهان: من التعريف

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{(\gamma)_r}\frac{x^r}{r!} \qquad (1)$$

باشتقاق (1) بالنسبة إلى x نحصل

$$\frac{d}{dx}F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{(\gamma)_r}\frac{x^r}{r!}rx^{r-1}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{(\gamma)_r(r-1)!}x^{r-1}$$

(حيث ان الحد مع $r=0$ يتلاشى). وعلى ذلك بوضع $r=m+1$ نجد أن

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+1}(\beta)_{m+1}}{(\gamma)_{m+1}m!}x^m$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)_m\cdot\beta(\beta+1)_m}{\gamma(\gamma+1)_m\, m!}x^m$$

$$=\frac{\alpha\beta}{\gamma}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_m\cdot(\beta+1)_m}{(\gamma+1)_m}\frac{x^m}{m!}$$

ومن (1)

$$=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x)$$

وعلى ذلك فإن

$$\frac{d}{dx}F(\alpha,\beta;\gamma,x)=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;x)$$

وهو المطلوب

الاستنتاج:

(i) لكل عدد صحيح موجب يجب أن نثبت أن

$$\frac{d^n}{dx^n}F(\alpha,\beta;\gamma,x)=\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}F(\alpha+n,\beta+n,\gamma+n,x) \qquad (2)$$

حيث أن $\alpha=(\alpha)_1$ ، $\beta=(\beta)_1$ ، $\gamma=(\gamma)_1$ فإن (1) تبين أن (2) صحيحة عندما $n=1$ وسنفترض أن (2) صحيحة لأى قيمة لـــ n ولتكن m وبالتالى

$$\frac{d^m}{dx^m}F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_m}F(\alpha+m,\beta+m,\gamma+m;x) \qquad (3)$$

بإشتقاق طرفى (3) بالنسبة إلى x نحصل

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_m}\frac{d}{dx}F(\alpha+m,\beta+m,\gamma+m;x)$$

$$=\frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_m}\frac{(\alpha+m)(\beta+m)}{(\gamma+m)}F(\alpha+m+1,\beta+m+1,\gamma+m+1;x)$$

(باستخدام (1) عند $\alpha+m$ ، $\beta+m$ ، $\gamma+m$ بدلا من α,β,γ على الترتيب)

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{(\alpha)_{m+1}(\beta)_{m+1}}{(\gamma)_{m+1}}F(\alpha+m+1,\beta+m+1,\gamma+m+1,x) \quad (4)$$

تبين (4) أن (2) صحيحة عندما $m+1$. وبالتالى إذا كانت (2) صحيحة عندما $n=m$ فإن (2) تكون صحيحة عندما $n+m+1$. وبالاستنتاج الرياضى فإن (2) تكون صحيحة لكل عدد صحيح موجب

(ii) بوضع $x=0$ فى (2) نحصل على

$$\frac{d^{n}}{dx^{n}}F[\alpha,\beta,\gamma,x]_{x=0}=\frac{(\alpha)_{n}(\beta)_{n}}{(\gamma)_{n}}F(\alpha+n,\beta+n,\gamma+n;0)$$

$$=\frac{(\alpha)_{n}(\beta)_{n}}{(\gamma)_{n}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)_{r}(\beta+n)_{r}}{(\gamma+n)_{r}}\frac{x^{r}}{r!}\right]_{x=0}=\frac{(\alpha)_{n}(\beta)_{n}}{(\gamma)_{n}}$$

نظرية (٢): (التمثيل التكاملى للدالة فوق الهندسية)

$$F(\alpha,\beta;\gamma,x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_{0}^{1}t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}dt \qquad \gamma>\beta>0$$

أى

$$F(\alpha,\beta;\gamma;x)=\frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)}\int_{0}^{1}t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}dt$$

البرهان:

من التعريف

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n}(\beta)_{n}}{(\gamma)_{n}}\frac{x^{n}}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_{n})\frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)}\cdot\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)}\frac{x^{n}}{n!}$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\beta)}\sum (\alpha_n)\frac{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\beta+n+\gamma-\beta)}.\frac{x^n}{n!}$$

(بالضرب والقسمة على $\Gamma(\gamma-\beta)$)

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha)_n \left\{\int_0^1 t^{\beta+n-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\right\}\frac{x^n}{n!}$$

[حيث $\gamma-\beta>0, \beta+n>0 \Rightarrow \gamma>\beta>0$]

وأيضا $[\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}=B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt]$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{(xt)^n}{n!}\right)dt$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}dt \qquad (1)$$

[حيث الحد العام لمفكوك $(1-xt)^{-\alpha}$ هو

$$=\frac{(-\alpha)(-\alpha-1)...(-\alpha-n+1)}{n!}(-xt)^n$$

$$=(-1)^n\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n+1)}{n!}x(-1)^n x^n t^n=(\alpha)_n\frac{x^n t^n}{n!} \quad]$$

وحيث أن

$$B(\beta,\gamma-\beta)=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\beta+\gamma-B)}=\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)/\Gamma(\gamma)$$

ترمز B هنا لدالة بيتا وكذلك

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}=\frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)} \qquad (2)$$

وبالتالى فإنه يمكن كتابة (1) على الصورة

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}dt \qquad (3)$$

حيث (1) ، (3) هى النتيجة المطلوبة

نظرية (٣): نظرية جاوس (Gauss Theorem)

تنص على

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

البرهان: من البند السابق بوضع $x=1$ نحصل على

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-t)^{-\alpha}dt$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1-\alpha}dt$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\cdot\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta+\gamma-\beta-\alpha)}$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

نظرية (٤): نظرية فاندرموند (Vandermonde)

تنص على

$$F(-n,\beta;\gamma;1)=\frac{(\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n}$$

البرهان: بوضع $\alpha=-n$ فى نظرية جاوس

$$F(-n,\beta,\gamma,1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\beta+n-1)(\gamma-\beta+n-2)\ldots(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{(\gamma+n-1)(\gamma+n-2)\ldots\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

$$=\frac{(\gamma-\beta+n-1)(\gamma-\beta+n-2)\ldots(\gamma-\beta)}{(\gamma+n-1)(\gamma+n-2)\ldots\gamma}=(\gamma-\beta)_n/(\gamma_n)$$

نظرية (٥): نظرية كيومر (Kummer)

تنص على

$$F(\alpha,\beta,\beta-\alpha+1,-1)=\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta/2+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma((\beta/2)-\alpha+1)}$$

البرهان : من سابقا بأخذ $x=-1$، $\gamma=\beta-\alpha+1$ (نظرية ٢) فإن

$$L.H.S=\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta-\alpha+1-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-\alpha+1-\beta-\alpha 1}(1+t)^{-\alpha}dt$$

$$=\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t^2)^{-\alpha}dt$$

$$=\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 (u^{1/2})^{\beta-1}(1-u)^{-\alpha}\frac{du}{2\sqrt{u}}$$

وذلك بوضع $t^2=u$، $dt=du/2\sqrt{u}$

$$=\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{2\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 u^{(\beta/2)-1}(1-u)^{1-\alpha-1}du$$

$$=\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{2\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta/2)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma((\beta/2)+1-\alpha)}=\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma((\beta/2)+1)}{\Gamma((\beta/2)+1-\alpha)\Gamma(\beta+1)}$$

(بضرب البسط والمقام فى β)

ملاحظات: تكون معادلة فوق الهندسية التفاضلية

$$(x^2-x)y''+[(1+\alpha+\beta)x-\gamma]y'+\alpha\beta y=0 \qquad (1)$$

بوضع x/β بدلا من x فى (1) نحصل على

$$x\left(1-\frac{x}{\beta}\right)y''+\left\{\gamma-\left(1-\frac{\alpha+1}{\beta}\right)x\right\}y'-\alpha y=0 \qquad (2)$$

والذى يمثل حلها بالدالة $F(\alpha,\beta,\gamma,x/\beta)$

فإن عندما $\beta\to\infty$ فإن المعادلة (2) تؤول إلى

$$xy''+(\gamma-x)y'-\alpha y=0 \qquad (3)$$

الذى حلها هو

$$\lim_{\beta\to\infty}F\left(\alpha,\beta,\gamma,\frac{x}{\beta}\right) \qquad (4)$$

تسمى المعادلة (3) بمعادلة فوق الهندسية التفاضلية المدمجه أو معادلة كيومر

والآن:

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{(\beta)_r}{\beta^r}=\lim\frac{\beta(B+1)(B+2)...(\beta+r-)}{\underbrace{\beta..........\beta}_{\text{r من المرات}}}$$

$$=\lim_{\beta\to\infty}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\left(1+\frac{2}{\beta}\right)...\left(1+\frac{r-1}{\beta}\right)=1$$

وعلى هذا فيمكن كتابة حل(4) على الصورة

$$\lim_{\beta\to\infty}F\left(\alpha,\beta;\gamma;\frac{x}{\beta}\right)=\lim_{\beta\to\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{r!(\gamma)_r}\left(\frac{x}{\beta}\right)^r$$

$$=\lim_{\beta\to\infty}\sum\frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{r!(\gamma)_r(\beta)_r}=\sum\frac{(\alpha)_r}{r!(\gamma)_r}x^r=F(\alpha;\gamma;x)$$

وهذه الدالة تسمى بدالة فوق الهندسية المدمجة وتحل المعادلة التفاضلية (3) بإستخدام طريقة فروبنيوس السابق شرحها حيث أن $x=0$ نقطة شاذة منتظمة

نظرية (٦): (اشتقاق الدوال فوق الهندسية المدمجة)

لثبت أن

$$\frac{d}{dx}F(\alpha,\beta,x)=\frac{\alpha}{\beta}F(\alpha+1,\beta+1,x)$$

ثم استنتج أن

$$\text{(i)}\quad \frac{d^n}{dx^n}F(\alpha,\beta,x)=\frac{(\alpha)_n}{(\beta)_n}F(\alpha+n,\beta+n,x)$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{d^n}{dx^n}F(\alpha,\beta,x]_{x=0}=\frac{(\alpha)_n}{(\beta)_n}$$

البرهان: من التعريف

$$F(\alpha,\beta,x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r}{(\beta)_r}x^r$$

واستخدام نفس طريقة الاشتقاق التى شرحناها فى نظرية (١) وينتج المطلوب.

نظرية (٧): (التمثيل التكاملى لدالة فوق الهندسية المدمجة)

اثبت أن

$$F(\alpha,\beta,x)=\frac{1}{B(\alpha,(\beta-\alpha))}\int_0^1 (1-t)^{\beta-\alpha-1}t^{\alpha-1}e^{xt}dt$$

حيث $\beta>\alpha>0$

البرهان: من التعريف

$$F(\alpha;\beta;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{(\beta)_n}.\frac{x^n}{n1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}.\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n)}.\frac{x^n}{n!}$$

$$=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}.\frac{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\beta-\alpha+\alpha+n)}\frac{x^n}{n!}$$

$$=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_0^1 (1-t)^{\beta-\alpha-1}t^{\alpha+n-1}dt\right\}\frac{x^n}{n!},\ \beta>\alpha$$

$$\left(\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}=B(p,q)=\int_0^1 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt,\ p<0,q>0 \qquad \text{لان}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}\int_0^1 (1-t)^{\beta-\alpha-1}t^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(xt)^n}{n!}dt$$

$$=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}\int_0^1 (1-t)^{\beta-\alpha-1}t^{\alpha-1}e^{xt}dt \qquad (1)$$

$$=\frac{1}{B(\alpha,\beta-\alpha)}\int_0^1 (1-t)^{\beta-\alpha-1}t^{\alpha-1}e^{xt}dt \qquad (2)$$

وهى النتيجة المطلوبة.

نظرية (٨): (علاقة كيومر)

اثبت أن

$$F(\alpha,\beta,x)=e^{x}F(\beta-\alpha,\beta,-x)$$

البرهان: نعرف أن من البند السابق

$$F(\alpha,\beta,x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}\int_0^1 (1-t)^{\beta-\alpha-1}t^{\alpha-1}e^{xt}dt \qquad (1)$$

بوضع $(\beta-\alpha)$ بدلا من α، $-x$ بدلا من x فى (1) نحصل على

$$F(\beta-\alpha,\beta,-x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-(\beta-\alpha))}\int_0^1 (1-t)^{\beta-(\beta-\alpha)-1}t^{\beta-\alpha-1}e^{-xt}dt$$

$$=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-\alpha-1}e^{-xt}dt$$

$$=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-\alpha-1}e^{-x(1-u)}(-du)$$

(وذلك بوضع $1-t=u$، $t=1-u$، $dt=-du$)

$$=\frac{\Gamma(\beta)e^{-x}}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\beta-\alpha-1}u^{\alpha-1}e^{xu}du$$

$$= e^{-x}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}\int_0^1 (1-t)^{\beta-\alpha-1}t^{\alpha-1}e^{xt}dt$$

$$= e^{-x}F(\alpha,\beta,x)$$ من العلاقة (1)

$$\therefore F(\beta-\alpha,\beta,-x) = e^{-x}F(\alpha,\beta,x)$$

وبالتالى فإن

$$F(\alpha,\beta,x) = e^{x}F(\beta-\alpha,\beta,-x)$$

٢٨-٤ الدالة فوق الهندسية الملاصقة

Continguous hypergeometric function

تعريف (١):

يقال أن الدالة $F(\alpha',\beta',\gamma',x)$ (طبقا لجاوس) أنها ملاصقة continguous إلى $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ عندما تزداد أو تنقص بولحد وواحد فقط من البارامترات بمقدار واحد وطبقا لهذا التعريف فإنه يوجد ست دوال فوق هندسية للدالة $F(\alpha,\beta,\gamma)$ ويرمز لها

$$F_{\alpha+} = F(\alpha+1,\beta,\gamma,x) \quad , \quad F_{\alpha-} = F(\alpha-1,\beta,\gamma,x)$$

$$F_{\beta+} = F(\alpha,\beta+1,\gamma,x) \quad , \quad F_{\beta-} = F(\alpha,\beta-1,\gamma,x)$$

$$F_{\gamma+} = F(\alpha,\beta,\gamma+1,x) \quad , \quad F_{\gamma-} = F(\alpha,\beta,\gamma-1,x)$$

نظرية (١): اثبت أن

$$(\alpha-\beta)F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \alpha F(\alpha+1,\beta,\gamma,z) - \beta F(\alpha,\beta+1,\gamma,x)$$

او

$$(\alpha-\beta)F = \alpha F_{\alpha+} - \beta F_{\beta+}$$

البرهان: من التعريف

$$\alpha F_{\alpha+} - \beta F_{\beta+} = \alpha\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_r(\beta)_r}{(\gamma)_r r!}x^r - \beta\sum\frac{(\alpha)_r(\beta+1)_r}{(\gamma)_r r!}x^r$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)(\alpha+1)_r(\beta)_r}{(\gamma)_r r!}x^r-\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r(\beta)(\beta+1)_r}{(\gamma)_r r!}x^r$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)(\alpha)_r(\beta)_r}{(\gamma)_r r!}x^r-\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r(\beta)_r(\beta+r)}{(\gamma)_r r!}x^r$$

[لأن $\alpha(\alpha+1)_r=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+1-r).(\alpha+1+r-1)$

$$=[\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+r-1)]/\alpha+r$$

$$=(\alpha+r)(\alpha)_r \qquad]$$

٢٨-٥ العلاقة المصاحبة للدوال فوق الهندسية المدمجة

$$(\alpha-\beta)xF_{\beta+}+\beta(x+\beta-1)F-\beta(\beta-1)F_{\beta-}=0$$

الاثبات: ينتج مباشرة من البند السابق.

٢٨-٦ امثلة محلولة:

مثال (١): اثبت أن

(i) $e^x={}_1F_1(\alpha,\alpha,x)$, (ii) $(1-x)^{-\alpha}={}_2F_1(\alpha,\beta,\beta,x)$

(iii) $(1-x)^{-1}=F(1,1,1,x)$, $|x|<1$

(iv) $(1+x)^n=F(-n,1,1,-x)$, (v) $\ln(1+x)=x\ {}_2F_1(1,1,2,-x)$

(vi) $\ln(1-x)=-x\ {}_2F_n(1,1,2,x)$, (vii) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2x\ F\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},x^2\right)$

(viii) $\sin^{-1}x=x\ F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},x^2\right)$, (ix) $\tan^{-1}x=x\ F\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-x^2\right)$

الحل:

(i) من التعريف

$${}_1F_1(\alpha,\beta,x)=\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r}{(\beta)_r}\frac{x^r}{r!}=1+\frac{\alpha}{\alpha}.\frac{x}{1!}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}.\frac{x^2}{2!}+...\infty \qquad (1)$$

بوضع α بدلا من β فى (1) نحصل على

$$ {}_1F_1(\alpha,\alpha,x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots=e^x $$

(ii) من التعريف

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}.\frac{x}{1!}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!}+\ldots $$

بوضع β بدلا من γ نحصل على

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta,\beta,x)=1+\frac{\alpha\beta}{\beta}\frac{x}{1!}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\beta(\beta+1)}\frac{x^2}{2!}+\ldots $$

$$ =1+\alpha\frac{x}{1!}+\alpha(\alpha+1)\frac{x^2}{2!}+\ldots\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\frac{x^3}{3!}+\ldots $$

$$ =1+(-\alpha)(1-x)+\frac{(-\alpha)(-\alpha-1)}{2!}(1-x)^2+\ldots $$

$$ =(1-x)^{-\alpha} $$

من نظرية ذات الحدين

(iii)، (iv) مثل (ii) متروكة كتمرين.

(٧) من التعريف

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{x}{1!}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!}+\ldots $$

بوضع 1، 1، 2، x - بدلا من α، β، γ، x نحصل على

$$ {}_2F_1(1,1,2,-x)=1+\frac{1.1}{2}\left(\frac{-x}{1!}\right)+\frac{1.2.1.2}{2.3}\frac{(x)^2}{2!}+\frac{1.2.3.1.2.3}{2.3.4}\frac{(x)^3}{3!}+\ldots $$

بضرب طرفى هذه المعادلة فى x نحصل على

$$x\,{}_2F_1(1,1,2,-x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$= \ln(1+x)$$

(vi)، (vii) تحل مثل (v) ونترك كتمرين. أما (viii) من التعريف نجد أن

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!} + \dots \qquad (1)$$

بوضع $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{2}$، $\frac{3}{2}$، x^2 بدلا من α، β، γ، x على الترتيب في (1) نحصل على

$$F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},x^2) = 1 + \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}{3/2}\frac{x^2}{1!} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)}{(3/2)(5/2)}\frac{x^2}{2!} + \dots$$

وبالضرب في x نحصل على

$$xF(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},x^2) = x + 1^2.\frac{x^3}{3!} + 1^2.3^2.\frac{x^5}{5!} + 1^2.3^2.5^2\frac{x^7}{7!} + \dots = \sin^{-1}x$$

(ix) من التعريف

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha+\beta}{\gamma}\frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!}$$

بوضع $\frac{1}{2}$، 1، $\frac{-3}{2}$، $-x^2$ بدلا من α، β، γ، x على الترتيب نحصل على

$$F(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-x^2) = 1 + \frac{\frac{1}{2}.1}{3/2}\frac{(-x^2)}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(3/2).1.2}{(3/2)(5/2)}\frac{(-x^2)^2}{2!} + \dots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \dots$$

$$xF\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-x\right)=x-\frac{3^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots=\tan^{-1}x$$

مثال (٢): اثبت أن إذا كان $|x|<1$، $\left|\frac{x}{1-x}\right|<1$ فإن

$${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x)=(1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\frac{x}{x-1}\right)$$

أو

$$F(a,b,c,z)=(1-z)^{-a}F\left(a,c,-b,c,\frac{-x}{1-z}\right)$$

الحل: من التمثيل التكاملى للدوال فوق الهندسة

$${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}dt \qquad (1)$$

بوضع $u=1-t \Leftarrow dt=-du$، $t=1-u$ فنحصل من (1) على

$${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_1^0 (1-u)^{\beta-1}u^{\gamma-\beta-1}(1-x+xu)^{-\alpha}.(-du)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 u^{\gamma-\beta-1}(1-u)^{\beta-1}(1-x)^{-\alpha}\left(1+\frac{xu}{1-x}\right)^{-\alpha}du$$

$$=\frac{(1-x)^{-\alpha}\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 u^{\gamma-\beta-1}(1-u)^{\beta-1}\left\{1-\frac{x}{x-1}u\right\}^{-\alpha} \qquad (2)$$

بوضع $\gamma-\beta$، $\frac{x}{(x-1)}$ بدلا من β، x فى (1) فنحصل على

$${}_2F_1(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\frac{x}{x-1})=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma-(\gamma-\beta))}$$

$$\int_0^1 t^{\gamma-\beta-1}(1-t)^{\gamma-(\gamma-\beta)-1}.\left(1-\frac{xt}{x-1}\right)^{-\alpha}dt$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\beta)}\int_0^1 u^{\gamma-\beta-1}(1-u)^{\beta-1}\left\{1-\frac{x}{x-1}u\right\}^{-\alpha}du \qquad (3)$$

باستخدام (3) فإن من (2) نحصل على

$$_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x)=(1-x)^{-\alpha}{}_2F_1\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\frac{x}{x-1}\right)$$

تمارين

(١) اثبت أن

a) $F(\alpha-1,\beta-1,\gamma,x)-F(\alpha,\beta-1,\gamma,x)=\frac{(1-\beta)x}{\gamma}F(\alpha,\beta,\gamma+1,x)$

b) $\alpha F(\alpha+1,\beta,\gamma,x)-(\gamma-1)F(\alpha,\beta,\gamma-1,x)=(\alpha+1-\gamma)F(\alpha,\beta,\gamma,x)$

c) (i) $F(\alpha,\beta,\gamma,\frac{1}{2})=2^{\alpha}F(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,-1)e^{x}-1$

(ii) $\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)e^{x}=F(\alpha+1,\alpha,x)$, (iii) $e^{x}-1=xF(1;2;x)$

d) (i) $x\frac{d}{dx}F(a,b,c,x)+aF(a,b,c,x)=aF(a+1,b,c,x)$

(ii) $x\frac{d}{dx}F(a,b,c,x)+bF(a,b,c,x)=bF(a,b+1,c,x)$

ثم استنتج

$$(a-b)F(a,b,c,x)+aF(a+1,b,c,x)-bF(a,b+1,c,x)$$

e) $\beta(p,q)=\frac{x^{p}}{p}F(p,1-q,1+p,x),\quad p,q>0$

f) $\beta F(x;\beta x)=\beta F(\alpha-1;\beta;x)+xF(\alpha;\beta+1;x)$

g) $\alpha F(\alpha+1,\beta,x)-(\beta-1)F(\alpha;\beta-1,x)=(\alpha-\beta+1)F(\alpha;\beta;x)$

h) $F(\alpha+1,\gamma;x)-F(\alpha;\gamma;x)=\frac{x}{\gamma}F(\alpha+1;\gamma+1;x)$

i) $\int_{0}^{\infty}e^{-5x}\,{}_1F_1(\alpha;\beta;x)dx=\frac{1}{5}\,{}_2F_1(\alpha,1,\beta,x)$

j) $P_n(x)={}_2F_1(-n,n+1;1,\frac{1-x}{2})$,

(٢) اثبت أن

(i) $H_{2n}(x)=(-1)^n \dfrac{(2n!)}{n!}\ {}_1F_1(-n;\frac{1}{2},x^2)$

(ii) $H_{2n+1}(x)=(-1)^n \dfrac{2(2n+1)!}{n!}x\ {}_1F_1(-n,\frac{3}{2},x^2)$

(iii) $L_n(x)=n!\ {}_1F_1(-n;1;x)$

(٣) اثبت أن للدالة فوق الهندسية

$${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}$$

هى حل المعادلة التفاضلية

$$x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta y=0$$

(٤) اثبت أن

a) $\left[\dfrac{d}{dx}\ {}_2F_1(\alpha;\beta;\gamma;x)\right]_{x=0}=\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}$

b) ${}_2F_1(\alpha;\beta;\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\dfrac{\gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\beta\right)}$

c) ${}_2F_1(\alpha;\beta;\gamma,\frac{1}{2})=2^\alpha\,{}_2F_1(\alpha;\gamma-\beta;\gamma,-1)$

d) $P_n(\cos\theta)=\ {}_2F_1(-n,n+1,1,\sin^2\theta/2)$

$$=(-1)^n\ {}_2F_1(n+1,-n,1,\cos^2\theta/2)$$

$$=\cos^n\theta\ {}_2F_1(\frac{-n}{2},-\frac{n-1}{2};1;\tan^2\theta)$$

المراجع

[1] D. Arrowsmith and C. Place: Ordinary Differential Equations. Chapman and Hall., 1982

[2] J. Cronin-Scanolon: Ordinary Differential EquationS. 3rd Ed. Chapman and Hall., 2007

[3] W. Derrick and S. Grossman: Elementary Differential Equations with Applications. Addison-Wesley Publishing Comp. 1980.

[4] A. Fokas: Ordinary and Partial Differential Equations. SIAM 2008.

[5] C. Fong and D. Kee: Perturbation Methods, Instability, Catastrophe and Chaos, Word Scientific, 1999.

[6] J. Huntley and R. Johnson, Linear and Nonlinear Differential Equations. Ellis Horwood Limited 1983.

[7] D. Jordan and P. Smith: Nonlinear Ordinary Differential Equations. Clarendon Press. Oxford 1985.

[8] T. Myint-U: Ordinary Differential Equations North-Holland, 1978.

[9] R. Palais and Robert A. Polais: Differential Equations, Mechanics and Computation. Students Mathematical Library, Vol. 51, 2009.

[10] M. Raisinghania: Ordinary and Partial Differential Equations. S. Chand & Co. New Delhi. 2003.

[11] M. Rao: Ordinary Differential Equations, Edward Arnold, 1980.

[12] L. Ross: Differential Equations. John Wiley, 1985.

[13] R. Swift and S. Wirkus: A Course in Ordinary Differential Equations. Chapma and Hall/CRC. 2007.

صدر من سلسلة الفكر العربي لمراجع العلوم الأساسية

العنوان	المؤلف
(١) البصريات.	أ.د. أحمد فؤاد باشا
	أ.د. شريف أحمد خيرى
(٢) مبادئ الكيمياء العملية التحليلية والعضوية وغير العضوية.	أ.د. أحمد مدحت إسلام.
	أ.د. السيد على حسن
(٣) أسس الكيمياء العضوية الأروماتية.	أ.د. أحمد مدحت إسلام.
(٤) أسس الكيمياء العضوية الأليفاتية.	أ.د. أحمد مدحت إسلام.
(٥) فيزياء الجوامد.	أ.د. محمد أمين سليمان.
	أ.د. أحمد فؤاد باشا
	أ.د. شريف أحمد خيرى.
(٦) أسس الكيمياء الفيزيائية.	أ.د. أحمد مدحت إسلام.
(طبعة جديدة مزيدة ومنقحة)	أ.د. مصطفى عمارة.
(٧) أسس الكيمياء العامة وغير العضوية.	أ.د. أحمد مدحت إسلام.
	أ.د. مصطفى عمارة
(٨) علم الفلك العام.	أ.د. مرفت السيد عوض.
	أ.د. مصطفى كمال محمود.
(٩) أسس علم الميكانيكا.	أ.د. عبد الشافى فهمى عبادة.
(طبعة جديدة مزيدة ومنقحة)	أ.د. على محمد أبو ستة.
	أ.د. أحمد بدر الدين خليل
	أ.د. عبدالرحمن السمان.
(١٠) العلوم الجوية وتطبيقاتها «التنمية باستخدام الأرصاد الجوية».	أ.د. محمد الشهاوى.
(١١) علم البيئة العام والتنوع البيولوجى.	أ.د. على على المرسى.
	أ.د. محمد محمد الشاذلى.
(١٢) أساسيات علم النبات العام: الشكل الظاهرى والتركيب التشريحى - تقسيم المملكة النباتية وظائف أعضاء النبات.	أ.د. الإمام عبده قبية.
	أ.د. محمود جبر
	أ.د. إسماعيل كامل.

(١٣) أسس علم الرياضيات [التفاضل والتكامل].	أ.د. حسن مصطفى العويضى. أ.د. عبد الشافى فهمى عبادة. أ.د. محمد طلعت عبد الناصر.
(١٤) الفيزياء النووية. (طبعة جديدة مزيدة ومنقحة).	أ.د.أحمد السعيد الناغى. أ.د. محمد نبيل يس البكرى
(١٥) الفيزياء الحيوية.	أ.د. أحمد فؤاد باشا أ.د. فوزى حامد عبد القادر ، أ.د. السيد عوض جعفر
(١٦) أشباه الموصلات.	أ.د. شريف أحمد خيرى أ.د. حسن حسين حسن
(١٧) مبادئ الكيمياء النووية.	أ.د. عبد الحكيم طه قنديل
(١٨) النسبية وقوى الطبيعة.	أ.د. محمد نبيل ياسين البكرى أ.د. خالد على كماخى
(١٩) كيمياء عناصر الوقود النووى.	أ.د. عبد الحكيم طه قنديل
(٢٠) تقنيات القرن ٢١ لتحسين النباتات باستخدام زراعة الأنسجة.	أ.د. عبد الرحيم توفيق الناغى أ.د. سمير عبد الرازق الشوبكى
(٢١) أساسيات علم الحيوان.	أ.د. محمد إسماعيل، أ.د. منى شرقاوى على، أ.د. تغريد عبد الرحمن حسن، أ.د. حلمى بشاى، أ.د. يحيى السيد العاصى
(٢٢) أساسيات العلوم الفيزيائية.	أ.د. أحمد فؤاد باشا أ.د. فوزى حامد عبد القادر أ.د. شريف أحمد خيرى أ.د. محمد نبيل يس البكرى
(٢٣) أساسيات علم الحشرات.	أ.د. على على المرسى. أ.د. محمد الشاذلى
(٢٤) أسس الكيمياء التحليلية غير الآلية والآلية.	أ.د. أحمد مدحت إسلام أ.د. مصطفى عمارة

(٢٥) الهندسة التحليلية المستوية والفراغية.	أ.د. عبدالشافى فهمى عبادة أ.د. حسن العويضى مصطفى
(٢٦) ميكانيكا الكم.	أ.د. محمد نبيل يس البكرى أ.د. صلاح الدين نبيل يس البكرى
(٢٧) علم البلورات والأشعة السينية.	أ.د. نعيمة عبد القادر أحمد أ.د. محمد أمين سليمان
(٢٨) كيمياء البيئة: تطبيقات أسس فروع الكيمياء على ملوثات الهواء والماء والتربة.	أ.د. أحمد مدحت إسلام. أ.د. مصطفى عمارة
(٢٩) الجيولوجيا الفيزيقية والتاريخية.	أ.د. حافظ شمس الدين عبد الوهاب
(٣٠) الفيزياء العملية وتجارب المحاكاة.	أ.د. أحمد فؤاد باشا وآخرون
(٣١) أسس الجبر والجبر الخطى بين النظرية والتطبيق مع أمثلة محلولة.	أ.د. محمد عبد العظيم سعود
(٣٢) مقدمة فى علم الأنظمة البيئية.	أ.د. محمد محمد الشاذلى مراجعة وتقديم أ.د. - محمد عبد الفتاح القصاص
(٣٣) الطاقة الشمسية المصدر الرئيسى للطاقة النظيفة.	أ.د. محمد أمين سليمان
(٣٤) الأسس الرياضية للديناميكا الحرارية والميكانيكا الإحصائية.	أ.د. عادل طه يونس
(٣٥) النظرية النسبية الخاصة والعامة.	أ.د. عادل طه يونس
(٣٦) المعادلات التفاضلية.	أ.د. عبد الشافى فهمى عبادة أ.د. حسن العويضى مصطفى

رقم الإيداع	٥٩٨٠ / ٢٠١٠